

# Analyse complexe et calcul vectoriel

Jean-Philippe NICOLAS

*Département de Mathématiques,  
Université de Brest, 6 avenue Victor Le Gorgeu,  
29200 Brest, France.*

*Bureau H109, Tel. 02 98 01 67 61,  
email : Jean-Philippe.Nicolas@univ-brest.fr*



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Bases d'analyse complexe</b>	<b>5</b>
1.1	Les nombres complexes . . . . .	5
1.2	Un peu de topologie . . . . .	8
1.3	Fonctions holomorphes . . . . .	10
1.3.1	Définition, propriétés, caractérisation de Cauchy-Riemann . . . . .	10
1.3.2	Intégration sur un chemin orienté . . . . .	15
1.3.3	Théorème et formule de Cauchy . . . . .	16
1.3.4	Séries entières, rayon de convergence . . . . .	20
1.3.5	Holomorphie et séries entières . . . . .	22
1.3.6	Quelques théorèmes sur les fonctions holomorphes . . . . .	25
1.4	Fonctions méromorphes . . . . .	27
1.5	Calculs d'intégrales par la méthode des résidus . . . . .	32
1.6	Notions intuitives sur les fonctions multi-valuées . . . . .	36
1.6.1	L'argument . . . . .	37
1.6.2	Le logarithme . . . . .	38
1.6.3	La racine carrée . . . . .	39
1.7	Exercices . . . . .	40
<b>2</b>	<b>Calcul vectoriel</b>	<b>45</b>
2.1	Champs de vecteurs et opérateurs différentiels fondamentaux . . . . .	45
2.1.1	Ouverts de $\mathbb{R}^3$ et champs de vecteurs . . . . .	45
2.1.2	Opérateurs différentiels fondamentaux . . . . .	46
2.1.3	Potentiels . . . . .	47
2.1.4	Coordonnées sphériques et cylindriques . . . . .	49
2.2	Courbes et surfaces paramétrées . . . . .	51
2.2.1	Courbes paramétrées dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	51
2.2.2	Surfaces paramétrées . . . . .	52
2.2.3	Surfaces implicitement définies . . . . .	53
2.3	Intégrales curvilignes et de surfaces . . . . .	53
2.3.1	Intégrale d'un champ scalaire le long d'une courbe . . . . .	53
2.3.2	Circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe . . . . .	53

2.3.3	Intégrale d'une fonction sur une surface . . . . .	54
2.3.4	Flux d'un champ de vecteurs . . . . .	54
2.4	Théorèmes de Stokes, Green-Riemann et Ostrogradski . . . . .	55
2.4.1	Théorème de Stokes . . . . .	55
2.4.2	Théorème de Green-Riemann . . . . .	55
2.4.3	Théorème d'Ostrogradski . . . . .	55
2.5	Exercices . . . . .	56

# Chapitre 1

## Bases d'analyse complexe

### 1.1 Les nombres complexes

La notion de nombre complexe vient initialement de la constatation que certaines équations algébriques du second degré n'ont pas de solution réelle. L'exemple typique est

$$x^2 + 1 = 0.$$

Au seizième siècle, un groupe d'algébristes italiens, Cardan et ses élèves, commencent à manipuler des symboles purement formels, tels que  $\sqrt{-a}$  pour  $a > 0$ , qu'ils appellent nombres impossibles, à une époque où d'autres mathématiciens hésitent encore à manipuler les nombres négatifs. Dans les siècles suivants, l'utilisation de ces nombres impossibles, aussi appelés nombres imaginaires, s'intensifie. La raison est que l'ensemble de ces nombres est le cadre naturel pour chercher les racines d'équations algébriques (c'est-à-dire les zéros de polynômes) et ils fournissent même des façons simples de trouver des solutions réelles de telles équations, là où des méthodes purement basées sur les nombres réels seraient beaucoup plus difficiles. Mais ce n'est qu'au dix-neuvième siècle que les nombres complexes recevront une définition rigoureuse. C'est Hamilton, qui en 1835 définit un nombre complexe comme un couple  $z = (x, y)$  de nombres réels. Pour deux nombres complexes  $z = (x, y)$  et  $z' = (x', y')$ , on définit leur somme et leur produit de la façon suivante :

$$z + z' = (x + x', y + y'), \quad zz' = (xx' - yy', xy' + x'y).$$

Cela revient exactement à considérer que l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes est muni d'une base canonique notée :

$$1 = (1, 0), \quad i = (0, 1)$$

vérifiant  $1 \cdot i = i \cdot 1 = i$ ,  $1^2 = 1$ ,  $i^2 = -1$ . C'est à dire que

$$\begin{aligned} z &= (x, y) = x + iy, \quad z' = (x', y') = x' + iy', \quad z + z' = x + x' + i(y + y'), \\ zz' &= (x + iy)(x' + iy') = xx' + ix'y' + ix'y + i^2yy' = xx' - yy' + i(xy' + x'y). \end{aligned}$$

L'ensemble  $\mathbb{C}$  muni de ces deux lois est un corps commutatif, c'est-à-dire qu'on a les propriétés suivantes :

1.  $\mathbb{C}$  muni de l'addition est un groupe abélien (c'est-à-dire commutatif), i.e.
  - l'addition est associative, commutative,
  - elle admet un élément neutre,
  - tout élément  $z$  de  $\mathbb{C}$  possède un inverse pour l'addition,
2. la multiplication est associative sur  $\mathbb{C}$ ,
3.  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  muni de la multiplication est un groupe abélien,
4. la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Un complexe  $z = (x, 0) = x + i0$  est simplement noté  $x$  et s'identifie ainsi au nombre réel  $x$ . Les nombres  $z = x + iy$  avec  $y \neq 0$  sont appelés nombres imaginaires et ceux tels que  $x = 0$  et  $y \neq 0$  sont qualifiés d'imaginaires purs.

**Remarque 1.1.** *A noter que comme  $i^2 = -1$ , il suit que  $i(-i) = 1$  et donc  $-i = \frac{1}{i}$ .*

**Définition 1.1.** *Pour un nombre complexe  $z = x + iy$ ,  $x$  s'appelle sa partie réelle et  $y$  sa partie imaginaire, on note*

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

*On appelle module d'un nombre complexe  $z = x + iy$  le nombre réel positif*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

*c'est la norme euclidienne du vecteur  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Le complexe conjugué de  $z$  est le nombre complexe*

$$\bar{z} = x - iy.$$

*On remarque que*

$$z\bar{z} = |z|^2.$$

On peut facilement montrer les propriétés suivantes :

**Proposition 1.1.** *Soit deux nombres complexes  $z$  et  $w$ . On a :*

1.  $\bar{\bar{z}} = z$ ,
2.  $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$ ,  $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im} z$ ,
3.  $|\bar{z}| = |z|$ ,
4.  $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ ,  $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$ ,

$$5. \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}, |zw| = |z||w|,$$

$$6. |z+w| \leq |z| + |w|, |z-w| \geq ||z| - |w||.$$

Nous avons jusqu'alors utilisé la description cartésienne des nombres complexes, i.e. l'écriture de la forme  $z = x + iy$ . Une autre description usuelle et utile est la description polaire, selon laquelle un nombre complexe  $z$  est représenté sous la forme  $z = re^{i\theta}$  où  $r = |z|$  et  $\theta$  est l'angle formé entre l'axe  $Ox$  et le segment  $0z$ . Le lien avec la représentation cartésienne est donné par l'expression cartésienne de l'exponentielle de  $i\theta$  :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

On a donc le lien suivant :

$$z = x + iy = re^{i\theta}; \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

où  $\theta$  est l'angle formé entre l'axe  $Ox$  et le segment  $Oz$  dans le plan complexe. C'est bien sûr analogue à la description d'un point  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  en coordonnées polaires. Cette représentation est unique si on se limite à  $\theta \in [0, 2\pi[$ , sauf pour  $(x, y) = (0, 0)$  où  $r = 0$  mais  $\theta$  est quelconque.

En fait l'exponentielle est une fonction définie sur  $\mathbb{C}$  tout entier par une série entière, comme c'est le cas sur  $\mathbb{R}$ .

**Définition 1.2.** *On considère la fonction exponentielle définie sur  $\mathbb{C}$  par*

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (1.1)$$

L'expression de  $e^{i\theta}$  en termes de  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$  n'est pas la définition de  $e^{i\theta}$  mais bien une conséquence de la définition de l'exponentielle par la série entière ci-dessus.

**Proposition 1.2.** *La fonction exponentielle est bien définie sur  $\mathbb{C}$  et a la propriété suivante :*

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

*Ainsi l'image par la fonction exponentielle de la droite imaginaire pure est le cercle unité  $\mathcal{C}(0, 1)$  dans  $\mathbb{C}$ , et si on se restreint au segment  $[0, i2\pi[$ , l'exponentielle est bijective de  $[0, i2\pi[$  sur  $\mathcal{C}(0, 1)$ .*

**Preuve.** Le fait que la série (1.1) soit bien définie sur  $\mathbb{C}$ , i.e. converge pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , vient simplement du fait que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{z^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|},$$

la série est donc absolument convergente pour tout  $z \in \mathbb{C}$ . Pour  $z = i\theta$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ , en utilisant le fait que

$$i^n = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } n = 2k, k \in \mathbb{N}, \\ (-1)^k i & \text{si } n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

on a

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos \theta + i \sin \theta. \end{aligned}$$

D'où la proposition. □

La fonction exponentielle a la propriété importante suivante :

**Proposition 1.3.** *Pour tout  $z, w \in \mathbb{C}$ ,  $e^z e^w = e^{z+w}$ .*

**Preuve.** La démonstration se fait en réorganisant les termes de la série  $e^{z+w}$  :

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{z^k w^{n-k}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{z^k w^p}{k!p!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{w^p}{p!} = e^z e^w. \quad \square \end{aligned}$$

On en déduit en particulier le théorème de Moivre :

**Corollaire 1.1** (Théorème de Moivre). *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $\theta \in \mathbb{R}$*

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

On a les propriétés importantes de la forme polaire :

**Proposition 1.4.** *Soit deux nombres complexes  $z$  et  $w$ . Si on note leur forme polaire :  $z = re^{i\theta}$ ,  $w = Re^{i\varphi}$ , avec  $r = |z|$ ,  $R = |w|$ , on a*

$$\bar{z} = re^{-i\theta}, \quad zw = rRe^{i(\theta+\varphi)}.$$

## 1.2 Un peu de topologie

On va voir ou revoir dans cette partie les notions d'ensembles ouverts, d'ouverts étoilés, de chemin fermé orienté et d'indice d'un chemin fermé orienté par rapport à un point. Ces notions seront utiles dans la suite du chapitre.



**Définition 1.3.** Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$  et  $r > 0$ , on appelle disque ouvert de centre  $z_0$  et de rayon  $r$  l'ensemble

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\} .$$

**Définition 1.4.** Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{C}$ , soit  $z_0 \in A$ , on dira que  $A$  est un voisinage de  $z_0$  s'il existe  $r > 0$  tel que  $D(z_0, r) \subset A$ .

**Définition 1.5.** Un ouvert de  $\mathbb{C}$  est une partie de  $\mathbb{C}$  qui est un voisinage de chacun de ses points.

C'est un peu l'analogie sur  $\mathbb{C}$  d'un intervalle ouvert sur  $\mathbb{R}$  (ou d'une réunion d'intervalles ouverts). Un disque ouvert est un ouvert. Une droite ou un point ne sont pas ouverts. En revanche, le complémentaire dans  $\mathbb{C}$  d'une droite ou d'un point est un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Une notion qui sera utile est celle d'ouvert étoilé

**Définition 1.6.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ .

1.  $z_0$  un point de  $\Omega$ . On dit que  $\Omega$  est étoilé par rapport à  $z_0$  si pour tout  $z \in \Omega$ , le segment  $[z_0, z]$  est entièrement contenu dans  $\Omega$ .
2. On dit que  $\Omega$  est étoilé s'il existe un point  $z_0 \in \Omega$  tel que  $\Omega$  soit étoilé par rapport à  $z_0$ .

Nous allons maintenant voir la notion de chemin. Il s'agit d'une courbe qui est munie d'un sens de parcours et que l'on peut paramétrer. Ceci nous donne la définition suivante.

**Définition 1.7 (Chemin).** Un chemin dans  $\mathbb{C}$  est une courbe  $\mathcal{C}$  que l'on peut paramétrer par une fonction  $\phi$  définie et continue sur un intervalle  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$  :

$$\mathcal{C} = \{\phi(t), t \in [a, b]\} .$$

On parlera de :

- chemin  $\mathcal{C}^1$  par morceaux si la fonction  $\phi$  qui le paramètre est de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux ;
- chemin orienté si on a de plus choisi un sens de parcours ;
- chemin fermé si le chemin revient à son point de départ, i.e. la fonction  $\phi$  est telle que  $\phi(a) = \phi(b)$ .

**Définition 1.8 (Indice d'un chemin fermé orienté).** Soit  $\gamma$  un chemin fermé orienté dans  $\mathbb{C}$ , et  $a \in \mathbb{C}$ ,  $a \notin \gamma$ . On appelle indice de  $\gamma$  relativement à  $a$ , et on note  $n(\gamma, a)$ , le nombre obtenu de la façon suivante : on trace depuis  $a$  une demi-droite, on compte le nombre de fois où le chemin traverse la demi-droite de droite à gauche et on y retranche le nombre de fois où le chemin traverse la demi-droite de gauche à droite. Le fait que ce nombre soit indépendant de la demi-droite choisie n'est pas a priori évident, on pourra s'en convaincre sur des exemples et admettre qu'il s'agit d'un théorème de topologie. Il s'agit simplement du nombre de tours que fait le chemin autour de  $a$ .

**Définition 1.9** (Intérieur d'un chemin fermé orienté). *C'est l'ensemble de tous les points  $a$  de  $\mathbb{C}$  qui ne sont pas sur  $\gamma$  mais tels que  $n(\gamma, a) \neq 0$ .*

## 1.3 Fonctions holomorphes

### 1.3.1 Définition, propriétés, caractérisation de Cauchy-Riemann

Les fonctions holomorphes sont des fonctions définies dans  $\mathbb{C}$  ou sur un ouvert de  $\mathbb{C}$ , à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , qui sont différentiables, mais au sens complexe du terme, c'est-à-dire par rapport à la variable complexe  $z$ . On verra que cette notion de "complexe-différentiabilité" est bien plus forte que la différentiabilité par rapport aux variables réelles  $x$  et  $y$  qui constituent  $z = x + iy$ .

