Analyse fonctionnelle

Jean-Philippe Nicolas
Département de Mathématiques,
Université de Brest, 6 avenue Victor Le Gorgeu,
29200 Brest.
Bureau H109, Tel. 02 98 01 67 61,
email : Jean-Philippe.Nicolas@univ-brest.fr

Table des matières

Chapitre 1

Applications linéaires continues dans les espaces de Banach

1.1 Rappels sur les applications linéaires continues

Théorème 1.1. *Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et L une application linéaire de E dans F, alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *L est continue sur E ;*
2. *L est continue en 0 ;*
3. *L est bornée, i.e.*
$$\exists C \geq 0\,;\ \|L(x)\|_F \leq C\|x\|_E\,,\ \forall x \in E\,.$$

Preuve. Laissée en exercice. □

On remarque que la propriété *3.* implique que l'image par L de toute partie bornée de E est une partie bornée de F. On a le corollaire suivant au Théorème 1.1.

Corollaire 1.1. *Si $L\,:\,E \to F$ est linéaire continue, alors elle est uniformément continue sur E.*

Preuve. Soit $C > 0$ tel que dans la propriété *3.* du Théorème 1.1. Soit $\varepsilon > 0$ et x et y dans E. On a
$$\|L(y) - L(x)\| = \|L(y - x)\| \leq C\|y - x\|\,.$$
Donc on peut prendre $\eta = \varepsilon/C$ et on a
$$\forall x \in E\,,\ \forall y \in E\,,\ \|y - x\| < \eta \Rightarrow \|L(y) - L(x)\| < \varepsilon\,.$$
Ceci prouve le corollaire. □

Proposition 1.1. *Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.*

Preuve. Laissée en exercice. C'est une conséquence directe de l'exercice 1.2. □

Remarque 1.1. Si E est de dimension infinie et F de dimension finie, le résultat ci-dessus n'est plus vrai. Voir les exemples plus bas.

Le Théorème 1.1 amène naturellement la notion de norme d'une application linéaire continue comme la plus petite constante $C \geq 0$ comme ci-dessus. Autrement dit

Définition 1.1. *Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

- *L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E; F)$ des applications linéaires continues de E dans F possède une norme naturelle donnée par*

  $$\|L\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|L(x)\|_F \,.$$

  Ceci fait de $\mathcal{L}(E; F)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$.

- *On appelle dual topologique de E, et on note E', l'espace $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ des formes linéaires continues sur E. A ne pas confondre avec le dual algébrique, en général noté E^*, qui est l'ensemble des formes linéaires (non nécessairement continues) sur E. On a $E' \subset E^*$ mais les deux espaces sont distincts si E est de dimension infinie.*

Exemples.

- Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ muni d'une norme $\|.\|_1$ et F un sous-espace vectoriel de E muni d'une norme $\|.\|_2$. L'application identité entre les espaces vectoriels normés F et E est continue si et seulement si

  $$\exists C > 0\,;\ \|x\|_1 \leq C\|x\|_2\,,\ \forall x \in F\,.$$

  On dit alors que F s'injecte continuement dans E et on écrit $F \hookrightarrow E$.

- Une application linéaire n'est pas forcément continue. Considérons $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ l'espace des fonctions de classes $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ à valeurs réelles, muni de la norme du max

  $$\|f\|_1 = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|\,.$$

  C'est bien une norme sur E. Maintenant considérons l'application linéaire L de E dans $\mathbb{R}$ définie par

  $$L(f) = f'(0)\,.$$

  L'application L est bien définie sur E et est linéaire mais elle n'est pas continue. Ceci est un exemple d'espace E de dimension infinie et F (ici $\mathbb{R}$) de dimension finie avec une application linéaire de E dans F qui n'est pas continue.

  A noter que si on avait muni E de la norme

  $$\|f\|_2 = \max_{x \in [0,1]} |f(x)| + \max_{x \in [0,1]} |f'(x)|\,.$$

  l'application L aurait été continue.