**Définition 1.10.** *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ .*

1. *On dit que  $f$  est complexe-différentiable ou  $\mathbb{C}$ -différentiable ou holomorphe en  $z_0 \in \Omega$  si la limite*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

*existe dans  $\mathbb{C}$ . La limite, si elle existe, est notée  $f'(z_0)$ .*

2. *Si  $f$  est  $\mathbb{C}$ -différentiable en tout point de  $\Omega$ , on dira que  $f$  est holomorphe sur  $\Omega$  et la fonction  $f'$  définie sur  $\Omega$  est appelée la dérivée de  $f$  au sens complexe. L'ensemble des fonctions holomorphes sur  $\Omega$  est noté  $\mathbf{H}(\Omega)$ .*

**Définition 1.11.** *Les parties de  $\mathbb{C}$  les plus courantes sur lesquelles on considèrera des fonctions holomorphes sont des disques ouverts ou des couronnes ouvertes :*

$$\begin{aligned} D(z_0, r) &:= \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\} \\ C(z_0, r_1, r_2) &:= \{z \in \mathbb{C}; r_1 < |z - z_0| < r_2\} \text{ pour } 0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty. \end{aligned}$$

*Des disques fermés seront aussi utilisés dans certaines parties du cours :*

$$\bar{D}(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| \leq r\}.$$

**Exemples.** 1. *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  la fonction définie sur  $\mathbb{C}$  par  $z \mapsto z^n$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$ .*

2. *Les fonctions  $\bar{z}$ ,  $\operatorname{Re}(z)$ ,  $\operatorname{Im}(z)$  et  $|z|$  ne sont holomorphes en aucun point de  $\mathbb{C}$ .*

La preuve est laissée en exercice. Traitons-en une ici, par exemple  $|z|$ . Tout d'abord en 0, on voit que

$$\lim_{z \in \mathbb{R}, z \rightarrow 0^+} \frac{|z|}{z} = 1 = - \lim_{z \in \mathbb{R}, z \rightarrow 0^-} \frac{|z|}{z}.$$

Donc  $|z|$  n'est pas holomorphe en 0. Considérons maintenant  $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0} \neq 0$ . On commence par considérer que  $z$  est sur la droite  $0z_0$ , i.e.  $z = (\rho_0 + \rho)e^{i\theta_0}$  avec  $\rho \in \mathbb{R}$ . Alors

$$\frac{|z| - |z_0|}{z - z_0} = e^{-i\theta_0}.$$

Maintenant considérons que  $z$  est sur la droite passant par  $z_0$  et orthogonale à la droite  $0z_0$ , i.e.  $z = \rho_0 e^{i\theta_0} + \rho e^{i(\theta_0 + \pi/2)}$ . Alors

$$\frac{|z| - |z_0|}{z - z_0} = \frac{\sqrt{\rho_0^2 + \rho^2} - \rho_0}{\rho e^{i(\theta_0 + \pi/2)}} \rightarrow 0 \text{ lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

On a donc deux limites distinctes pour deux façons différentes de tendre vers  $z_0$ . Il suit que  $|z|$  n'est pas  $\mathbb{C}$ -différentiable en  $z_0$ .  $\square$

On a les propriétés suivantes dont les preuves ressemblent beaucoup à celles des propriétés analogues pour les fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ . Elles sont laissées en exercice, certaines seront traitées en cours.

**Propriétés.** 1. Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $f, g \in \mathbf{H}(\Omega)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ . On a :

(a)  $\lambda f + \mu g \in \mathbf{H}(\Omega)$ ,  $fg \in \mathbf{H}(\Omega)$ ,

(b) pour tout  $z \in \mathbb{C}$

$$(\lambda f + \mu g)'(z) = \lambda f'(z) + \mu g'(z),$$

$$(fg)'(z) = f(z)g'(z) + f'(z)g(z),$$

(c) si  $f$  ne s'annule pas sur  $\Omega$ , alors  $1/f \in \mathbf{H}(\Omega)$  et pour tout  $z \in \Omega$ ,

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z) = -\frac{f'(z)}{(f(z))^2},$$

(d) si  $g$  ne s'annule pas sur  $\Omega$ , alors  $f/g \in \mathbf{H}(\Omega)$  et pour tout  $z \in \Omega$ ,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2}.$$

2. Soit  $\Omega$  et  $U$  deux ouverts de  $\mathbb{C}$ ,  $f \in \mathbf{H}(\Omega)$ ,  $g \in \mathbf{H}(U)$ , on suppose de plus que  $f(\Omega) \subset U$ , alors  $g \circ f \in \mathbf{H}(\Omega)$  et pour tout  $z \in \Omega$ ,

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z).$$

3. Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $f \in \mathbf{H}(\Omega)$  et  $\phi : [a, b] \rightarrow \Omega$  une fonction dérivable. Alors  $f \circ \phi$  est dérivable sur  $[a, b]$  et

$$(f \circ \phi)'(t) = f'(\phi(t))\phi'(t).$$

**Exemple.** On en déduit notamment que les polynômes en  $z$  sont holomorphes sur  $\mathbb{C}$  et que les fractions rationnelles en  $z$  sont holomorphes en dehors des zéros de leur dénominateur.

Comme pour la notion usuelle de dérivabilité, le fait que  $f$  soit  $\mathbb{C}$ -différentiable en  $z_0$  entraîne que  $f$  est continue en  $z_0$ .

**Proposition 1.5.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $z_0 \in \Omega$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $\mathbb{C}$ -différentiable en  $z_0$ . Alors  $f$  est continue en  $z_0$ .

**Preuve.** On pose

$$g(z - z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

On sait que

$$g(z - z_0) \rightarrow f'(z_0) \text{ lorsque } z \rightarrow z_0.$$

On en déduit que

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)g(z - z_0) \rightarrow 0 \text{ lorsque } z \rightarrow z_0.$$

C'est-à-dire que  $f$  est continue en  $z_0$ . □

On va voir que la  $\mathbb{C}$ -différentiabilité est étroitement liée à une relation entre les dérivées partielles de  $f$  par rapport à  $x = \operatorname{Re} z$  et  $y = \operatorname{Im} z$ .

**Théorème 1.1** (La caractérisation de Cauchy-Riemann). Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $f$  une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}$ . On note  $z = x + iy$  un élément quelconque de  $\Omega$  et on considère la fonction  $f$  sous la forme

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y), \quad u = \operatorname{Re} f, \quad v = \operatorname{Im} f.$$

1. Si  $f \in \mathbf{H}(\Omega)$ , alors  $f$  admet en tout point  $z$  de  $\Omega$  des dérivées partielles par rapport à  $x$  et  $y$  et elles vérifient les équations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z). \quad (1.2)$$

2. Si les dérivées partielles de  $f$  existent et sont continues sur  $\Omega$  et si elles vérifient en tout point  $z$  de  $\Omega$  les équations de Cauchy-Riemann, alors  $f \in \mathbf{H}(\Omega)$ .

**Remarque 1.2.** On utilise souvent les deux opérateurs suivants :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

On voit alors que les équations de Cauchy-Riemann (1.2) sont équivalentes à

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0$$

et que pour  $f \in \mathbf{H}(\Omega)$ , on a pour tout  $z \in \Omega$

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z).$$

**Preuve du Théorème 1.1.** On commence par remarquer qu'effectivement, les équations de Cauchy-Riemann sont équivalentes à  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ . Pour cela, on développe simplement l'expression de  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$  :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u(x, y) + iv(x, y)) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

En identifiant la partie réelle et la partie imaginaire de  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$  à 0, on voit que les équations de Cauchy-Riemann sont équivalentes à  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ . Démontrons maintenant le théorème.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) On écrit simplement la définition de la  $\mathbb{C}$ -différentiabilité de  $f$  en  $z_0 \in \Omega$  ; on note  $z_0 = x_0 + iy_0$ ,

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Si on considère les deux cas particuliers où  $z$  approche  $z_0$  le long des lignes  $y = y_0$  et  $x = x_0$ , on obtient respectivement :

$$f'(z_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$

et

$$f'(z_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

En prenant la demi-différence des deux expressions de  $f'(z_0)$  ci-dessus, on obtient  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$  pour tout  $z_0 \in \Omega$ , c'est-à-dire les équations de Cauchy-Riemann sur  $\Omega$ . Par ailleurs, en effectuant la demi-somme des deux expressions de  $f'$  obtenues plus haut, on trouve  $f' = \frac{\partial f}{\partial z}$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Du fait que  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$ , on déduit que  $f$  est différentiable sur  $\Omega$  en tant que fonction du couple  $(x, y)$ , c'est-à-dire, pour tout  $z_0 \in \Omega$ , on a, en notant  $z_0 = x_0 + iy_0$  et  $z = x + iy$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{f(z) - f(z_0) - (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)}{|z - z_0|} \\ &= \frac{f(z) - f(z_0) - (x - x_0) \left( \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \right) - (y - y_0) \frac{1}{i} \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) - \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \right)}{|z - z_0|} \\ &= \frac{f(z) - f(z_0) - (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) - (\bar{z} - \bar{z}_0) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)}{|z - z_0|} \rightarrow 0 \text{ lorsque } z \rightarrow z_0. \end{aligned}$$

Comme par hypothèse,  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ , on en déduit

$$\frac{f(z) - f(z_0) - (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)}{|z - z_0|} \rightarrow 0 \text{ lorsque } z \rightarrow z_0$$

et donc, en multipliant par  $\frac{|z-z_0|}{z-z_0}$ , qui est de module 1,

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \text{ lorsque } z \rightarrow z_0.$$

On voit donc que  $f$  est  $\mathbb{C}$ -différentiable en tout point de  $\Omega$ . □

A noter que même si le Théorème 1.1 est énoncé sur un ouvert  $\Omega$ , sa preuve est locale. De fait, nous venons de prouver le résultat utile suivant :

**Proposition 1.6.** *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , et  $z_0 \in \mathbb{C}$ .*

1. *On suppose que  $f$  est  $\mathbb{C}$ -différentiable en  $z_0$ , alors  $f$  admet en  $z_0$  des dérivées partielles par rapport à  $x$  et  $y$  et*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0,$$

*i.e. les équations de Cauchy-Riemann sont vérifiées en  $z_0$ . D'autre part*

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

2. *Supposons que les dérivées partielles de  $f$  par rapport à  $x$  et  $y$  sont définies au voisinage de  $z_0$  et sont continues en  $z_0$ . Si de plus  $f$  vérifie en  $z_0$  les conditions de Cauchy-Riemann, alors  $f$  est  $\mathbb{C}$ -différentiable en  $z_0$  et*

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

Nous avons le corollaire suivant qui est simplement la contraposée du premier point de la proposition ci-dessus :

**Corollaire 1.2.** *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , et  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Si  $f$  admet en  $z_0$  des dérivées partielles par rapport à  $x$  et  $y$  et les conditions de Cauchy-Riemann ne sont pas vérifiées en  $z_0$ , i.e.*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \neq 0,$$

*alors  $f$  n'est pas  $\mathbb{C}$ -différentiable en  $z_0$ . De même si une ou les deux dérivées partielles de  $f$  en  $z_0$  ne sont pas définies,  $f$  n'est pas  $\mathbb{C}$ -différentiable en  $z_0$ .*

On peut utiliser la caractérisation de Cauchy-Riemann pour montrer que l'exponentielle est holomorphe sur  $\mathbb{C}$ . C'est le sujet de l'Exercice 1.1.

### 1.3.2 Intégration sur un chemin orienté

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $\gamma$  un chemin orienté dans  $\Omega$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ , paramétré par la fonction  $\phi$  sur l'intervalle  $[a, b]$ . Soit également  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue. On suppose de plus que  $\phi'$  ne s'annule pas sur  $[a, b]$ . On appelle intégrale de  $f$  sur  $\gamma$  la quantité

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \varepsilon \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt, \quad (1.3)$$

où  $\varepsilon = 1$  si le sens de parcours de  $\gamma$  correspond au sens de déplacement de  $\phi(t)$  lorsque  $t$  croît et  $\varepsilon = -1$  sinon.

Il faut vérifier qu'il s'agit réellement d'une définition. Pour cela, on doit montrer que la quantité (1.3) est indépendante du choix d'un paramétrage  $\mathcal{C}^1$  dont la dérivée ne s'annule pas. Considérons  $([a, b], \phi)$  et  $([c, d], \psi)$  deux tels paramétrages. Quitte à changer les sens de parcours (ce qui revient à changer le signe de l'intégrale dans le membre de droite de (1.3)), on peut supposer que les sens de parcours donnés par  $\phi$  et  $\psi$  sont les mêmes et correspondent à l'orientation de  $\gamma$ . Alors la fonction  $\chi := \phi^{-1} \circ \psi$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $]c, d[$  sur  $]a, b[$  et on a

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt &= \int_c^d f(\phi(\chi(s)))\phi'(\chi(s))\chi'(s)ds \\ &= \int_c^d f(\phi \circ \chi(s))(\phi \circ \chi)'(s)ds \\ &= \int_c^d f(\psi(s))\psi'(s)ds. \end{aligned}$$

On a donc bien une définition indépendante du paramétrage.

On considère maintenant le cas de fonctions admettant une primitive holomorphe.

**Théorème 1.2** (de la primitive holomorphe). *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  continue telle qu'il existe  $F \in \mathbf{H}(\Omega)$  vérifiant  $f = F'$ . Soit  $\gamma$  un chemin orienté  $\mathcal{C}^1$  par morceaux dans  $\Omega$ , allant d'un point  $z_1$  de  $\Omega$  à un point  $z_2$  de  $\Omega$ . Alors*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1).$$

En particulier on a le résultat suivant.

**Corollaire 1.3.** *L'intégrale sur tout parcours fermé d'une fonction admettant une primitive holomorphe est nulle.*

**Preuve du Théorème 1.2.** On utilise un paramétrage  $([a, b], \phi)$  de  $\gamma$  ayant le bon sens de parcours :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt \\ &= \int_a^b F'(\phi(t))\phi'(t)dt \\ &= \int_a^b (F \circ \phi)'(t)dt \\ &= F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = F(z_2) - F(z_1). \end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve. □

### 1.3.3 Théorème et formule de Cauchy

On commence par le

**Théorème 1.3** (Théorème de Cauchy). *Soit  $\Omega$  un ouvert étoilé de  $\mathbb{C}$ ,  $f \in \mathbf{H}(\Omega)$ , soit  $\gamma$  un chemin fermé orienté  $\mathcal{C}^1$  par morceaux entièrement contenu dans  $\Omega$ , alors*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

**Remarque 1.3.** *A noter que le théorème est vrai sur un ouvert  $\Omega$  quelconque à condition de considérer un chemin fermé  $\gamma$  entièrement contenu dans  $\Omega$  et tel que son intérieur est entièrement contenu dans  $\Omega$ . Si  $\Omega$  est étoilé, alors tout chemin fermé dans  $\Omega$  est tel que son intérieur est entièrement contenu dans  $\Omega$  (notons que cette propriété caractérise en fait une classe plus large d'ouverts qu'on appelle simplement connexes). On va démontrer le théorème sous cette forme, i.e. pour un ouvert quelconque mais avec un chemin fermé dans  $\Omega$  et dont l'intérieur est dans  $\Omega$ .*

**Preuve du théorème.** On fait tout d'abord la preuve dans le cas où  $\gamma$  est le contour d'un rectangle de côtés parallèles aux axes, au voisinage duquel  $f$  est holomorphe ( $f$  n'est pas simplement holomorphe au voisinage du contour mais aussi sur tout l'intérieur du rectangle). Il s'agit du

**Lemme 1.1** (de Goursat). *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $\gamma$  le contour d'un rectangle, de côtés parallèles aux axes, respectivement de longueurs  $a$  et  $b$ . On suppose que  $\gamma$  et son intérieur sont entièrement contenus dans  $\Omega$ . Soit  $f \in \mathbf{H}(\Omega)$ , alors*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$



**Preuve du Lemme de Goursat.** On note

$$I = \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right|.$$

On va découper le rectangle en quatre sous-rectangles égaux. On a alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\gamma_k^1} f(z) dz,$$

où  $\gamma_i^1$  est le contour du  $i$ -ème rectangle. Alors il existe  $i_1 \in \{1, 2, 3, 4\}$  tel que

$$\left| \int_{\gamma_{i_1}^1} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4} I.$$

En itérant ce processus, on arrive à montrer pour chaque  $n$  l'existence d'un chemin  $\gamma_{i_n}^n$ ,  $i_n \in \{1, 2, 3, 4\}$ , contour d'un rectangle dont les côtés ont pour longueur respective  $a/2^n$  et  $b/2^n$ , tel que

$$\left| \int_{\gamma_{i_n}^n} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4^n} I.$$

La longueur de  $\gamma_{i_n}^n$ , notée  $l(\gamma_{i_n}^n)$ , est

$$l(\gamma_{i_n}^n) = \frac{2(a+b)}{2^n}.$$

L'intersection de tous ces sous-rectangles se réduit à un point  $z_0$  au voisinage duquel  $f$  est holomorphe. On a donc au voisinage de  $z_0$  :

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z), \text{ où } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{r(z)}{z - z_0} = 0.$$

D'après le Corollaire 1.3, l'intégrale sur  $\gamma_{i_n}^n$  de  $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$  est nulle. On a donc

$$\int_{\gamma_{i_n}^n} f(z) dz = \int_{\gamma_{i_n}^n} r(z) dz.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , on choisit  $\rho > 0$  tel que  $|z| < \rho$  entraîne que

$$|r(z)| \leq \varepsilon |z - z_0|.$$

Il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que le  $n$ -ième sous-rectangle soit contenu dans  $D(z_0, \rho)$ . Il suit donc que sur  $\gamma_{i_n}^n$ , on a

$$|r(z)| \leq \varepsilon |z - z_0| \leq \varepsilon \sqrt{\left(\frac{a}{2^n}\right)^2 + \left(\frac{b}{2^n}\right)^2}.$$

On en déduit que

$$\frac{I}{4^n} \leq \varepsilon \sqrt{\left(\frac{a}{2^n}\right)^2 + \left(\frac{b}{2^n}\right)^2} \frac{2(a+b)}{2^n} \leq 2\varepsilon \frac{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}{4^n}.$$

On en déduit que

$$I \leq 2\varepsilon(a+b)\sqrt{a^2+b^2}$$

et ce quel que soit  $\varepsilon > 0$ . On a donc  $I = 0$  et le lemme est démontré.  $\square$

Le lemme de Goursat va nous permettre de construire sur le rectangle une primitive holomorphe de  $f$ .