- Autre exemple d'application linéaire non continue. On considère $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes d'une variable réelle, muni de la norme

$$\|p\| = \max_{x\in[0,1]} |p(x)| \,.$$

  Pour tout $x_0 \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$ donné, l'application $p \mapsto p(x_0)$ est linéaire de E dans $\mathbb{R}$ mais pas continue.

- Soit $E = \mathcal{C}([0,1]\,;\ \mathbb{C})$ muni de la norme

$$\|f\|^2 = \int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x \,.$$

  Soit $\phi \in E$ et soit $L\,:\ E \to \mathbb{C}$ définie par

$$L(f) = \int_0^1 \phi(x) f(x) \mathrm{d}x \,.$$

  Alors L est continue et $\|L\| = \|\phi\|$.

Proposition 1.2. *La norme des applications linéaires continues définie-ci-dessus vérifie la propriété suivante. Soit E, F, G trois espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, soit $L_1 \in \mathcal{L}(E;F)$ et $L_2 \in \mathcal{L}(F;G)$, alors*

$$\|L_2 \circ L_1\|_{\mathcal{L}(E;G)} \leq \|L_2\|_{\mathcal{L}(F;G)} \|L_1\|_{\mathcal{L}(E;F)} \,.$$

Preuve. Evidente. □

1.2 Espaces de Banach

Définition 1.2. *Un espace de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est une espace vectoriel normé E sur $\mathbb{K}$ qui est de plus complet, c'est-à-dire qui est tel que toute suite de Cauchy dans E converge dans E.*

Exemples.

- Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach. En particulier $\mathbb{K}$ est un espace de Banach sur $\mathbb{K}$.

- L'espace $E = \mathcal{C}([a,b]\,;\ \mathbb{R})$, $-\infty < a < b < +\infty$, muni de la norme du max sur $[a,b]$ est un espace de Banach sur $\mathbb{R}$.

- L'espace $E = \mathcal{C}([a,b]\,;\ \mathbb{C})$, $-\infty < a < b < +\infty$, muni de la norme du max sur $[a,b]$ est un espace de Banach sur $\mathbb{C}$.

- L'espace $E = \mathcal{C}^1([a,b]\,;\ \mathbb{C})$, $-\infty < a < b < +\infty$, muni de la norme du max sur $[a,b]$ est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$ mais n'est pas un espace de Banach.

- L'espace $E = \mathcal{C}([a,b]\,;\ \mathbb{C})$, $-\infty < a < b < +\infty$, muni de la norme L^p, $1 \leq p < +\infty$,

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

  est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$ mais n'est pas un espace de Banach.

Proposition 1.3. *Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si F est un espace de Banach, l'espace $\mathcal{L}(E;F)$ est un espace de Banach.*

Corollaire 1.2. *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, son dual topologique E' est un espace de Banach.*

Preuve de la Proposition 1.3. Soit $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E;F)$. Alors pour tout $x \in E$, la suite $(L_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F. On note $L(x)$ sa limite. Ceci définit une application $L\,:\ E \to F$ qui est clairement linéaire. Maintenant comme la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, elle est bornée. Il existe donc $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $\|L_n\| \leq C$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in E$, $\|L_n(x)\| \leq C\|x\|$. Par passage à la limite, on en déduit que pour tout $x \in E$, $\|L(x)\| \leq C\|x\|$. Il suit que $L \in \mathcal{L}(E;F)$.

Montrons maintenant que $L_n \to L$ dans $\mathcal{L}(E;F)$. Soit $\varepsilon > 0$, comme la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathcal{L}(E;F)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $m \geq n_0$, $\|L_n - L_m\| \leq \varepsilon$, i.e.

$$\forall x \in E\,,\ \|L_n(x) - L_m(x)\| \leq \varepsilon\|x\|\,.$$

En faisant tendre m vers $+\infty$, on en déduit que

$$\forall n \geq n_0\,,\ \forall x \in E\,,\ \|L_n(x) - L(x)\| \leq \varepsilon\|x\|\,.$$

Il suit que $\|L_n - L\| \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. □

1.3 Théorème de Baire

Le Théorème de Baire date de la fin du XIX$^{\mathrm{e}}$ siècle. Il est valable dans un espace métrique complet. Nous l'énonçons ici dans un espace de Banach. La preuve, très simple, ne change pas pour le cas d'un espace métrique complet.

Théorème 1.2 (de Baire)**.** *Dans un espace de Banach non vide,*

1. *toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense,*
2. *toute réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide,*
3. *si l'espace entier est réunion dénombrable de fermés, l'un au moins de ces fermés contient un ouvert non vide.*

Preuve. Les assertions *1* et *2* sont équivalentes et impliquent clairement *3*, il suffit donc d'établir *1*. On note E l'espace de Banach considéré. Soit $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses et V un ouvert non vide. Comme Ω_1 est dense, il contient un point x_1 de V et les deux ensembles étant ouverts, on en déduit qu'il existe $r_1 > 0$ (on peut supposer $0 < r_1 < 1$) tel que $\bar{B}(x_1, r_1) \subset \Omega_1 \cap V$. On note $B_1 = B(x_1, r_1)$. On recommence avec Ω_2 et B_1 au lieu de Ω_1 et V : il existe $x_2 \in \Omega_2 \cap B_1$ et $0 < r_2 < 1/2$ tels que $\bar{B}_2 \subset \Omega_2 \cap B_1$ où $B_2 = B(x_2, r_2)$. Et ainsi de suite par récurrence, on construit les boules B_n vérifiant

$$B_n \subset \bar{B}_n = \bar{B}(x_n, r_n) \subset (\Omega_n \cap B_{n-1}) \subset B_{n-1}\,,\ 0 < r_n < 1/n\,.$$

Il est facile de voir que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy :

$$\forall k \geq n\,,\ \|x_k - x_n\| < \frac{1}{n}\,.$$

On est dans un espace de Banach, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente, on note x sa limite. Pour tout $p \geq n$ on a $x_p \in \bar{B}_n$, d'où $x \in \bar{B}_n \subset \Omega_n$ pour tout n. Donc x est dans l'intersection de tous les Ω_n. Mais également $x \in \bar{B}_1 \subset V$. Donc V a un point commun avec l'intersection de tous les Ω_n. Mais comme ceci est vrai pour tout ouvert V, il suit que l'intersection des Ω_n est dense. □

1.4 Conséquences du Théorème de Baire

Voici un premier corollaire surprenant du théorème de Baire :

Corollaire 1.3. *$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

Preuve. On applique le Théorème de Baire avec $E = \mathbb{R}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque dans $\mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $\Omega_n = \mathbb{R}\backslash\{a_n\}$. L'intersection des Ω_n est dense dans $\mathbb{R}$, donc contient au moins un point x. Ce point x est distinct de tous les a_n. Si $\mathbb{R}$ était dénombrable, on pourrait trouver une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenant tous les réels. Il suit que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. □

Le Théorème de Baire a d'autres conséquences importantes, en particulier les théorèmes fondamentaux de Banach-Steinhaus, de l'application ouverte, des isomorphismes de Banach et du graphe fermé.

Théorème 1.3 (de Banach-Steinhaus ou de la borne uniforme)**.** *Soit E un espace de Banach, F un espace vectoriel normé et $(L_i)_{i\in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'applications linéaires continues de E dans F. On suppose que pour tout $x \in E$ la famille $(\|L_i(x)\|_F)_{i\in I}$ est bornée dans $\mathbb{R}$, i.e.*

$$\forall x \in E\,,\ \exists M_x > 0\ t.q.\ \forall i \in I\,,\ \|L_i(x)\|_F \leq M_x\,.$$

Alors la famille $(L_i)_{i\in I}$ est bornée dans $\mathcal{L}(E; F)$, i.e.