**Corollaire 1.4.** *Avec les données du Lemme de Goursat, la fonction  $f$  admet une primitive holomorphe dans le rectangle. Il suit que l'intégrale de  $f$  sur tout chemin fermé, orienté,  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et contenu dans le rectangle, est nulle.*

**Preuve du corollaire.** On définit la fonction  $F$  de la façon suivante. Soit  $z_0 = x_0 + iy_0$  le centre du rectangle et soit  $z = x + iy$  un point du rectangle, on pose

$$\begin{aligned} F(z) &:= \int_{x_0}^x f(u + iy_0) du + \int_{y_0}^y f(x_0 + iv) idv \\ &= \int_{y_0}^y f(x_0 + is) ids + \int_{x_0}^x f(t + iy) dt. \end{aligned}$$

L'égalité des deux expressions est assurée par le Lemme de Goursat car leur différence est l'intégrale de  $f$  sur le contour d'un rectangle contenu dans le rectangle de côtés  $a$  et  $b$ , cette différence est donc nulle. La dérivée partielle par rapport à  $x$  de la seconde expression est  $f(z)$  et la dérivée partielle par rapport à  $y$  de la première expression est  $if(z)$ . Il suit que les dérivées partielles de  $F$  sont holomorphes donc continues sur le rectangle,  $F$  est donc  $\mathcal{C}^1$ . Et on voit que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial F}{\partial y} = f.$$

En particulier  $F$  vérifie les équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial F}{\partial y} \right) = 0.$$

La fonction  $F$  est donc holomorphe sur le rectangle et sa dérivée au sens complexe est

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial F}{\partial y} \right) = f.$$

Ceci clot la preuve du corollaire.  $\square$

**Remarque 1.4.** *A noter que la preuve du corollaire est en fait valable dans un voisinage convexe du rectangle, pourvu qu'il soit assez petit pour que  $f$  y soit holomorphe et que tout point du voisinage puisse être atteint en se déplaçant d'abord en  $x$  puis en  $y$  tout en restant dans le voisinage.*

Considérons maintenant le cas général du théorème. On peut alors recouvrir l'union de  $\gamma$  et de son intérieur par un pavage de rectangles entièrement contenus dans  $\Omega$  et appliquer le résultat dans chaque rectangle.  $\square$

On arrive maintenant à l'une des formules clef de l'analyse complexe : la formule de Cauchy.

**Théorème 1.4** (Formule de Cauchy). *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  étoilé, soit  $f \in \mathbf{H}(\Omega)$ , soit  $a \in \Omega$ . On considère  $\gamma$  un chemin fermé orienté dans  $\Omega$ , ne passant pas par  $a$ . Alors on a*

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2i\pi n(\gamma, a) f(a).$$

*En particulier, si on choisit, pour  $\rho > 0$  assez petit,  $\gamma(\theta) = a + \rho e^{i\theta}$ ,  $\theta$  variant de 0 à  $2\pi$  (i.e.  $\gamma$  est un cercle de centre  $a$  et de rayon  $\rho$  parcouru une fois dans le sens direct, on notera ce parcours  $\gamma_{a,\rho}$ ), on a  $n(\gamma_{a,\rho}, a) = 1$  et on obtient*

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\rho}} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

**Remarque 1.5.** *A noter que comme pour le Théorème de Cauchy, la Formule de Cauchy est encore valable si on se place sur un ouvert  $\Omega$  quelconque et si on considère un chemin  $\gamma$  dans  $\Omega$  qui soit fermé, orienté et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et tel que son intérieur soit entièrement contenu dans  $\Omega$ .*

**Preuve de la Formule de Cauchy.** On suppose  $n(\gamma, a) > 0$ , sinon, il suffit d'orienter le chemin en sens inverse et de mettre un signe “−” devant l'intégrale. En utilisant le théorème de Cauchy, on peut montrer que l'intégrale sur  $\gamma$  de  $(f(z)/(z-a))dz$  est égale à l'intégrale de la même forme sur un cercle de centre  $a$  et de rayon  $\rho$  (où  $\rho > 0$  est simplement supposé assez petit pour que  $D(a, \rho) \subset \Omega$ ) parcouru  $n(\gamma, a)$  fois dans le sens direct. Comme pour la propriété de l'indice, on pourra s'en convaincre en traitant sur un dessin quelques exemples. On a donc, pour tout  $\rho > 0$  assez petit,

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = n(\gamma, a) \int_{\gamma_{a,\rho}} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Soit maintenant  $\varepsilon > 0$  quelconque, par continuité de  $f$  sur  $\Omega$ , et donc en  $a$ , il existe  $\delta > 0$  tel que pour  $|z-a| < \delta$ , on ait  $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$ . Quitte à réduire  $\delta$ , on peut supposer

que  $D(a, \delta) \subset \Omega$ . On prend  $\rho < \delta$ , alors :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\rho}} \frac{f(z)}{z-a} dz - f(a) \right| &= \left| \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + \rho e^{i\theta}) - f(a)}{\rho e^{i\theta}} i\rho e^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon}{\rho} \rho d\theta = \varepsilon \end{aligned}$$

On obtient donc que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz - n(\gamma, a)f(a) \right| < \varepsilon$$

et donc

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = n(\gamma, a)f(a),$$

ce qui conclut la preuve du théorème. □

### 1.3.4 Séries entières, rayon de convergence

On a vu pour l'instant comme exemples de fonctions holomorphes, les polynômes et les fractions rationnelles (en dehors des zéros de leur dénominateur). On va maintenant passer aux séries infinies et montrer que dans certaines parties de  $\mathbb{C}$ , les fonctions holomorphes sont exactement les fonctions qui sont des sommes de séries en  $z$ .

**Définition 1.12.** *On appelle série entière une série de la forme*

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

où les  $c_n$  sont des coefficients complexes fixés. Pour une telle série, on définit son rayon de convergence par :

$$R := \sup \{ \rho; \rho \geq 0 \text{ et la suite } c_n \rho^n \text{ est bornée} \} .$$

**Proposition 1.7.** *On considère une série entière*

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

de rayon de convergence  $R > 0$ . Alors  $S(z)$  est absolument convergente dans le disque ouvert  $D(0, R)$ , normalement convergente dans  $\bar{D}(0, r)$  pour  $0 < r < R$  et divergente pour  $|z| > R$ .

**Preuve.**

1. Soit  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| < R$ . Alors on pose  $\varepsilon = R - |z|$  et on a

$$|c_n z^n| = |c_n| (R - \varepsilon)^n = |c_n| \left( \frac{R - \varepsilon}{R - \varepsilon/2} \right)^n (R - \varepsilon/2)^n \leq C_\varepsilon \left( \frac{R - \varepsilon}{R - \varepsilon/2} \right)^n,$$

car  $R - \varepsilon/2 < R$  et donc la suite  $c_n (R - \varepsilon/2)^n$  est bornée. Comme  $R - \varepsilon < R - \varepsilon/2$ , on a majoré  $|c_n z^n|$  par une quantité de la forme  $C\lambda^n$  avec  $0 < \lambda < 1$ , i.e. par le terme général d'une série convergence. La série  $S(z)$  converge donc absolument.

2. Soit  $0 < r < R$ . Pour tout  $z \in \bar{D}(0, r)$ , on a la majoration suivante :

$$|c_n z^n| \leq |c_n| r^n \leq C_{R-r} \left( \frac{r}{(r+R)/2} \right)^n = C_{R-r} \left( \frac{2r}{R+r} \right)^n$$

et  $2r < r + R$ , on a donc bien convergence normale dans  $\bar{D}(0, r)$ .

3. Pour  $|z| > R$ , par définition de  $R$ , la suite  $|c_n z^n| = |c_n| |z|^n$  n'est pas bornée, le terme général ne tend donc pas vers zéro et la série diverge.  $\square$

Le rayon de Convergence se calcule en utilisant le critère de Cauchy-Hadamard :

**Théorème 1.5.** *Le rayon de convergence de la série entière*

$$\sum_{n \geq 0} c_n z^n$$

est donné par

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} |c_n|^{1/n}}.$$

**Preuve.** On note  $R$  le rayon de convergence de la série et

$$K = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} |c_n|^{1/n}}.$$

On rappelle la définition de limite supérieure :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |c_n|^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} |c_k|^{1/k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} |c_k|^{1/k}.$$

On considère  $\rho > 0$  tel que

$$\rho < K, \text{ i.e. } \frac{1}{\rho} > \limsup_{n \rightarrow +\infty} |c_n|^{1/n},$$

alors il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N$ , on ait

$$\frac{1}{\rho} \geq |c_n|^{1/n} \text{ et donc } |c_n \rho^n| \leq 1,$$

d'où la suite  $c_n \rho^n$  est bornée et  $\rho \leq R$ . On en déduit que  $R \geq K$ .

Soit maintenant  $\rho > K$ , alors il existe  $\varepsilon > 0$  et  $N \in \mathbb{N}$  tels que, pour tout  $n \geq N$  on ait :

$$\exists k \geq n; |c_k|^{1/k} \geq \frac{1}{\rho} + \varepsilon,$$

autrement dit, on peut extraire une sous-suite  $c_{n_k}$  de  $c_n$  telle que

$$|c_{n_k}|^{1/n_k} \geq \frac{1}{\rho} + \varepsilon \text{ et donc } |c_{n_k} \rho^{n_k}| \geq (1 + \varepsilon \rho)^{n_k} \rightarrow +\infty \text{ lorsque } k \rightarrow +\infty.$$

D'où la suite  $c_n \rho^n$  n'est pas bornée et  $\rho \geq R$ . On en déduit que  $R \leq K$ .

A noter que si  $K = 0$ , on n'utilise que la deuxième inégalité et si  $K = +\infty$ , on n'utilise que la première.  $\square$

**Remarque 1.6.** *Le rayon de convergence d'une série entière admet la caractérisation suivante :*

$$R = \sup\{\rho \geq 0; \text{ la suite } c_n \rho^n \text{ tend vers } 0\}.$$

### 1.3.5 Holomorphie et séries entières

Une série entière de rayon de convergence  $R > 0$  définit dans  $D(0, R)$  une fonction holomorphe. Pour établir ce résultat, on commence par montrer le lemme suivant :

**Lemme 1.2.** *Les séries entières*

$$\sum_{n \geq 0} c_n z^n \text{ et } \sum_{n \geq 1} n c_n z^{n-1}$$

*ont le même rayon de convergence.*

**Preuve.** On commence par remarquer que la série  $\sum_{n \geq 1} n c_n \rho^{n-1}$  converge si et seulement si  $\sum_{n \geq 0} n c_n \rho^n$  converge. La preuve est alors une application directe de la formule de Cauchy-Hadamard et du fait que

$$n^{1/n} \rightarrow 1 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty. \quad \square$$

**Théorème 1.6.** *Soit la série entière*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$$

de rayon de convergence  $R > 0$ . Alors la fonction  $f$  appartient à  $\mathbf{H}(D(0, R))$  et

$$f'(z) = \sum_{n \geq 0} n c_n z^{n-1} \quad \forall z \in D(0, R).$$

Il suit en particulier du lemme précédent que  $f' \in \mathbf{H}(D(0, R))$  ainsi que toutes les dérivées successives de  $f$  qui se calculent en dérivant la série terme à terme. D'où,  $f$ , en tant que fonction de  $(x, y)$ , est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $D(0, R)$ .

**Preuve.** Le théorème est une conséquence du lemme précédent et des théorèmes usuels de dérivation terme à terme des séries de fonctions. Attention, pour chaque étape, on doit montrer qu'on peut dériver la série par rapport à  $x$  et à  $y$ . Mais ceci se ramène à étudier la même série du fait que

$$\frac{\partial}{\partial x} (c_n z^n) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} (c_n z^n) = n c_n z^{n-1}.$$

On montre ainsi par récurrence à la fois la classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $f$  par rapport à  $(x, y)$  et le fait que toutes les dérivées successives de  $f$  par rapport à  $z$  se calculent en dérivant la série terme à terme et qu'elles sont toutes holomorphes dans  $D(0, R)$ .  $\square$

**Corollaire 1.5.** Une conséquence importante du résultat précédent est que

$$c_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(0),$$

ce qui implique notamment que si

$$\sum_{n \geq 0} c_n z^n = \sum_{n \geq 0} d_n z^n \quad \text{dans } D(0, r), \quad r > 0,$$

alors  $c_n = d_n$  pour tout  $n$ .

On va maintenant voir que toutes les fonctions holomorphes sont localement de cette forme.

**Théorème 1.7.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $f \in \mathbf{H}(\Omega)$ . Pour tout  $a \in \Omega$ , si on pose

$$R_a = d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega) = \sup \{ \rho > 0; D(a, \rho) \subset \Omega \},$$

il existe une série entière  $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ , de rayon de convergence  $R \geq R_a$ , telle que, pour tout  $z \in D(a, R_a)$ , on ait

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - a)^n.$$

On a de plus que les coefficients  $c_n$  sont donnés par

$$c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\rho}} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \text{ pour tout } \rho \text{ tel que } 0 < \rho < R_a.$$

On déduit notamment de ces résultats et du théorème précédent que  $f$ , en tant que fonction de  $x$  et  $y$ , est  $C^\infty$  sur  $\Omega$ , que le développement de  $f$  en série entière dans  $D(a, R_a)$  est unique et que

$$c_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(a).$$

**Preuve.** Soit  $z \in D(a, R_a)$ , i.e. tel que  $|z-a| < R_a$ , alors d'après la formule de Cauchy, pour  $|z-a| < \rho < R_a$  on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\rho}} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Pour  $w \in \gamma_{a,\rho}$ , on a

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a) - (z-a)} = \frac{1}{w-a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{w-a}}$$

et comme

$$\left| \frac{z-a}{w-a} \right| = \frac{|z-a|}{\rho} < 1,$$

$$\frac{1}{1 - \frac{z-a}{w-a}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{z-a}{w-a} \right)^n,$$

la convergence étant normale sur le cercle puisque le module de  $(z-a)/(w-a)$  y est constant. On peut donc remplacer dans l'intégrale et sortir le signe somme du signe intégrale :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\rho}} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right) (z-a)^n.$$

En utilisant une décomposition en secteurs étoilés de la couronne  $C(a, 0, R_a)$  et le théorème de Cauchy, on montre que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , la valeur de l'intégrale

$$\int_{\gamma_{a,\rho}} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$$

est indépendante du choix de  $\rho \in ]0, R_a[$ . Le théorème est donc démontré.  $\square$



### 1.3.6 Quelques théorèmes sur les fonctions holomorphes

On va maintenant voir deux théorèmes importants sur les propriétés des fonctions holomorphes ; ces deux résultats sont des conséquences de l'écriture locale sous forme de série entière.

**Proposition 1.8.** *Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$  et  $f \in \mathbf{H}(\Omega)$ . On suppose que  $|f|$  admet un maximum local en un point de  $\Omega$ , alors  $f$  est constante dans  $\Omega$ .*

Ceci entraîne le résultat suivant :

**Théorème 1.8** (Principe du maximum). *Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{C}$  et  $f \in \mathbf{H}(\Omega)$  telle que  $f$  se prolonge en une fonction continue sur  $\bar{\Omega}$ . Alors  $|f|$  atteint son maximum sur  $\bar{\Omega}$  à la frontière de  $\Omega$ .*

**Preuve de la proposition.** On suppose que  $|f|$  atteint un maximum local en  $a \in \Omega$  et on considère  $\rho > 0$  tel que  $D(a, \rho) \subset \Omega$  et  $|f(z)| \leq |f(a)|$  pour  $|z - a| < \rho$ . On utilise la formule de Cauchy : soit  $0 < r < \rho$ ,

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,r}} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

On en déduit, en utilisant l'hypothèse :

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a)| d\theta = |f(a)|,$$

d'où

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|f(a)| - |f(a + re^{i\theta})|) d\theta = 0$$

et comme la fonction intégrée est continue et positive, il suit qu'elle est identiquement nulle. Donc  $|f|$  est constant dans  $D(a, \rho)$ . Il existe donc  $C \geq 0$  telle que  $|f(z)| = C$  dans  $D(a, \rho)$ . Si  $C = 0$ , cela entraîne clairement que  $f$  est constante. Si  $C \neq 0$ , on a, en notant  $f_1 = \operatorname{Re}(f)$  et  $f_2 = \operatorname{Im}(f)$  :

$$f_1^2 + f_2^2 = C^2.$$

On dérive par rapport à  $x$  et  $y$  :

$$2f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + 2f_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0, \quad 2f_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + 2f_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0.$$

En utilisant les équations de Cauchy-Riemann :

$$f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \quad f_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0,$$

ce qui entraîne :

$$(f_1^2 + f_2^2) \frac{\partial f_1}{\partial x} = C^2 \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0 \text{ et donc } \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0.$$

On obtient de la même façon que  $\frac{\partial f_1}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f_2}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f_2}{\partial y}$  sont nulles dans  $D(a, \rho)$ , ce qui entraîne que  $f$  y est constante. Par le Théorème 1.7 et par connexité de  $\Omega$ , si  $f$  est constante dans  $D(a, \rho)$ , alors  $f$  est constante dans  $\Omega$ .  $\square$

A noter que dans la preuve de la proposition, nous avons également établi le résultat suivant :

**Proposition 1.9.** *Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$ ,  $f \in \mathbf{H}(\Omega)$ , on suppose que  $|f|$  est constant dans un disque non vide de  $\Omega$ , alors  $f$  est constante dans  $\Omega$ .*

**Théorème 1.9** (Principe des zéros isolés). *Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$  et  $f \in \mathbf{H}(\Omega)$ , les zéros de  $f$  dans  $\Omega$  n'ont pas de point d'accumulation dans  $\Omega$ , sauf si  $f$  est identiquement nulle.*

**Remarque 1.7.** *Cependant les zéros de  $f$  peuvent très bien avoir un point d'accumulation à la frontière de  $f$ , c'est par exemple le cas de la fonction  $\sin(1/z)$ , holomorphe dans  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  et dont les zéros s'accumulent en 0.*

**Preuve du théorème.** Supposons que les zéros de  $f$  aient un point d'accumulation  $a \in \Omega$ . On considère le développement en série entière de  $f$  dans  $D(a, R_a)$

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n(a)(z - a)^n.$$

On suppose que tous les coefficients  $c_n(a)$  ne sont pas nuls, sinon  $f$  est nulle dans  $D(a, R_a)$  ce qui entraîne  $f \equiv 0$  dans  $\Omega$  ; on considère  $c_m(a)$  le premier coefficient non nul de la série. Alors on a

$$f(z) = (z - a)^m g(z), \quad g(z) = \sum_{n \geq 0} c_{m+n}(a)(z - a)^n.$$

La fonction  $g(z)$  est définie dans  $D(a, R_a)$  par une série entière de rayon de convergence  $R \geq R_a$ , elle y est donc continue et sa valeur en  $a$  est  $c_m(a) \neq 0$ . Il suit que dans un voisinage de  $a$  suffisamment petit,  $f$  ne s'annule qu'en  $a$ , ce qui contredit l'hypothèse que les zéros de  $f$  s'accumulent en  $a$ . L'hypothèse entraîne donc que  $f \equiv 0$  dans  $D(a, R_a)$ . Le Théorème 1.7 ainsi que la connexité de  $\Omega$  permettent alors de conclure que  $f \equiv 0$  dans tout  $\Omega$ .  $\square$

Voici un autre théorème fondamental sur les fonctions holomorphes.

**Théorème 1.10** (Théorème de Liouville). *Soit  $f \in \mathbf{H}(\mathbb{C})$  uniformément bornée sur  $\mathbb{C}$ , alors  $f$  est constante sur  $\mathbb{C}$ .*

**Preuve.** Soit  $M > 0$  tel que  $|f(z)| \leq M$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ . Soit  $a, b \in \mathbb{C}$ , on choisit  $R > 2 \max\{|a|, |b|\}$ , ce qui entraîne, pour  $z \in \gamma_{0,R}$ ,  $|z - a| > R/2$  et  $|z - b| > R/2$ . On a

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{0,R}} f(z) \left( \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} \right) dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{0,R}} f(z) \frac{a-b}{(z-a)(z-b)} dz.$$

On paramètre le cercle  $\gamma_{0,R}$  pour écrire l'intégrale comme une intégrale sur un intervalle de  $\mathbb{R}$  et pouvoir la majorer. On obtient

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) \frac{a-b}{(Re^{i\theta}-a)(Re^{i\theta}-b)} iRe^{i\theta} d\theta.$$

En utilisant le fait que  $|f(z)| \leq M$  et que pour  $z \in \gamma_{0,R}$  on a  $|z-a| > R/2$  et  $|z-b| > R/2$ , on a

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M \frac{|a-b|}{\left(\frac{1}{2}R\right)^2} R d\theta,$$

d'où

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M|a-b|}{\left(\frac{1}{2}R\right)^2} 2\pi R \longrightarrow 0 \text{ lorsque } R \rightarrow +\infty.$$

Donc  $f(a) = f(b)$ . □

Le Théorème de Liouville a une conséquence surprenante.

**Théorème 1.11** (de d'Alembert-Gauss ou théorème fondamental de l'algèbre). *Tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine.*

**Preuve.** Soit  $P$  un polynôme non constant n'admettant aucune racine dans  $\mathbb{C}$ . Alors la fonction  $f = 1/P$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$  et bornée car elle tend vers 0 à l'infini. Elle est donc constante sur  $\mathbb{C}$ , ce qui contredit le fait que  $P$  est non constant. □

## 1.4 Fonctions méromorphes

Nous allons maintenant considérer des fonctions  $f$  holomorphes dans un disque  $D(a, R)$  mais pas en  $a$ , c'est-à-dire holomorphes dans la couronne  $C(a, 0, R)$ . Au point  $a$ , on a une singularité (ce qui revient à dire que  $f$  n'est pas holomorphe en  $a$ ) et l'idée est d'étudier  $f$  au voisinage de  $a$  de façon à préciser la nature de la singularité. On commence par énoncer le théorème de Laurent, qui dit que même si on ne peut pas espérer, de façon générale, développer  $f$  en série entière dans  $C(a, 0, R)$ , on a tout de même un développement de la forme

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n.$$

Ce théorème est en fait plus général et permet d'obtenir de tels développements dans des couronnes  $C(a, r, R)$ .

**Théorème 1.12** (Théorème de Laurent). *Soit  $0 \leq r < R \leq +\infty$ ,  $a \in \mathbb{C}$  et  $f \in \mathbf{H}(C(a, r, R))$ . Alors il existe des coefficients  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  uniques tels que dans la couronne  $C(a, r, R)$ ,  $f$  s'écrive sous la forme*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - a)^n.$$

Les  $c_n$  sont donnés par

$$c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\rho}} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz, \quad (1.4)$$

pour  $r < \rho < R$  quelconque.

**Preuve.** Soit  $z \in C(a, r, R)$ , on considère  $r < r_1 < |z| < r_2 < R$ . En découpant la couronne en secteurs étoilés et en utilisant la formule de Cauchy dans chaque secteur, on montre que

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,r_2}} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,r_1}} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Pour la première intégrale, on a  $|w - a| > |z - a|$  et donc

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{w-a}} = \frac{1}{w - a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{z - a}{w - a} \right)^n,$$

la convergence étant uniforme sur le cercle  $\gamma_{a,r_2}$  puisque que le module de  $(w - a)/(z - a)$  y est constant et strictement inférieur à 1. On en déduit que

$$\int_{\gamma_{a,r_2}} \frac{f(w)}{w - z} dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,r_2}} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw \right) (z - a)^n.$$

On fait un travail similaire avec la seconde intégrale, pour laquelle  $|w - a| < |z - a|$  :

$$\frac{1}{w - z} = -\frac{1}{z - a} \frac{1}{1 - \frac{w-a}{z-a}} = -\frac{1}{z - a} \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{w - a}{z - a} \right)^k,$$

la convergence étant uniforme sur le cercle  $\gamma_{a,r_1}$  puisque que le module de  $(z - a)/(w - a)$  y est constant et strictement inférieur à 1. On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{a,r_1}} \frac{f(w)}{w - z} dz &= -\sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,r_1}} f(w)(w - a)^k dw \right) \frac{1}{(z - a)^{k+1}} \\ &\stackrel{=}{=} \sum_{n=-\infty}^{-1} \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,r_1}} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw \right) (z - a)^n. \end{aligned}$$

En utilisant à nouveau la décomposition en secteurs étoilés et cette fois-ci le théorème de Cauchy, on montre que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , la valeur de l'intégrale

$$\int_{\gamma_{a,\rho}} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$$

est indépendante du choix de  $\rho \in ]r, R[$ . Le théorème suit donc.  $\square$

Le théorème de Laurent va nous permettre de classer les singularités isolées.

**Définition 1.13.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $f$  une fonction de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}$ .

1. On dit que  $a \in \Omega$  est une singularité de  $f$  si  $f$  n'est pas holomorphe en  $a$ .
2. On dit que  $a \in \Omega$  est une singularité isolée de  $f$  si c'est une singularité de  $f$  et s'il existe  $\rho > 0$  tel que  $f$  soit holomorphe dans  $C(a, 0, \rho)$ .

**Définition 1.14** (Classification des singularités isolées). Soit  $a \in \mathbb{C}$ ,  $\rho > 0$  et  $f \in \mathbf{H}(C(a, 0, \rho))$ . On considère le développement en série de Laurent de  $f$  dans la couronne  $C(a, 0, \rho)$

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-a)^n.$$

On dit que :

1.  $f$  admet en  $a$  une singularité fictive ou éliminable si  $c_n = 0$  pour tout  $n < 0$  ; cela signifie que  $f$  se prolonge par continuité en  $a$ , la limite de  $f$  en  $a$  étant  $c_0$ , et si on pose  $f(a) = c_0$ , on a en fait prolongé  $f$  en une fonction holomorphe dans  $D(a, \rho)$  (c'est évident par les propriétés générales des séries entières) ;
2.  $f$  admet en  $a$  un pôle d'ordre  $m \in \mathbb{N}^*$  si  $c_n = 0$  pour  $n < -m$  et  $c_{-m} \neq 0$  ;
3.  $f$  admet en  $a$  une singularité essentielle s'il n'existe pas d'entier  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $c_n = 0$  pour  $n < -m$ .

On définit également la notion d'ordre d'un zéro d'une fonction holomorphe.

**Définition 1.15.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $f \in \mathbf{H}(\Omega)$ ,  $a \in \Omega$ . On dira que  $f$  admet en  $a$  un zéro d'ordre  $m \in \mathbb{N}^*$  si

$$f^{(k)}(a) = 0 \text{ pour } 0 \leq k \leq m-1 \text{ et } f^{(m)}(a) \neq 0.$$

Si on considère le développement en série entière de  $f$  au voisinage de  $a$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(a)(z-a)^n,$$

alors  $a$  est un zéro d'ordre  $m$  pour  $f$  si et seulement si

$$c_0(a) = \dots = c_{m-1}(a) = 0 \text{ et } c_m(a) \neq 0.$$

On parle aussi de zéro simple (ordre 1), double (ordre 2), etc...

On peut caractériser simplement l'ordre d'un zéro ou d'une singularité isolée. Le théorème suivant est une conséquence immédiate du théorème 1.7 pour la première partie et du théorème de Laurent pour les deux parties suivantes.

**Théorème 1.13.** *Soit  $a \in \mathbb{C}$  et  $\rho > 0$ .*

1. *On suppose que  $f \in \mathbf{H}(D(a, \rho))$ , alors  $f$  admet en  $a$  un zéro d'ordre  $m \in \mathbb{N}^*$  si et seulement si il existe  $c \in \mathbb{C}$ ,  $c \neq 0$  tel que*

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{(z - a)^m} = c.$$

*A noter que cette constante  $c$  est alors nécessairement le coefficient  $c_m$  du développement en série entière de  $f$  dans  $D(a, \rho)$ .*

2. *On suppose que  $f \in \mathbf{H}(C(a, 0, \rho))$ , alors  $f$  admet en  $a$  un pôle d'ordre  $m \in \mathbb{N}^*$  si et seulement si il existe  $c \in \mathbb{C}$ ,  $c \neq 0$ , tel que*

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^m f(z) = c.$$

*A noter que  $c$  est alors nécessairement le coefficient  $c_{-m}$  du développement en série de Laurent de  $f$  dans  $C(a, 0, \rho)$ .*

3. *On suppose que  $f \in \mathbf{H}(C(a, 0, \rho))$ , alors  $f$  admet en  $a$  une singularité éliminable si et seulement si il existe  $c \in \mathbb{C}$  tel que*

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c.$$

*A noter que  $c$  est alors nécessairement le coefficient  $c_0$  du développement en série de Laurent de  $f$  dans  $C(a, 0, \rho)$  qui est en fait un développement en série entière dans  $D(a, \rho)$ .*

4. *On suppose que  $f \in \mathbf{H}(C(a, 0, \rho))$ , alors  $f$  admet en  $a$  une singularité essentielle si et seulement si la limite*

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z)$$

*n'existe pas.*

**Corollaire 1.6.** *On considère deux fonctions  $f$  et  $g$  holomorphes dans une couronne de la forme  $C(a, 0, \rho)$ ,  $\rho > 0$ .*

1. *La fonction  $f$  a un pôle d'ordre  $m \in \mathbb{N}^*$  en  $a$  si et seulement si  $1/f$  a un zéro d'ordre  $m$  en  $a$ .*
2. *On suppose que  $f$  a un pôle d'ordre  $m \in \mathbb{N}^*$  en  $a$ . Alors,  $fg$  admet en  $a$*

- (i) un pôle d'ordre  $m + k$  si  $g$  admet en  $a$  un pôle d'ordre  $k$ ,
- (ii) un pôle d'ordre  $m$  si  $g(a) \neq 0$ ,
- (iii) un pôle d'ordre  $m - k$  si  $g$  admet en  $a$  un zéro d'ordre  $k < m$ ,
- (iv) une singularité éliminable si  $g$  admet en  $a$  un zéro d'ordre  $k \geq m$ , en particulier, si  $k > m$ ,  $fg$  admet en  $a$  un zéro d'ordre  $k - m$ .