$$\exists M > 0\ t.q.\ \forall i \in I\,,\ \forall x \in E\,,\ \|L_i(x)\|_F \leq M\|x\|_E\,.$$

Preuve. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$E_k = \{x \in E \text{ t.q. } \forall i \in I\,,\ \|L_i(x)\|_F \leq k\}\ .$$

Pour chaque k, on a

$$E_k = \bigcap_{i \in I} L_i^{-1}(\bar{B}(0,k))$$

et est donc un fermé comme intersection (non nécessairement dénombrable) de fermés (car les L_i sont continues). De plus $E_k \subset E_{k+1}$ et E est réunion des E_k, car tout $x \in E$ est dans E_k dès que $k \geq M_x$. D'après le point *3* du Théorème de Baire, l'un des E_k contient un ouvert non vide et donc une boule fermée non vide, i.e.

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}\,,\ \exists x_0 \in E\,,\ \exists r_0 > 0 \text{ t.q. } \bar{B}(x_0, r_0) \subset E_{k_0}\,.$$

C'est-à-dire que la famille $(L_i)_{i\in I}$ est uniformément bornée sur cette boule fermée. On se ramène maintenant à la boule unité de la façon suivante :

$$\|x\| \leq 1 \ \Leftrightarrow \|y - x_0\| \leq r_0\,,\ y = r_0 x + x_0\,.$$

On a alors que pour tout x dans la boule unité de E et pour tout $i \in I$,

$$\|L_i(x)\| = \|L_i(\frac{y - x_0}{r_0})\| \leq \frac{1}{r_0}(\|L_i(y)\| + \|L_i(x_0)\|) \leq \frac{2k_0}{r_0}$$

car y et x_0 sont dans $\bar{B}(x_0, r_0)$. Il suit que la famille $(L_i)_{i\in I}$ est bornée dans $\mathcal{L}(E;F)$. □

Ce théorème essentiel a un corollaire intéressant.

Corollaire 1.4. *Soit E un espace de Banach, F un espace vectoriel normé et $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications linéaires continues de E dans F. On suppose que L_n converge simplement, i.e. $\forall x \in E$, la suite $(L_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F, définissant ainsi une application L*

$$L(x) := \lim_{n\to+\infty} L_n(x)\,.$$

Alors L, qui est naturellement linéaire, est aussi continue. De plus la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{L}(E;F)$ et

$$\|L\|_{\mathcal{L}(E;F)} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|L_n\|_{\mathcal{L}(E;F)}\,.$$

Preuve. Toute suite convergente est bornée. La suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie donc les hypothèses du théorème de Banach-Steinhaus. Il suit qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\|L_n\|_{\mathcal{L}(E;F)} \leq C\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Notons

$$K = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|L_n\|_{\mathcal{L}(E;F)}\,.$$

On a
$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \forall x \in E\,,\ \|L_n(x)\|_F \leq K\|x\|_E\,.$$
En gardant x fixé et en faisant tendre n vers $+\infty$, il suit
$$\forall x \in E\,,\ \|L(x)\|_F \leq K\|x\|_E\,,$$
c'est-à-dire $\|L\|_{\mathcal{L}(E;F)} \leq K$. □

Remarque 1.2. Attention, le corollaire ci-dessus n'assure en rien que la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L dans $\mathcal{L}(E;F)$, cela peut très bien ne pas être le cas.

Théorème 1.4 (de l'application ouverte)**.** *Soit E et F deux espaces de Banach et $L \in \mathcal{L}(E;F)$. On suppose que L est surjective, alors L est ouverte, c'est-à-dire que l'image par L de tout ouvert de E est un ouvert de F.*

Preuve. On considère les ensembles fermés de F suivants :
$$F_n := \overline{L(B_E(0,n))} = n\overline{L(B_E(0,1))}\,.$$
Comme L est surjective, on sait que
$$F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\,.$$
Alors le théorème de Baire assure qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que F_N est d'intérieur non vide, et donc $\overline{L(B_E(0,1))}$ est d'intérieur non vide, i.e.
$$\exists \eta > 0\,,\ \exists y_0 \in F\,;\ B_F(y_0,\eta) \subset \overline{L(B_E(0,1))}\,.$$
En particulier, $y_0 \in \overline{L(B_E(0,1))}$ et par symétrie, on a aussi $-y_0 \in \overline{L(B_E(0,1))}$. Il suit que
$$-y_0 + B_F(y_0,\eta) = B_F(0,\eta) \subset \overline{L(B_E(0,1))} + \overline{L(B_E(0,1))}\,.$$
Et comme $\overline{L(B_E(0,1))}$ est convexe, on a
$$\overline{L(B_E(0,1))} + \overline{L(B_E(0,1))} = 2\overline{L(B_E(0,1))}\,.$$
On en déduit
$$B_F(0,\eta/2) \subset \overline{L(B_E(0,1))}\,. \tag{1.1}$$
On va maintenant montrer que $B_F(0,\eta/4) \subset \overline{L(B_E(0,1))}$. Posons $c = \eta/4$. Soit $y \in B_F(0,c)$. On cherche un antécédent à y dans la boule unité, i.e. on cherche $x \in B_E(0,1)$ tel que $L(x) = y$. D'après (1.1) on a
$$\forall \varepsilon > 0\,;\ \exists z \in E\,;\ \|z\| < 1/2 \text{ et } \|y - L(z)\| < \varepsilon\,.$$
On prend $\varepsilon = c/2$ et on obtient un $z_1 \in E$ avec
$$\|z_1\| < 1/2\,,\ \|y - L(z_1) - L(z_2)\| < c/4\,.$$

On construit ainsi par récurrence une suite $(z_n)_n$ dans E telle que

$$\|z_n\| < 1/2^n\,,\ \ \|y - \sum_{k=1}^{n} L(z_k)\| < c/2^n\,.$$

La suite $x_n = z_1 + ... + z_n$ est de Cauchy du fait que $\|z_n\| < 1/2^n$. Soit x sa limite, on a $y = L(x)$ par continuité de L et

$$\|x\| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \|z_k\| < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1\,.$$

On a donc montré que

$$B_F(0,c) \subset L(B_E(0,1))\,.$$

On en déduit en utilisant l'homogénéïté de L que l'image de tout ouvert contenant 0 contient un voisinage de $0 = L(0)$. Par linéarité de L, ceci implique que pour tout $x \in E$, l'image de tout ouvert contenant x contient un voisinage de $L(x)$. Il suit que l'image par L de tout ouvert de E est un ouvert de F. □

Corollaire 1.5 (Théorème de l'isomorphisme de Banach)**.** *Soit E et F deux espaces de Banach et $L \in \mathcal{L}(E;F)$. On suppose que L est bijective, alors L^{-1} est continue, c'est-à-dire que L est un isomorphisme de E sur F (application linéaire bijective continue et d'inverse continu).*

Preuve. C'est une conséquence directe du théorème de l'application ouverte. Comme L est bijective, L est l'application inverse de L^{-1}. Dire que L est ouverte revient alors à dire que l'image inverse par L^{-1} de tout ouvert de E est un ouvert de F. C'est-à-dire que L^{-1} est continue. □

Définition 1.3 (Graphe d'une application linéaire)**.** *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $L\,:\ E \to F$ une application linéaire. On appelle graphe de L le sous-ensemble de $E \times F$:*

$$\Gamma_L := \{(x, L(x))\,;\ x \in E\}\,.$$

Comme L est linéaire, Γ_L est un sous-espace vectoriel de $E \times F$. En le munissant de la norme induite par celle de $E \times F$, on en fait un espace vectoriel normé. Cette norme sur Γ_L induit naturellement une norme sur E appelée la norme du graphe et notée $\|.\|_L$:

$$\|x\|_L = \|(x, L(x))\|_{E\times F}\,.$$

Par exemple, si on prend pour norme sur $E \times F$

$$\|(x,y)\|_{E\times F} = \|x\|_E + \|y\|_F\,,$$

la norme du graphe s'écrit

$$\|x\|_L = \|x\|_E + \|L(x)\|_F\,.$$

On se place dans le cadre de la définition ci-dessus et on considère la projection canonique de $E \times F$ sur E :

$$p_1 : \begin{array}{ccc} E \times F & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & x \end{array}$$