**Définition 1.16** (Fonction méromorphe). Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $f$  une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}$ . Si  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$  sauf en des points isolés où elle admet des pôles et pas de singularité essentielle, on dit que  $f$  est méromorphe dans  $\Omega$ .

Pour de telles fonctions, on définit une notion attachée à chaque pôle et qui va révéler son importance dans le théorème suivant : celle de résidu.

**Définition 1.17.** Soit  $a \in \mathbb{C}$  et une fonction  $f$  holomorphe dans  $C(a, 0, r)$  pour  $r > 0$  donné. On considère le développement de  $f$  en série de Laurent dans  $C(a, 0, r)$

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n.$$

On appelle résidu de  $f$  en  $a$ , et on note  $\text{Rés}(f, a)$ , le coefficient  $c_{-1}$  de  $(z - a)^{-1}$  dans le développement précédent.

Le théorème des résidus est le théorème essentiel de ce cours. Il découle de la formule de Cauchy, du théorème de Cauchy et de l'exercice 1.9,

**Théorème 1.14** (Théorème des résidus). Soit  $\Omega$  un ouvert étoilé de  $\mathbb{C}$ ,  $f$  une fonction méromorphe dans  $\Omega$ , ayant un nombre fini de pôles  $a_1, \dots, a_k$ . On considère un chemin  $\gamma$  fermé, orienté,  $C^1$  par morceaux, entièrement contenu dans  $\Omega$  et ne passant par aucun des  $a_l$ ,  $l = 1, \dots, k$ . Alors,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{l=1}^k n(\gamma, a_l) \text{Rés}(f, a_l).$$

**Remarque 1.8.**

- Le Théorème des résidus est vrai sans supposer que  $f$  admet un nombre fini de pôles dans  $\Omega$  car il y aura toujours un nombre fini de pôles dans l'intérieur de  $\Omega$  (les singularités de  $f$  ne peuvent pas s'accumuler dans  $\Omega$  du fait que  $f$  est méromorphe sur  $\Omega$ ).
- Le Théorème des résidus est également vrai dans un ouvert quelconque si on suppose que le chemin  $\gamma$  et son intérieur sont entièrement contenus dans  $\Omega$ .

Etant donnée une fonction méromorphe, le calcul des résidus en ses pôles est donc la seule chose dont on ait besoin pour calculer son intégrale sur des parcours fermés. Le calcul d'une série de Laurent est parfois difficile. Cependant, un peu de réflexion permet de trouver des façons simples de calculer ces résidus.

**Remarque 1.9.** Soit  $a \in \mathbb{C}$  et  $f$  une fonction holomorphe dans  $C(a, 0, r)$  pour  $r > 0$  donné.

1. Si  $f$  admet en  $a$  une singularité éliminable, alors  $f$  se prolonge en une fonction holomorphe dans  $D(a, r)$  et se développe donc en série entière dans  $D(a, r)$  ; tous les coefficients  $c_n$ ,  $n < 0$ , de la série de Laurent de  $f$  dans  $C(a, 0, r)$  sont nuls, le résidu de  $f$  en  $a$  est nul.
2. Si  $f$  admet en  $a$  un pôle d'ordre  $k > 0$ , le développement en série de Laurent de  $f$  dans  $C(a, 0, r)$  s'écrit

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{+\infty} c_n (z-a)^n ;$$

la fonction  $g(z) = (z-a)^k f(z)$  se prolonge en une fonction holomorphe dans  $D(a, r)$ , dont le développement en série entière dans  $D(a, r)$  (par unicité de ce développement) est donné par

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n-k} (z-a)^n .$$

Le coefficient  $c_{-1}$  est donc le coefficient de  $(z-a)^{k-1}$  dans ce développement, et on a donc

$$\text{Rés}(f, a) = \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1} g}{\partial z^{k-1}}(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} ((z-a)^k f(z)) .$$

A noter que dans le cas  $k = 1$ , la fonction  $f$  s'écrit sous la forme  $f(z) = g(z)/h(z)$  où  $g$  et  $h$  sont holomorphes dans  $D(a, r)$ ,  $h$  admet en  $a$  un zéro d'ordre 1 et  $g$  ne s'annule pas en  $a$ , et le résidu de  $f$  en  $a$  s'écrit donc

$$\text{Rés}(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)} .$$

## 1.5 Calculs d'intégrales par la méthode des résidus

Un premier type d'intégrales se calcule très simplement à l'aide du théorème des résidus :

**Premier type** Soit  $R(\sin t, \cos t)$  une fraction rationnelle sans singularité, pour calculer

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt ,$$



on pose

$$z = e^{it}, \quad dz = ie^{it} dt = iz dt, \quad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right),$$

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right),$$

on note alors

$$f(z) = R \left( \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \right) \frac{1}{iz}.$$

Par hypothèse sur  $R$ ,  $f$  n'a pas de singularité sur le cercle unité. De plus, c'est une fraction rationnelle en  $z$ , elle est donc méromorphe dans  $\mathbb{C}$ . On a donc

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt = \int_{\gamma_{0,1}} f(z) dz = 2i\pi \sum_{z \text{ pôle de } f, |z| < 1} \text{Rés}(f, z).$$

Commençons par énoncer et démontrer les trois lemmes de Jordan. Les deux derniers seront utiles pour calculer deux autres types d'intégrales. Le premier lemme est simplement donné ici par souci de complétude mais nous ne l'utiliserons pas. Il sert pour un quatrième type d'intégrale qui n'est à mon avis pas très naturel et que nous ne traiterons pas dans ce cours.

**Notations.** Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $R > 0$  et  $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi$ . Pour  $r > 0$ , on considère  $\gamma_{z_0, r, \theta_1, \theta_2}$  l'arc de cercle de centre  $z_0$ , de rayon  $r$  et d'arguments compris entre  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , paramétré par

$$\gamma_{z_0, r, \theta_1, \theta_2}(\theta) = z_0 + re^{i\theta}, \quad \theta \text{ variant de } \theta_1 \text{ à } \theta_2.$$

On considère aussi les domaines

$$S = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < R, \theta_1 < \arg z < \theta_2\},$$

$$S' = \{z \in \mathbb{C}; |z| > R, \theta_1 < \arg z < \theta_2\}.$$

**Lemme 1.3.** Soit  $f$  une fonction définie et continue sur  $S$  telle que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \alpha,$$

alors

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_{z_0, r, \theta_1, \theta_2}} f(z) dz = i(\theta_2 - \theta_1)\alpha.$$

**Preuve.**

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{z_0, r, \theta_1, \theta_2}} f(z) dz - i(\theta_2 - \theta_1)\alpha &= i \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(z_0 + re^{i\theta}) re^{i\theta} d\theta - i \int_{\theta_1}^{\theta_2} \alpha d\theta \\ &= i \int_{\theta_1}^{\theta_2} (f(z_0 + re^{i\theta})(z - z_0) - \alpha) d\theta. \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Par hypothèse, il existe  $\eta > 0$  tel que, pour  $|z - z_0| < \eta$ , on ait

$$|f(z)(z - z_0) - \alpha| < \varepsilon.$$

Il suit que pour  $0 < r < \eta$

$$\left| \int_{\gamma_{z_0, r, \theta_1, \theta_2}} f(z) dz - i(\theta_2 - \theta_1)\alpha \right| < (\theta_2 - \theta_1)\varepsilon.$$

D'où le résultat. □

**Lemme 1.4.** *Soit  $f$  une fonction définie et continue sur  $S'$  telle que*

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} zf(z) = \beta,$$

alors

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_{z_0, r, \theta_1, \theta_2}} f(z) dz = i(\theta_2 - \theta_1)\beta.$$

**Preuve.** On remarque que, pour  $z \neq 0$ ,

$$(z - z_0)f(z) = \left(1 - \frac{z_0}{z}\right)zf(z)$$

et donc

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} (z - z_0)f(z) = \beta.$$

Le reste de la démonstration est analogue à celle du lemme 1.3. □

**Corollaire 1.7.** *Une conséquence immédiate du lemme 1.4 est le résultat suivant. Soit  $P$  et  $Q$  deux polynômes en  $z$ , avec  $d^\circ Q \geq d^\circ P + 2$ , alors*

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_{0, r, 0, \pi}} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0.$$

Le troisième lemme est plus subtil.

**Lemme 1.5.** *Soit  $f$  définie et continue sur  $C(0, R, +\infty) \cap \{\operatorname{Im} z \geq 0\}$  pour  $R > 0$  donné. On suppose que  $f(z) \rightarrow 0$  lorsque  $|z| \rightarrow +\infty$ . Alors,*

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_{0, r, 0, \pi}} f(z)e^{iz} dz = 0.$$

C'est une conséquence de l'inégalité de Jordan :

**Lemme 1.6** (Inégalité de Jordan). *Si  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , alors*

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin \theta}{\theta} \leq 1.$$

**Preuve.** La démonstration est directe. On considère la fonction

$$g(\theta) = \sin \theta - \frac{2}{\pi} \theta.$$

Sa dérivée

$$g'(\theta) = \cos \theta - \frac{2}{\pi}$$

est positive pour  $0 \leq \theta \leq \arccos(2/\pi)$  et négative pour  $\arccos(2/\pi) \leq \theta \leq \pi/2$ . De plus  $g$  s'annule en 0 et  $\pi/2$ , il suit que  $g \geq 0$  sur  $[0, \pi/2]$ . L'autre inégalité est bien connue et se démontre de façon analogue.  $\square$

**Preuve du lemme 1.5.** On commence par paramétrer l'intégrale :

$$z = re^{i\theta} = r \cos \theta + i \sin \theta$$

où  $\theta$  varie de 0 à  $\pi$  ;

$$\int_{\gamma_{0,r,0,\pi}} f(z) e^{iz} dz = \int_0^\pi f(re^{i\theta}) e^{ir \cos \theta - r \sin \theta} i r e^{i\theta} d\theta.$$

On peut estimer son module de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_{0,r,0,\pi}} f(z) e^{iz} dz \right| &\leq \int_0^\pi |f(re^{i\theta}) e^{ir \cos \theta} e^{-r \sin \theta} i r e^{i\theta}| d\theta \\ &= \int_0^\pi |f(re^{i\theta})| e^{-r \sin \theta} r d\theta \\ &\leq \left( \sup_{|z|=r, \operatorname{Im} z \geq 0} |f(z)| \right) r \int_0^\pi e^{-r \sin \theta} d\theta. \end{aligned}$$

D'une part, par hypothèse,

$$\left( \sup_{|z|=r, \operatorname{Im} z \geq 0} |f(z)| \right) \rightarrow 0 \text{ lorsque } r \rightarrow +\infty.$$

D'autre part, on peut découper la dernière intégrale en deux pour utiliser l'inégalité de Jordan :

$$r \int_0^\pi e^{-r \sin \theta} d\theta = r \int_0^{\pi/2} e^{-r \sin \theta} d\theta + r \int_{\pi/2}^\pi e^{-r \sin \theta} d\theta,$$

en effectuant le changement de variables  $u = \pi - \theta$ , on obtient

$$r \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-r \sin \theta} d\theta = r \int_0^{\pi/2} e^{-r \sin u} du$$

et enfin, en utilisant l'inégalité de Jordan,

$$r \int_0^{\pi/2} e^{-r \sin \theta} d\theta \leq r \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2r}{\pi} \theta} d\theta = r \left[ -\frac{\pi}{2r} e^{-\frac{2r}{\pi} \theta} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} (1 - e^{-r}) \leq \frac{\pi}{2}.$$

D'où le lemme. □

On utilise ces lemmes pour calculer les deux types d'intégrales suivants.

**Deuxième type** On considère  $P$  et  $Q$  deux polynômes en  $z$  avec  $d^\circ Q \geq d^\circ P + 2$  et  $Q$  n'ayant pas de zéro sur l'axe réel, alors

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx &= 2i\pi \sum_{z \text{ zéro de } Q, \operatorname{Im} z > 0} \operatorname{Rés} \left( \frac{P}{Q}, z \right) \\ &= -2i\pi \sum_{z \text{ zéro de } Q, \operatorname{Im} z < 0} \operatorname{Rés} \left( \frac{P}{Q}, z \right). \end{aligned}$$

Le chemin utilisé pour obtenir ce résultat est l'intervalle  $[-R, R]$  parcouru de gauche à droite, suivi de  $\gamma_{0,R,0,\pi}$  (pour la deuxième égalité, on remplace  $\gamma_{0,R,0,\pi}$  par  $\gamma_{0,R,\pi,2\pi}$  parcouru en sens indirect), pour  $R$  tendant vers  $+\infty$ . Le théorème des résidus et le deuxième lemme de Jordan donnent le résultat.

**Troisième type** On considère  $f$  une fonction holomorphe dans le demi-plan  $\{\operatorname{Im} z \geq 0\}$ , sauf en un nombre fini de points où elle admet des pôles. On suppose de plus que  $f(z) \rightarrow 0$  lorsque  $|z| \rightarrow +\infty$ . Si  $f$  n'a pas de point singulier sur l'axe réel et si  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ , ou si l'intégrale impropre de  $-\infty$  à  $+\infty$  de  $f(x)e^{ix}$  converge, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix} dx = 2i\pi \sum_{\zeta \text{ pôle de } f, \operatorname{Im} \zeta > 0} \operatorname{Rés} (f(z)e^{iz}, \zeta).$$

Le chemin utilisé est le même que pour le deuxième type. Le théorème des résidus et le troisième lemme de Jordan donnent le résultat.

## 1.6 Notions intuitives sur les fonctions multi-valuées

Nous avons vu qu'il existe deux types de singularités isolées pour une fonction : les pôles et les singularités essentielles (les singularités éliminables n'étant pas de véritables singularités). Certaines fonctions ont une structure plus compliquée et présentent des

singularités appelées points de branchement. Ce sont des fonctions multivaluées, ayant plusieurs déterminations possibles, et un point de branchement est un point où différentes déterminations se rejoignent.

**Définition 1.18.** *On appellera détermination d'une fonction multi-valuées un choix de valeurs sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$  qui définit une véritable fonction de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}$ .*

Un exemple naturel d'une telle structure apparaît avec la fonction argument.