C'est une application linéaire continue surjective mais non injective. Si on la restreint à Γ_L, on obtient une application linéaire continue bijective. C'est même une isométrie de Γ_L muni de la norme $\|.\|_{E\times F}$ dans E muni de la norme du graphe. On en déduit que

- une suite $((x_n, L(x_n))_n$ est convergente dans $(\Gamma_L, \|.\|_{E\times F})$ si et seulement si la suite $(x_n)_n$ est convergence dans $(E, \|.\|_L)$.
- une suite $((x_n, L(x_n))_n$ est de Cauchy dans $(\Gamma_L, \|.\|_{E\times F})$ si et seulement si la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans $(E, \|.\|_L)$.
- $(\Gamma_L, \|.\|_{\times E\times F})$ est un espace de Banach si et seulement si $(E, \|.\|_L)$ est un espace de Banach.

Théorème 1.5 (du graphe fermé)**.** *Soit E et F deux espaces de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $L : E \to F$ une application linéaire. Alors F est continue si et seulement si le graphe Γ_L de L dans l'espace de Banach $E \times F$ est fermé.*

Preuve.

1. Montrons que L continue implique Γ_L fermé. On suppose donc que $L \in \mathcal{L}(E;F)$. Soit $(x_n, y_n)_n$ une suite dans Γ_L qui converge dans $E \times F$ vers (x,y), c'est-à-dire que $x_n \to x$ dans E et $L(x_n) \to y$ dans F. Comme L est continue, on a $L(x_n) \to L(x)$ dans F et par unicité de la limite, il suit $y = L(x)$, c'est-à-dire $(x,y) \in \Gamma_L$.

2. Montrons la réciproque. Comme $E \times F$ est un espace de Banach, diire que le graphe de L est fermé revient à dire que $(\Gamma_L, \|.\|_{E\times F}$ est un espace de Banach, ce qui équivaut à dire que $(E, \|.\|_L)$ est un espace de Banach. L'identité de $(E, \|.\|_L)$ dans $(E, \|.\|_E)$ est bijective et continue car $\|x\|_E \leq \|x\|_L$ pour tout $x \in E$. Par le théorème de l'isomorphisme de Banach, il suit que son inverse est continue, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\forall x \in E\,,\ \|x\|_L = \|x\|_E + \|L(x)\|_F \leq C\|x\|_E\,.$$

   C'est-à-dire que

$$\forall x \in E\,,\ \|L(x)\|_F \leq C\|x\|_E\,.$$

   et L est donc continue. □

1.5 Exercices

Exercice 1.1. Démontrer le Théorème 1.1.

Exercice 1.2. Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et L une application linéaire de E dans F. On suppose que L est bornée sur la sphère unité de E. Montrer que L est continue.

Exercice 1.3. Démontrer la Proposition 1.1 en utilisant l'exercice 1.2.

Exercice 1.4. Montrer que la norme définie dans la Définition 1.1 est bien la plus petite constante $C \geq 0$ du théorème 1.1.

Chapitre 2

Applications linéaires continues sur les espaces de Hilbert

2.1 Rappels sur les espaces de Hilbert

Sur un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, on définit la notion de forme hermitienne qui généralise celle de forme bilinéaire dans le cas réel.

Définition 2.1.

- *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, on appelle forme sesquilinéaire sur E une application $\phi : E \times E \to \mathbb{C}$ telle que*

  1. *$\forall y \in H$, $x \mapsto \phi(x, y)$ est linéaire,*
  2. *$\forall x \in H$, $y \mapsto \phi(x, y)$ est anti-linéaire.*

  Si de plus $\forall (x, y) \in H^2$, $\phi(y, x) = \overline{\phi(x, y)}$ on dit que la forme sesquilinéaire est hermitienne. Si ϕ est une forme hermitienne sur E et si ϕ est définie positive (i.e. $\phi(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in E$ et $\phi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$), on dit que ϕ est un produit scalaire sur E. Dans ce cas, $\|x\| := \sqrt{\phi(x, x)}$ est une norme sur E. De plus on a la relation suivante

  $$\phi(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) + \frac{i}{4}(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2)\,.$$

- *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on appelle produit scalaire sur E une application bilinéaire $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ qui est symétrique ($\phi(x, y) = \phi(y, x)$) et définie positive ($\phi(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in E$ et $\phi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$). Dans ce cas, $\|x\| := \sqrt{\phi(x, x)}$ est une norme sur E. De plus on a la relation suivante*

  $$\phi(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)\,.$$

On se souvient peut-être que quand on a une forme bilinéaire symétrique $\phi(x,y)$ sur un espace vectoriel réel on peut lui associer une forme quadratique $q(x) = \phi(x,x)$. De plus on peut ré-exprimer ϕ en fonction de q comme la forme polaire de q

$$\phi(x,y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y)) \,, \tag{2.1}$$

ce qui fait que les deux quantités se déterminent mutuellement de manière unique. De même étant donnée une forme sesquilinéaire $\phi(x,y)$ sur un espace vectoriel complexe E, on lui associe une forme quadratique $q(x) = \phi(x,x)$ et on peut récupérer ϕ comme forme polaire de q

$$\phi(x,y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y)) + \frac{i}{4}(q(x+iy) - q(x-iy)) \,. \tag{2.2}$$

La démonstration se fait de façon directe en développant les expressions dans les membres de droite.

Définition 2.2 (Espace préhilbertien)**.** *Un espace préhilbertien est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$.*

La norme $\|x\| := \sqrt{\langle x,x \rangle}$ issue du produit scalaire dans un espace préhilbertien vérifie la loi du parallélogramme :

$$\forall (x,y) \in H^2 \,, \ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \,. \tag{2.3}$$

La démonstration est un calcul élémentaire :

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle + \langle x-y, x-y \rangle \\ &= \langle x,x \rangle + \langle y,y \rangle + \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle + \langle x,x \rangle + \langle y,y \rangle - \langle x,y \rangle - \langle y,x \rangle \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \,. \end{aligned}$$

On a aussi l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (x,y) \in H^2 \,, \ |\langle x,y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$$

et l'égalité n'a lieu que dans le cas où x et y sont proportionnels.

Définition 2.3 (Espace de Hilbert)**.** *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien, réel ou complexe, qui est complet pour la norme induite par le produit scalaire.*

Les espaces de Hilbert qui nous intéresseront sont ceux qui admettent une base (a priori infinie) dénombrable appelée base Hilbertienne.

Définition 2.4. *Soit H un espace de Hilbert. On appelle base Hilbertienne de H, si elle existe, une famille $(e_i)_{1 \leq i \leq N \,,\ i \in \mathbb{N}}$ où $1 \leq N \leq +\infty$, telle que*

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \,, \ H = \overline{\mathrm{Vect}\{e_i \,, \ 1 \leq i \leq N \,, \ i \in \mathbb{N}\}} \,.$$

Un espace de Hilbert admettant une base Hilbertienne est dit séparable.

En fait, un espace topologique est dit séparable s'il admet un sous-ensemble dénombrable dense et un espace de Hilbert est séparable en ce sens si et seulement si il admet une base Hilbertienne. Tous les espaces de Hilbert que nous considérerons seront séparables. Dans un espace de Hilbert séparable H avec une base Hilbertienne $(e_i)_{1\leq i\leq N}$, tout élément x se développe de façon unique sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^{N} \langle x, e_i\rangle e_i \,. \tag{2.4}$$

et si $N = +\infty$, la série converge dans H, c'est-à-dire ici qu'on a l'égalité (dite de Parseval) :

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{N} |\langle x, e_i\rangle|^2 \,. \tag{2.5}$$

On a en fait le théorème fondamental suivant.