### 1.6.1 L'argument

On a vu que pour  $z \in \mathbb{C}$ , l'argument de  $z$  est défini seulement modulo  $2\pi$ . Lorsqu'on veut utiliser la fonction argument, on doit donc choisir une détermination de cette fonction, par exemple en disant que c'est l'angle orienté formé par l'axe  $Ox$  et le segment  $Oz$ , dont la valeur est dans  $[0, 2\pi[$ . Ce type de détermination a un sens pour  $z \neq 0$  dans  $\mathbb{C}$ , plus précisément, pour tout  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $z_0 \neq 0$ , on peut trouver un voisinage de  $z_0$  dans lequel il existe une détermination continue de l'argument. Donnons des exemples simples de cette situation :

- $z_0 \notin \mathbb{R}$ , on peut prendre un disque de centre  $z_0$  et de rayon  $R < |\text{Im } z_0|$ , alors la détermination ci-dessus est continue sur ce disque.
- $z_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ , on prend un disque de centre  $z_0$  et de rayon  $R < z_0$ , alors si on définit l'argument dans ce disque comme l'angle orienté formé par l'axe  $Ox$  et le segment  $Oz$ , dont la valeur est dans  $] -\pi/2, \pi/2[$ , cette détermination est continue sur le disque.

**Théorème 1.15.** *Soit  $V$  un voisinage de 0 dans  $\mathbb{C}$ . On ne peut pas trouver de détermination de l'argument sur  $V \setminus \{0\}$  qui soit continue.*

**Preuve.** Il existe  $r > 0$  assez petit tel que le cercle  $\gamma_r$  soit contenu dans  $V \setminus \{0\}$ . Soit  $f$  une détermination de l'argument sur  $V \setminus \{0\}$ , on a  $f(\gamma_r(0)) = \theta_0$  et nécessairement pour tout  $\theta \in ]0, 2\pi[$ ,  $f(\gamma_r(\theta)) = \theta_0 + \theta$  et lorsque  $\theta \rightarrow 2\pi$ , par continuité de  $f$ , il suit que  $f(\gamma_r(0)) = \theta_0 + 2\pi$ , ce qui est absurde.  $\square$

Le phénomène qui apparaît dans la preuve du théorème s'appelle la **monodromie**. Le point 0 est un point de branchement pour l'argument. Si on veut effectuer une représentation complète de la fonction argument, son graphe aura la forme d'une hélice infinie tournant autour de l'axe à la verticale de 0. Il s'agit du graphe d'une fonction ayant en chaque point une infinité de valeurs (et en 0 l'ensemble des valeurs est non dénombrable). On parle de fonction multivaluée.

Les plus grands ouverts de  $\mathbb{C}$  sur lesquels on peut définir une détermination continue de l'argument sont de la forme  $\mathbb{C} \setminus \Delta$  où  $\Delta$  est une demi-droite partant de l'origine.

**Définition 1.19.** *La détermination principale de l'argument est son unique détermination continue sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$  dont la valeur en 1 est 0.*

A noter que l'argument est une fonction multivaluée à valeurs réelles, donc ses déterminations ne sont en fait holomorphes nulle part.

## 1.6.2 Le logarithme

Il est défini comme la fonction réciproque de l'exponentielle. Pour  $z = x + iy$ , on voit que

$$e^z = e^x e^{iy},$$

ainsi,  $|e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}$  et  $\arg(e^z) = y = \operatorname{Im}(z)$ . Le logarithme est donc naturellement défini de la façon suivante :

$$\log z = \log |z| + i \arg z.$$

Il s'agit d'une fonction multivaluée puisque sa partie réelle est une fonction usuelle continue sur  $\mathbb{C}$  et sa partie imaginaire est la fonction argument.

A noter que toute détermination continue du logarithme est en fait holomorphe. Cela vient du résultat suivant, dont la preuve est identique à celle du cas réel :

**Proposition 1.10.** *Soit  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $\mathbb{C}$  et  $f \in \mathbf{H}(U)$ . Si  $f : U \rightarrow V$  est bijective et si  $f'$  ne s'annule pas dans  $U$ , alors  $f^{-1} \in \mathbf{H}(V)$  et pour tout  $z \in V$*

$$(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))},$$

ou encore, pour tout  $z \in U$ ,

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}.$$

La détermination principale de l'argument donne une détermination du logarithme qu'on appelle également sa détermination principale.

**Définition 1.20** (Détermination principale du logarithme). *On appelle détermination principale du logarithme son unique détermination sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$  telle que  $\log(1) = 0$ . C'est une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ .*

Le développement en série entière de la détermination principale du logarithme au voisinage de 1 est donné par la série entière usuelle

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n},$$

dont le rayon de convergence est 1, c'est-à-dire la distance de 1 au point de branchement 0.

**Remarque 1.10.** *On voit que 0 est une singularité de la détermination principale du logarithme (et d'ailleurs de toute détermination). On pourrait se demander s'il s'agit d'une singularité essentielle ou d'un pôle. Du fait de la monodromie du logarithme, pour tout  $r > 0$ , il n'existe pas de détermination du logarithme qui soit continue (et a fortiori holomorphe) dans la couronne  $C(0, 0, r)$ . On voit donc que 0 n'est pas une singularité isolée et la classification que nous avons vue ne s'applique pas.*

### 1.6.3 La racine carrée

Pour  $z = re^{i\theta}$ , on a  $z^2 = r^2 e^{2i\theta}$ , la racine carrée d'un nombre complexe a donc deux déterminations naturelles

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} e^{i \arg(z)/2} \text{ et } \sqrt{z} = -\sqrt{|z|} e^{i \arg(z)/2}.$$

qui sont toutes deux des fonctions multivaluées.

On voit qu'aucune de ces deux déterminations ne peut être continue autour de 0, en effet, prenons par exemple la première,

$$\sqrt{\gamma_r(0)} = \sqrt{r}$$

et pour  $\theta \in ]0, 2\pi[$

$$\sqrt{\gamma_r(\theta)} = \sqrt{r} e^{i\theta/2},$$

d'où, lorsque  $\theta \rightarrow 2\pi$ , on trouve

$$\sqrt{\gamma_r(0)} = \sqrt{r} = -\sqrt{r}.$$

On peut faire la même chose avec l'autre détermination. Le point 0 est un point de branchement pour la multifonction  $\sqrt{\cdot}$ . Cette multifonction est plus simple que le logarithme ou l'argument dans la mesure où elle n'a que deux déterminations (deux branches). Cela vient du fait qu'ajouter  $4k\pi$  à l'argument de  $z$  ne change pas la valeur de  $e^{i \arg(z)/2}$ .

A noter que la racine carrée peut s'écrire

$$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2} \log z} \tag{1.5}$$

et toute l'indétermination de la fonction logarithme, qui est entièrement contenue dans sa partie imaginaire, se réduit au choix entre deux déterminations pour la racine carrée du fait de l'exponentielle.

D'après l'expression (1.5), les déterminations continues de la racine carrées sont obtenues à partir des déterminations continues du logarithme et sont donc des fonctions holomorphes, comme composées de fonctions holomorphes.

## 1.7 Exercices

**Exercice 1.1.** *En utilisant la caractérisation de Cauchy-Riemann, montrer que l'exponentielle est holomorphe sur  $\mathbb{C}$ .*

**Exercice 1.2.** *Dans quel ouvert de  $\mathbb{C}$  les fonctions suivantes sont-elles holomorphes (on justifiera les réponses) :*

$$f_1(z) = e^{1/(z-1)}, \quad f_2(z) = \bar{z}, \quad f_3(z) = \frac{z+i}{(z^2+1)(z-1)(z+4)}.$$

**Exercice 1.3.** *Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction à valeurs réelles non constante. Alors  $f \notin \mathbf{H}(\Omega)$ .*

**Exercice 1.4.** *Dans quel domaine de  $\mathbb{C}$  les fonctions suivantes sont-elles holomorphes? Calculer leur dérivée là où elles sont holomorphes.*

$$f(z) = z^n, \quad f(z) = \cos z + i \sin(e^z), \quad f(z) = \text{Arg}(z).$$

**Exercice 1.5.** *Calculer l'intégrale*

$$\int_{\gamma} \cos z \, dz$$

où :

1.  $\gamma$  est le segment  $[-R, R]$  parcouru dans le sens croissant ;
2.  $\gamma$  est le demi-cercle de centre 0 et de rayon  $R$  situé dans le demi-plan  $\{\text{Im } z > 0\}$  et orienté dans le sens direct ;
3.  $\gamma$  est la réunion des deux parcours précédents.

**Exercice 1.6.** *Calculer*

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz$$

dans les cas suivants :

- $\gamma = \{z = x + iy, y = x^2, 0 \leq x \leq 2\}$ ,  $f(z) = \bar{z}$  ;
- $\gamma = \{z = x + iy, y = x^2, 0 \leq x \leq 2\}$ ,  $f(z) = z^3$  ;
- $\gamma = [-1 - i, 1 + i]$ ,  $f(z) = |z|$  ;

*l'orientation étant prise dans le sens des  $x$  croissants.*

**Exercice 1.7.** *Soit  $\gamma$  la partie de la spirale exponentielle  $\{r = e^{\theta}\}$  comprise entre  $\theta = -2\pi$  et  $\theta = 2\pi$ , orientée dans le sens direct.*



1. Représenter  $\gamma$ .

2. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{\gamma} z^2 dz; \int_{\gamma} |z| dz, \int_{\gamma} \bar{z} dz.$$

**Exercice 1.8.** Soit  $\gamma_{0,2}$  le cercle de centre 0 et de rayon 2 parcouru une fois en sens direct. Donner la valeur des intégrales suivantes, sans calcul, mais en disant quel théorème on utilise :

$$\int_{\gamma_{0,2}} \frac{1}{z} dz, \int_{\gamma_{0,2}} \frac{1}{z-3} dz, \int_{\gamma_{0,2}} \frac{1}{z(z-3)} dz.$$

**Exercice 1.9.** Soit  $\gamma_{0,r}$  le cercle de centre 0 et de rayon  $r > 0$  parcouru une fois en sens direct. Calculer pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_{\gamma_{0,r}} \frac{1}{z^n} dz.$$

**Exercice 1.10.** Soit  $\gamma_{0,1}$  le cercle de centre 0 et de rayon 1 parcouru une fois en sens direct. Déterminer la valeur des intégrales suivantes :

$$\int_{\gamma_{0,1}} \frac{z^2}{z+1/2} dz, \int_{\gamma_{0,1}} \frac{1}{z(z-2)} dz, \int_{\gamma_{0,1}} \frac{1}{(z-2)(z+3)} dz.$$

**Exercice 1.11** (Formule de Cauchy). Dans cet exercice, on utilise uniquement la formule de Cauchy pour calculer les intégrales suivantes. Pour chaque intégrale, dire à quelle fonction et dans quel ouvert étoilé on applique la formule de Cauchy. Soit  $\gamma_{1,3}$  le cercle de centre 1 et de rayon 3 parcouru une fois en sens direct :

$$I_1 = \int_{\gamma_{1,3}} \frac{e^z}{z} dz, I_2 = \int_{\gamma_{1,3}} \frac{1}{z(z+4)} dz, I_3 = \int_{\gamma_{1,3}} \frac{z}{z-2} dz.$$

**Exercice 1.12.** Soit la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)}.$$

Développer  $f$  en série entière dans  $D(0,1)$  puis en série de Laurent dans  $C(0,1,2)$  et dans  $C(0,2,+\infty)$ .

**Exercice 1.13.** Développer en série de Laurent dans  $\mathbb{C}^*$  la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z} + (z-1)(z+4).$$

**Exercice 1.14.** Soit la fonction  $f(z) = 1/z$ .

1. Développer  $f$  en série entière dans le disque  $D(2i, 2)$ .
2. Développer  $f$  en série de Laurent dans la couronne  $C(2i, 2, +\infty)$ .

**Exercice 1.15.** Soit la fonction

$$f(z) = \frac{(z+1)(z-2)}{(z^2-4)(z-1)^2}.$$

1. Quelles sont les singularités de  $f$  et leurs natures.
2. Déterminer les résidus de  $f$  en ses singularités.
3. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{\gamma_{0,3}} f(z)dz, \quad \int_{\gamma_{1,2}} f(z)dz, \quad \int_{\gamma_{2i,2}} f(z)dz.$$

**Exercice 1.16.** On considère la fonction

$$f(z) = \frac{z-1}{(z^2-1)^2(z-2)}.$$

1. Quelles sont les singularités de  $f$  et leurs natures?
2. Soit  $\gamma_{2i,4}$  le cercle de centre  $2i$  et de rayon  $4$  parcouru une fois en sens direct et  $\gamma_{0,\sqrt{2}}$  le cercle de centre  $0$  et de rayon  $\sqrt{2}$  parcouru une fois en sens direct. Calculer

$$\int_{\gamma_{2i,4}} f(z)dz \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_{0,\sqrt{2}}} f(z)dz.$$

**Exercice 1.17.** Soit la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{z}{(z+1)^2(z+2)}.$$

1. Donner les singularités de  $f$  et préciser leur nature.
2. Calculer les résidus de  $f$  en ses singularités.
3. Calculer les intégrales suivantes

$$\int_{\gamma_{i,5}} f(z)dz, \quad \int_{\gamma_{0,3/2}} f(z)dz, \quad \int_{\gamma_{3,1}} f(z)dz.$$

**Exercice 1.18.** Soit  $a > 0$ ,  $b > 0$ .

1. Définir un chemin  $\gamma$  dont l'image est l'ellipse

$$\frac{(\operatorname{Re} z)^2}{a^2} + \frac{(\operatorname{Im} z)^2}{b^2} = 1$$

parcourue dans le sens direct.

2. Donner sans calcul la valeur de

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z}.$$

3. Montrer en utilisant la question précédente que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = \frac{2\pi}{ab}.$$

**Exercice 1.19.** Calculer les intégrales suivantes :

$$\bullet \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin \theta}, \quad \bullet \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2 + \cos \theta)^2}.$$

**Exercice 1.20.** Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{i + \cos \theta} d\theta, \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{(\cos \theta)^2 - (\sin \theta)^2 + 2i \cos \theta \sin \theta} d\theta.$$

**Exercice 1.21.** On considère  $P$  et  $Q$  deux polynômes avec  $d^\circ P \leq d^\circ Q - 2$ . On suppose de plus que  $Q$  n'a pas de zéro sur l'axe réel. Pour  $r > 0$ , on note  $\Gamma_r$  la partie contenue dans le demi-plan  $\operatorname{Im} z > 0$  du cercle de centre 0 et de rayon  $r$  parcourue dans le sens positif. Calculer

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_{0,r}} \frac{P(z)}{Q(z)} dz,$$

en déduire une expression de la valeur de

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{P(z)}{Q(z)} dz.$$

**Exercice 1.22.** Calculer les intégrales :

$$\bullet \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}, \quad \bullet \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{1+x+x^2} dx.$$

**Exercice 1.23.** Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{(x^2 + 1)^2} dx.$$



# Chapitre 2

## Calcul vectoriel

### 2.1 Champs de vecteurs et opérateurs différentiels fondamentaux

#### 2.1.1 Ouverts de $\mathbb{R}^3$ et champs de vecteurs

Les ouverts de  $\mathbb{R}^3$  se définissent de façon analogue aux ouverts de  $\mathbb{C}$ .

**Définition 2.1** (Boule ouverte). Soit  $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  et  $r > 0$ , on appelle *boule ouverte* de centre  $M_0$  et de rayon  $r$  l'ensemble

$$B(M_0, r) = \{M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \|M - M_0\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < r\}.$$

**Définition 2.2** (Voisinage). Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}^3$  et  $M_0 \in A$ , on dit que  $A$  est un *voisinage* de  $M_0$  s'il existe  $r > 0$  tel que  $B(M_0, r) \subset A$ .

**Définition 2.3** (Ouvert). On appelle *ouvert* de  $\mathbb{R}^3$  une partie de  $\mathbb{R}^3$  qui est voisinage de chacun de ses points.

On va maintenant définir la notion de champ de vecteurs sur un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ .

**Définition 2.4.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ , on appelle **champ de vecteur** sur  $\Omega$  une application

$$V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

C'est-à-dire qu'en chaque point  $(x, y, z)$  de  $\Omega$  on considère un vecteur  $V(x, y, z)$ .

On parlera aussi de **champ scalaire** sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  pour désigner une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Exemples.** Dans l'ouvert

$$\Omega = \{(x, y, z); x^2 + y^2 > 1\},$$

on considère :

## 1. le champ de vecteurs

$$U(x, y, z) = \left( \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 0 \right).$$

Il décrit le champ des vitesses d'un ensemble (infini et continu) de particules qui tournent autour de l'axe  $Oz$  à vitesse 1.

## 2. le champ de vecteurs

$$V(x, y, z) = \left( \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right).$$

Il décrit le champ des vitesses d'un ensemble (infini et continu) de particules qui tournent autour de l'axe  $Oz$  à vitesse 1 tout en se translatant à vitesse 1 le long de l'axe  $Oz$ . La vitesse scalaire de chaque particule est  $\sqrt{2}$ .

## 2.1.2 Opérateurs différentiels fondamentaux

### Gradient

On le note grad ou encore  $\nabla$ . On l'applique à un champ scalaire et on obtient un champ de vecteurs. Plus précisément, soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$ . On appelle gradient de  $f$  le champ de vecteurs sur  $\Omega$  défini par

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

L'opérateur gradient est souvent représenté comme un vecteur

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

### Rotationnel

On le note rot. C'est un opérateur qui s'applique à un champ de vecteurs et donne un autre champ de vecteurs. Il agit par produit vectoriel de  $\nabla$  avec le champ de vecteurs. Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  et  $V$  un champ de vecteurs sur  $\Omega$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , le rotationnel de  $V$  est le champ de vecteurs sur  $\Omega$  défini par

$$\text{rot}V = \nabla \wedge V = \left( \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}, \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}, \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right).$$

### Divergence

On note cet opérateur *div*, il agit sur un champ de vecteur et donne un champ scalaire. Son action est par produit scalaire avec  $\nabla$ . Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  et  $V$  un champ de vecteurs sur  $\Omega$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , la divergence de  $V$  est le champ scalaire sur  $\Omega$  défini par

$$\operatorname{div}V = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}.$$

### Laplacien

On le note  $\Delta$ , il agit sur un champ scalaire et donne un champ scalaire. Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  et  $f$  un champ scalaire sur  $\Omega$  de classe  $\mathcal{C}^2$  (i.e. admettant en tout point de  $\Omega$  des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 qui sont toutes continues sur  $\Omega$ ), le Laplacien de  $f$  est défini par

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

### Propriétés

On pourra vérifier sur des exemples bien choisis que la divergence mesure effectivement la façon dont un champ de vecteurs diverge (ou converge) ; un champ de vecteurs qui ne diverge ni ne converge aura une divergence nulle. De même, le rotationnel mesure la rotation d'un champ de vecteurs ; un champ de vecteurs qui ne tourne pas aura un rotationnel nul. On donnera en cours des exemples de champs de vecteurs sans divergence, sans rotationnel et sans divergence ni rotationnel.

On a les identités suivantes :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\nabla f) &= 0, \quad \operatorname{div}(\operatorname{rot}V) = 0, \quad \operatorname{rot}(fV) = \nabla f \wedge V + f \operatorname{rot}V, \\ \operatorname{div}(fV) &= \nabla f \cdot V + f \operatorname{div}V, \quad \nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f \\ \operatorname{div}(V_1 \wedge V_2) &= (\operatorname{rot}V_1) \cdot V_2 - V_1 \cdot (\operatorname{rot}V_2), \\ \Delta(fg) &= f \Delta g + g \Delta f + 2 \nabla f \cdot \nabla g. \end{aligned}$$

### 2.1.3 Potentiels

Pour cette partie, on va travailler sur des ouverts étoilés, dont la définition est similaire à celle que l'on a vue dans  $\mathbb{C}$ .

**Définition 2.5.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ .

1.  $M_0$  un point de  $\Omega$ . On dit que  $\Omega$  est étoilé par rapport à  $M_0$  si pour tout point  $M \in \Omega$ , le segment  $[M_0, M]$  est entièrement contenu dans  $\Omega$ .

2. On dit que  $\Omega$  est étoilé s'il existe un point  $M_0 \in \Omega$  tel que  $\Omega$  soit étoilé par rapport à  $M_0$ .

Sur de tels ouverts, on a une réciproque aux propriétés  $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$  et  $\operatorname{rot} \nabla = 0$ . Sur un ouvert étoilé, si un champ de vecteurs est de rotationnel nul, alors, ce champ de vecteurs est un gradient ; de même si un champ de vecteurs est sans divergence, alors ce champ de vecteurs est un rotationnel.

**Théorème 2.1.** Soit  $\Omega$  un ouvert étoilé de  $\mathbb{R}^3$  et  $V$  un champ de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$ .

1. Si  $\operatorname{rot} V = 0$  dans  $\Omega$ , alors il existe un champ scalaire  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\Omega$  tel que  $V = \nabla f$ . Le champ scalaire  $f$  est appelé potentiel scalaire de  $V$ .
2. Si  $\operatorname{div} V = 0$  dans  $\Omega$ , alors il existe un champ de vecteurs  $A$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\Omega$  tel que  $V = \operatorname{rot} A$ . Le champ de vecteurs  $A$  est appelé potentiel vecteur de  $V$ .

On donne maintenant une méthode de calcul de potentiel scalaire. Cette méthode est a priori "locale", c'est-à-dire que sur un ouvert quelconque, on ne peut pas forcément suivre le type de parcours proposé entre deux points quelconques sans sortir de l'ouvert. Mais on peut toujours avancer "de proche en proche" sur ce type de parcours.

On se place sur  $\Omega$  ouvert étoilé et on considère  $V$  un champ de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$  tel que  $\operatorname{rot} V = 0$ . On note  $V_1, V_2, V_3$  les composantes de  $V$ . On cherche un champ scalaire  $f$  sur  $\Omega$  tel que  $V = \nabla f$ , c'est-à-dire tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = V_1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = V_2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = V_3.$$

On choisit un point de départ dans  $\Omega$  ; on le choisit comme on le souhaite, dans le but de simplifier les calculs. La forme générale des solutions est alors obtenue de la façon suivante (on donne deux formules correspondant à deux ordres différents entre les variables, on peut choisir l'ordre qu'on veut, là encore on choisit ce qui donne le calcul le plus simple) :

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int_{x_0}^x V_1(s, y_0, z_0) ds + \int_{y_0}^y V_2(x, s, z_0) ds \\ &\quad + \int_{z_0}^z V_3(x, y, s) ds + C, \quad C \in \mathbb{R}, \\ &= \int_{z_0}^z V_3(x_0, y_0, s) ds + \int_{x_0}^x V_1(s, y_0, z) ds \\ &\quad + \int_{y_0}^y V_2(x, s, z) ds + K, \quad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$



### 2.1.4 Coordonnées sphériques et cylindriques

Dans cette section, on donne les formes des opérateurs différentiels fondamentaux en coordonnées sphériques et cylindriques.

#### Coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques d'un point  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  sont les nombres  $r > 0$ ,  $\theta \in [0, \pi]$  et  $\varphi \in [0, 2\pi[$  tels que

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

Les vecteurs de base des coordonnées sphériques au point  $M = (x, y, z)$  sont

$$\begin{aligned} e_r &= (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \\ e_\theta &= (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta), \\ e_\varphi &= (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0). \end{aligned}$$

Nous donnons ci-dessous la méthode de calcul et d'autres expressions utiles de ces vecteurs :

$$\begin{aligned} e_r &= \frac{\frac{\partial}{\partial r} \overrightarrow{OM}}{\left\| \frac{\partial}{\partial r} \overrightarrow{OM} \right\|} = \frac{(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)}{\|(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)\|} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \\ &= \frac{1}{r} \overrightarrow{OM} = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right), \\ e_\theta &= \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} \overrightarrow{OM}}{\left\| \frac{\partial}{\partial \theta} \overrightarrow{OM} \right\|} = \frac{(r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta)}{\|(r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta)\|} \\ &= \frac{(r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta)}{r} = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta), \\ e_\varphi &= \frac{\frac{\partial}{\partial \varphi} \overrightarrow{OM}}{\left\| \frac{\partial}{\partial \varphi} \overrightarrow{OM} \right\|} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \overrightarrow{OM} = \frac{(-r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, 0)}{\|(-r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, 0)\|} \\ &= \frac{(-r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, 0)}{r \sin \theta} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \\ &= \left( \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 0 \right). \end{aligned}$$

Un champ de vecteurs  $V$  peut se décomposer sur cette base comme sur celle des coordonnées cartésiennes  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . On notera

$$\begin{aligned} V &= V_1 e_1 + V_2 e_2 + V_3 e_3 \\ &= V_r e_r + V_\theta e_\theta + V_\varphi e_\varphi. \end{aligned}$$

En coordonnées sphériques, les opérateurs différentiels fondamentaux s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} e_\varphi, \\ \operatorname{div} V &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}, \\ \operatorname{rot} V &= \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\varphi) - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \right) e_r + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\varphi) \right) e_\theta, \\ &\quad + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) e_\varphi, \\ \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.\end{aligned}$$

### Coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques d'un point  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  sont les nombres  $r > 0$ ,  $\theta \in [0, 2\pi[$  et  $z \in \mathbb{R}$  tels que

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z,$$

i.e. on décrit  $x$  et  $y$  en coordonnées polaires et on conserve  $z$ . Les vecteurs de base des coordonnées cylindriques sont

$$\begin{aligned}e_r &= (\cos \theta, \sin \theta, 0), \\ e_\theta &= (-\sin \theta, \cos \theta, 0), \\ e_z &= (0, 0, 1).\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}e_r &= \frac{\frac{\partial}{\partial r} \overrightarrow{OM}}{\left\| \frac{\partial}{\partial r} \overrightarrow{OM} \right\|} = \frac{(\cos \theta, \sin \theta, 0)}{\|(\cos \theta, \sin \theta, 0)\|} = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \\ &= \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 0 \right), \\ e_\theta &= \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} \overrightarrow{OM}}{\left\| \frac{\partial}{\partial \theta} \overrightarrow{OM} \right\|} = \frac{(-\sin \theta, \cos \theta, 0)}{\|(-\sin \theta, \cos \theta, 0)\|} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \\ &= \left( \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 0 \right), \\ e_z &= (0, 0, 1).\end{aligned}$$

Un champ de vecteurs  $V$  peut se décomposer sur cette base comme sur celle des coordonnées cartésiennes ou sphériques. On notera

$$V = V_r e_r + V_\theta e_\theta + V_z e_z.$$

En coordonnées cylindriques, les opérateurs différentiels fondamentaux s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} e_z, \\ \operatorname{div} V &= \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}, \\ \operatorname{rot} V &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) e_r + \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) e_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) e_z, \\ \Delta f &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

## 2.2 Courbes et surfaces paramétrées

### 2.2.1 Courbes paramétrées dans $\mathbb{R}^3$

**Définition 2.6.** On appelle courbe paramétrée dans  $\mathbb{R}^3$  la donnée d'une application continue

$$\phi : I \mapsto \mathbb{R}^3, \quad \phi(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

La courbe elle-même est l'image de  $\phi$ . Le paramétrage est  $(I, \phi)$ , il donne une orientation à la courbe, celle correspondant au mouvement de  $\phi(t)$  sur la courbe lorsque  $t$  croît. Si  $\phi$  est dérivable, ce sens de parcours est représenté par le vecteur  $\phi'(t)$ , aussi noté  $\dot{\phi}(t)$ . Pour que l'orientation soit consistante sur la courbe, c'est-à-dire pour que le sens de parcours soit partout le même, il faut choisir un "bon" paramétrage, c'est-à-dire un paramétrage tel que  $\phi'(t)$  ne s'annule pas sur  $I$  ; cela assure que  $\phi(t)$  ne rebrousse pas chemin lors de son parcours.

On peut imaginer qu'une courbe paramétrée décrit le mouvement dans l'espace d'une particule au cours du temps. Dans ce cas, on s'attend à ce que la fonction  $\phi$  soit au moins deux fois dérivable (sauf peut-être en des points où la particule entre en collision avec des obstacles) ; on peut alors parler de la vitesse et de l'accélération de la particule.

**Définition 2.7.** Soit une courbe paramétrée de paramétrage  $(I, \phi)$ , qu'on imagine décrire le mouvement d'une particule au cours du temps.

1. Si  $\phi$  est dérivable, on appelle vecteur vitesse de la particule la dérivée de  $\phi(t)$  :

$$v(t) = \dot{\phi}(t) = \frac{d\phi}{dt}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)).$$

L'intensité de la vitesse (on parle aussi de vitesse scalaire) de la particule est la norme du vecteur vitesse :

$$\|v(t)\| = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}.$$

2. Si  $\phi$  est deux fois dérivable, on appelle vecteur accélération de la particule la dérivée seconde de  $\phi$  :

$$\gamma(t) = \ddot{\phi}(t) = \frac{d^2\phi}{dt^2}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)).$$

L'intensité de l'accélération (on parle aussi d'accélération scalaire) de la particule est la norme du vecteur accélération :

$$\|\gamma(t)\| = \sqrt{(\ddot{x}(t))^2 + (\ddot{y}(t))^2 + (\ddot{z}(t))^2}.$$

## 2.2.2 Surfaces paramétrées

On appelle surface paramétrée dans  $\mathbb{R}^3$  la donnée d'une application  $\psi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ , où  $\mathcal{O}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . La surface elle-même est l'image de  $\psi$  :

$$S = \{\psi(u, v), (u, v) \in \mathcal{O}\}. \quad (2.1)$$

Le paramétrage est  $(\mathcal{O}, \psi)$ , il donne une orientation à  $S$ , c'est-à-dire un vecteur normal, noté  $N$ , en chaque point de  $S$ , donné par

$$N(u, v) = \frac{\partial\psi}{\partial u} \wedge \frac{\partial\psi}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_2}{\partial u} \frac{\partial\psi_3}{\partial v} - \frac{\partial\psi_2}{\partial v} \frac{\partial\psi_3}{\partial u} \\ \frac{\partial\psi_3}{\partial u} \frac{\partial\psi_1}{\partial v} - \frac{\partial\psi_3}{\partial v} \frac{\partial\psi_1}{\partial u} \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial u} \frac{\partial\psi_2}{\partial v} - \frac{\partial\psi_1}{\partial v} \frac{\partial\psi_2}{\partial u} \end{pmatrix}.$$

Pour que l'orientation donnée par le paramétrage soit consistante, c'est-à-dire pour que le vecteur  $N$  pointe partout du même côté de  $S$ , on doit choisir un "bon" paramétrage : tel que  $N$  ne s'annule pas sur  $\mathcal{O}$ .

**Remarque 2.1.** Il existe des surfaces qui en certains points n'admettent pas de bon paramétrage, c'est-à-dire que tout paramétrage de la surface est tel que le vecteur normal est nul, ou encore non défini, en ces points. On dit qu'elles sont singulières en ces points. Par exemple, un cône n'admet pas de bon paramétrage en son sommet ; en ce point le vecteur normal n'est pas défini. Si une surface n'est singulière en aucun point, on dit qu'elle est régulière.

Soit  $S$  une surface orientée paramétrée par  $(\mathcal{O}, \psi)$  et  $p_0 = (x_0, y_0, z_0) = \psi(u_0, v_0)$  un point de  $S$  où le vecteur normal donné par le paramétrage est non nul. Le plan tangent à  $S$  en  $p_0$  est le plan engendré par les vecteurs

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} \text{ et } \frac{\partial \psi}{\partial v}.$$

### 2.2.3 Surfaces implicitement définies

Certaines surfaces sont définies de façon implicites par une équation de la forme  $f(x, y, z) = 0$ . Pour de telles surfaces, on peut trouver en général un vecteur normal sans avoir à définir un paramétrage. Cependant, pour calculer des intégrales sur ces surfaces, il nous faudra tout de même trouver un paramétrage.

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une application  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$ . Soit l'ensemble  $S$  défini par

$$S = \{(x, y, z) \in \Omega; f(x, y, z) = 0\}.$$

Si le vecteur  $\nabla f$  est non nul en tout point de  $S$ , alors  $S$  est une surface régulière et  $\nabla f$  est un vecteur normal à  $S$  en tout point de  $S$ .

## 2.3 Intégrales curvilignes et de surfaces

### 2.3.1 Intégrale d'un champ scalaire le long d'une courbe

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{C}$  une courbe orientée dans  $\Omega$  paramétrée par  $(I, \phi)$ ,  $I = [a, b]$ , et  $f$  un champ scalaire continu sur  $\Omega$ . L'intégrale de  $f$  le long de la courbe  $\mathcal{C}$  est donnée par :

$$\int_{\mathcal{C}} f dl = \int_a^b f(\phi(t)) \|\dot{\phi}(t)\| dt.$$

Ce résultat est indépendant du paramétrage.

En particulier la longueur de la courbe  $\mathcal{C}$  est l'intégrale le long de  $\mathcal{C}$  de la fonction constante égale à 1, i.e.

$$l(\mathcal{C}) = \int_a^b \|\dot{\phi}(t)\| dt.$$

### 2.3.2 Circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{C}$  une courbe orientée dans  $\Omega$  paramétrée par  $(I, \phi)$ ,  $I = [a, b]$ , et  $V$  un champ de vecteurs continu sur  $\Omega$ . La circulation de  $V$  le long de la courbe  $\mathcal{C}$  est donnée par l'intégrale le long de la courbe du produit scalaire de  $V$  avec le vecteur

tangent donné par le paramétrage, modulo un signe dépendant du sens de parcours donné par le paramétrage :

$$\int_{\mathcal{C}} V \cdot dl = \varepsilon \int_a^b V(\phi(t)) \cdot \dot{\phi}(t) dt,$$

où  $\varepsilon = 1$  si le sens de parcours donné par le paramétrage est compatible avec l'orientation de la courbe et  $\varepsilon = -1$  sinon.

Si on note  $V_1, V_2, V_3$  les composantes de  $V$  et  $x(t), y(t), z(t)$  les coordonnées de  $\phi$ , l'intégrale s'écrit

$$\int_{\mathcal{C}} V \cdot dl = \varepsilon \int_a^b (V_1(\phi(t))\dot{x}(t) + V_2(\phi(t))\dot{y}(t) + V_3(\phi(t))\dot{z}(t)) dt.$$

Ce résultat est indépendant du paramétrage.

### 2.3.3 Intégrale d'une fonction sur une surface

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ ,  $S$  une surface orientée contenue dans  $\Omega$ , paramétrée par  $(\mathcal{O}, \psi)$  et  $f$  un champ scalaire continu sur  $\Omega$ . L'intégrale de  $f$  sur  $S$  est donné par

$$\iint_S f \cdot d\sigma = \iint_{\mathcal{O}} f(\psi(u, v)) \|N(u, v)\| du dv.$$

Ce résultat est indépendant du paramétrage.

En particulier, l'aire de  $S$  est l'intégrale sur  $S$  de la fonction constante égale à 1, i.e.

$$\mathcal{A}(S) = \iint_{\mathcal{O}} \|N(u, v)\| du dv.$$

### 2.3.4 Flux d'un champ de vecteurs

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ ,  $S$  une surface orientée contenue dans  $\Omega$ , paramétrée par  $(\mathcal{O}, \psi)$  et  $V$  un champ de vecteurs continu sur  $\Omega$ . Le flux de  $V$  au travers de  $S$  est donné par

$$\begin{aligned} \iint_S V \cdot d\sigma &= \varepsilon \iint_{\mathcal{O}} V(\psi(u, v)) \cdot N(u, v) du dv \\ &= \varepsilon \iint_{\mathcal{O}} (V_1(\psi(u, v)) \cdot N_1(u, v) + V_2(\psi(u, v)) \cdot N_2(u, v) \\ &\quad + V_3(\psi(u, v)) \cdot N_3(u, v)) du dv, \end{aligned}$$

où  $\varepsilon = 1$  si l'orientation donnée par le paramétrage est la même que celle de la surface et  $\varepsilon = -1$  sinon. Ce résultat est indépendant du paramétrage.

## 2.4 Théorèmes de Stokes, Green-Riemann et Ostrogradski

### 2.4.1 Théorème de Stokes

Soit  $\Omega$  un ouvert étoilé de  $\mathbb{R}^3$ ,  $V$  un champ de vecteurs  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$ . Soit dans  $\Omega$  une surface  $S$  régulière, orientée, bornée, dont la frontière  $\partial S$  est entièrement contenue dans  $\Omega$  et constituée d'un nombre fini de courbes fermées,  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, orientées. On suppose les orientations de  $\partial S$  et de  $S$  compatibles (ce qui est donné par la règle du tire-bouchon). Alors on a

$$\int_{\partial S} V \cdot dl = \iint_S \operatorname{rot} V \cdot d\sigma.$$

C'est-à-dire que la circulation de  $V$  le long du bord de  $S$  est égale au flux du rotationnel de  $V$  au travers de  $S$ .

### 2.4.2 Théorème de Green-Riemann

Le théorème de Green-Riemann est le théorème de Stokes dans le cas où  $S$  est contenue dans un plan, on peut alors considérer que toutes les quantités sont définies non pas sur tout l'espace mais dans  $\mathbb{R}^2$  (c'est-à-dire simplement dans le plan contenant  $S$ ).

Soit  $\Omega$  un ouvert étoilé de  $\mathbb{R}^2$ . Soit dans  $\Omega$  un ouvert  $O$  borné, dont la frontière  $\partial O$  est entièrement contenue dans  $\Omega$  et constituée d'un nombre fini de courbes fermées,  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, orientées de façon directe par rapport à  $O$ . Soit  $V = (V_1, V_2)$  un champ de vecteurs  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$ , alors

$$\int_{\partial O} V \cdot dl = \iint_O \left( \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

### 2.4.3 Théorème d'Ostrogradski

Soit  $\Omega$  un ouvert étoilé de  $\mathbb{R}^3$ . Soit dans  $\Omega$  un ouvert  $O$  borné, dont la frontière  $\partial O$  est entièrement contenue dans  $\Omega$  et constituée d'un nombre fini de surfaces fermées,  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, orientées de façon sortante par rapport à  $O$ . Soit  $V$  un champ de vecteurs  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$ . Alors

$$\iint_{\partial O} V \cdot d\sigma = \iiint_O \operatorname{div} V \, dx dy dz.$$

C'est-à-dire que le flux sortant de  $V$  au travers de la frontière de  $O$  est égal à l'intégrale sur  $O$  de la divergence de  $V$ .

## 2.5 Exercices

**Exercice 2.1.** Soit la surface de  $\mathbb{R}^3$  suivante :

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = \sin z, 0 \leq z \leq \pi\}.$$

Donner l'équation du plan tangent à  $S$  au point  $(1, 0, \pi/2)$ .

**Exercice 2.2.** Soit dans  $\mathbb{R}^2$  la courbe fermée  $\mathcal{C}$  définie par

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = \cos \theta e^\theta, y = \sin \theta e^\theta, 0 \leq \theta \leq 4\pi\}$$

orientée dans le sens des  $\theta$  croissants.

1. Représenter  $\mathcal{C}$  graphiquement.
2. Calculer la longueur de  $\mathcal{C}$ .
3. Soit le champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^2$

$$V(x, y, ) = (x, xy).$$

Calculer la circulation de  $V$  le long de  $\mathcal{C}$ .

**Exercice 2.3.** Soit dans  $\mathbb{R}^3$  la courbe  $\mathcal{C}$  définie par

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 9, z = 0, x \geq 0\}$$

orientée dans le sens des  $y$  croissants.

1. Calculer

$$\int_{\mathcal{C}} f \, dl, \text{ où } f(x, y, z) = x + y + e^z.$$

2. Soit le champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^3$

$$V(x, y, z) = (-y + xyz, x + \sin z, xy).$$

Calculer la circulation de  $V$  le long de  $\mathcal{C}$ .

**Exercice 2.4.** Soit le champ de vecteurs dans  $\mathbb{R}^3$  suivant :

$$U(x, y, z) = \left( \frac{y}{1+z^2}, \frac{x}{1+z^2}, \frac{-2xyz}{(1+z^2)^2} \right).$$

1. Calculer son rotationnel.
2. Trouver un champ scalaire  $f$  sur  $\mathbb{R}^3$  tel que  $U = \nabla f$ .



3. Quelle sera la circulation de  $U$  le long d'une courbe fermée dans  $\mathbb{R}^3$ ?

**Exercice 2.5.** Soit le champ de vecteurs dans  $\mathbb{R}^3$  suivant :

$$U(x, y, z) = (-y \sin(xy) + yz, -x \sin(xy) + xz, xy).$$

1. Calculer son rotationnel et sa divergence.

2. Trouver un champ scalaire  $f$  sur  $\mathbb{R}^3$  tel que  $U = \nabla f$ .

**Exercice 2.6.** Soit le champ de vecteurs dans  $\mathbb{R}^3$  suivant :

$$U(x, y, z) = \left( \frac{-2xyz}{(1+x^2)^2}, \frac{z}{1+x^2}, \frac{y}{1+x^2} \right).$$

1. Calculer son rotationnel.

2. Trouver un champ scalaire  $f$  sur  $\mathbb{R}^3$  tel que  $U = \nabla f$ .

**Exercice 2.7.** Soit dans  $\mathbb{R}^3$  la surface

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z^2 = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Déterminer l'aire de  $S$ .

**Exercice 2.8.** Soit dans  $\mathbb{R}^3$  la surface

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0, x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$$

orientée par le vecteur  $(0, 0, 1)$  et les courbes

$$\mathcal{C}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0, x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\},$$

$$\mathcal{C}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = z = 0, -1 \leq x \leq 1\},$$

$\mathcal{C}_1$  étant orientée dans le sens des  $x$  décroissants et  $\mathcal{C}_2$  dans celui des  $x$  croissants. Soit les champs de vecteurs

$$U(x, y, z) = (-xy, xy, x + y), \quad V(x, y, z) = (1, -1, x + y).$$

1. Représenter graphiquement  $S$ , puis  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  avec leurs orientations.

2. Calculer  $\text{rot } U$ .

3. Calculer

$$\iint_S V \cdot d\sigma.$$

4. Calculer

$$\int_{c_1} U \cdot dl + \int_{c_2} U \cdot dl.$$

**Exercice 2.9.** Soit dans  $\mathbb{R}^3$  la surface

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + (y - 1)^2 \leq 1, z = x + y\},$$

orientée par le vecteur  $(0, 0, 1)$ .

Calculer le flux au travers de  $S$  du vecteur  $U(x, y, z) = (x, y, z - y)$ .

**Exercice 2.10.** Soit  $a > 0$  et  $b > 0$  donnés. Soit dans  $\mathbb{R}^2$  la courbe fermée  $C$ , orientée dans le sens direct, d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1. On considère le champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^2$

$$V(x, y) = (-y, x).$$

Calculer

$$\int_C V \cdot dl.$$

2. En déduire l'aire délimitée par  $C$  en utilisant le théorème de Green-Riemann.

**Exercice 2.11.** Soit dans  $\mathbb{R}^3$  la surface

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

orientée par le vecteur  $(0, 0, 1)$  et la courbe

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 1, x^2 + y^2 = 1\}$$

orientée de façon cohérente avec  $S$ . Soit les champs de vecteurs

$$U(x, y, z) = (x^2, -yz, yz), \quad V(x, y, z) = (y + z, 0, 0).$$

1. Calculer  $\text{rot } U$ .

2. Calculer

$$\iint_S V \cdot d\sigma.$$

3. Calculer

$$\int_C U \cdot dl.$$

**Exercice 2.12.** Soit dans  $\mathbb{R}^3$  les deux surfaces

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 0, y^2 + z^2 < 1\},$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x > 0\},$$

orientées par le vecteur  $(1, 0, 0)$ . Soit également la courbe

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 0, y^2 + z^2 = 1\},$$

orientée de façon compatible avec les surfaces ci-dessus. Soit les champs de vecteurs

$$U(x, y, z) = (x, z, -y), \quad V(x, y, z) = (1, 0, 0).$$

1. Représenter graphiquement  $S_1$ , puis  $S_2$  et  $\mathcal{C}$  avec leurs orientations.

2. Calculer  $\text{rot } U$ .

3. Calculer

$$\iint_{S_1} V \cdot d\sigma.$$

4. Calculer

$$\int_{\mathcal{C}} U \cdot dl.$$

5. Calculer

$$\iint_{S_2} V \cdot d\sigma.$$

**Exercice 2.13.** Soit dans  $\mathbb{R}^3$  la surface

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$$

orientée par le vecteur  $(0, 0, 1)$ . Soit aussi la courbe

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0, x^2 + y^2 = 1\}$$

orientée de façon cohérente avec  $S$ . Soit les champs de vecteurs

$$U(x, y, z) = (-y, x, z), \quad V(x, y, z) = (0, 0, 1).$$

1. Calculer

$$\int_{\mathcal{C}} U \cdot dl.$$

2. En déduire

$$\iint_S V \cdot d\sigma.$$

**Exercice 2.14.** Soit dans  $\mathbb{R}^3$  le champ de vecteurs

$$V(x, y, z) = (-y, x, 1).$$

Soit les surfaces

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}, \\ S_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z^2 = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1\}, \end{aligned}$$

orientées dans le sens des  $z$  croissants.

1. Dessiner  $S_1$  et  $S_2$ .
2. Calculer le flux de  $V$  au travers de  $S_1$ .
3. Calculer la divergence de  $V$ .
4. Donner la valeur du flux de  $V$  au travers de  $S_2$ .

**Exercice 2.15.** Soit dans  $\mathbb{R}^3$  le champ de vecteurs

$$V(x, y, z) = (-y, x, 1).$$

Soit les surfaces

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}, \\ S_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq 1\}, \end{aligned}$$

orientées dans le sens des  $z$  croissants. Soit la courbe

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$$

orientée dans le sens direct en  $(x, y)$ .

1. Dessiner  $\mathcal{C}$ ,  $S_1$  et  $S_2$ .
2. Calculer le flux de  $\text{rot } V$  au travers de  $S_1$ .
3. En déduire

$$\int_{\mathcal{C}} V \cdot dl \text{ et } \iint_{S_2} \text{rot } V \cdot d\sigma.$$