Théorème 2.1. *Soit E un espace de Hilbert réel ou complexe de dimension infinie, séparable. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale dans E. Alors la série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n e_n$$

converge dans E si et seulement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $l^2(\mathbb{N})$. De plus, dans ce cas, on a

$$\|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n e_n\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 \,.$$

Preuve. La série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est une suice de Cauchy, c'est-à-dire si et seulement si

$$\begin{aligned}
& \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}\,;\ \forall k > p \geq n_0\,,\ \|\sum_{n=p+1}^{k} u_n e_n\| < \sqrt{\varepsilon}\,,\\
\Leftrightarrow\ & \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}\,;\ \forall k > p \geq n_0\,,\ \|\sum_{n=p+1}^{k} u_n e_n\|^2 < \varepsilon\,,\\
& \text{ici on utilise l'orthonormalité de la famille } (e_n)_n\,,\\
\Leftrightarrow\ & \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}\,;\ \forall k > p \geq n_0\,,\ \sum_{n=p+1}^{k} |u_n|\|^2 < \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

ce qui équivaut à dire que la série de terme général $|u_n|^2$ est convergente, i.e. $(u_n)_n \in l^2(\mathbb{N})$. L'égalité des normes est alors une conséquence immédiate de l'orthonormalité de la famille $(e_n)_n$ et de la convergence de la série. □

On voit que

Théorème 2.2. *Tout espace de Hilbert séparable H de dimension infinie est isométrique à $l^2(\mathbb{N})$.*

Preuve. On considère une base Hilbertienne $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et l'application

$$j\ :\ H \to l^2(\mathbb{N})\,,\ x \mapsto (\langle x, e_i\rangle)_{i\in\mathbb{N}}\,.$$

D'après (2.5), pour tout $x \in H$, $j(x) \in l^2(\mathbb{N})$ et

$$\|j(x)\|_{l^2} = \|x\|_H\,.$$

De plus, pour toute suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$, il existe un unique $x \in H$ tel que $j(x) = (u_i)_{i\in\mathbb{N}}$, c'est

$$x = \sum_{i=1}^{+\infty} u_i e_i\,.$$

Ceci conclut la preuve. □

Une structure essentielle dans les espaces de Hilbert est la projection sur un sous-espace fermé. Soit H un espace de Hilbert séparable et F un sous-espace vectoriel fermé de H. Soit $(e_i\,,\ 1 \le i \le N\,,\ i \in \mathbb{N})$ une base Hilbertienne de F. La projection orthogonale de H sur F est l'application linéaire continue caractérisée par

$$\forall x \in H\,,\ \forall y \in F\,,\ \langle x - P_F(x), y\rangle = 0\,.$$

Elle s'exprime en fonction de la base Hilbertienne de F sous la forme suivante :

$$P_F(x) = \sum_{i=1}^{N}\langle x, e_i\rangle e_i$$

et on a

$$\|P_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{N} |\langle x, e_i\rangle|^2 \le \|x\|^2\,.$$

Le dual d'un espace de Hilbert H peut naturellement être identifié à H. C'est le

Théorème 2.3 (de représentation de Riesz-Fréchet)**.** *Soit H un espace de Hilbert et H' son dual topologique. L'application*

$$\theta\ :\ H \to H'\,,\ \theta(x)\ :\ y \mapsto \langle y, x\rangle$$

est une isométrie antilinéaire dans le cas complexe, linéaire dans le cas réel, c'est-à-dire une application anti-linéaire ou linéaire, bijective et vérifiant

$$\|\theta(x)\|_{H'} = \|x\|_H\,. \tag{2.6}$$

Preuve. L'équation (2.6) n'est pas surprenante, c'est une conséquence usuelle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on pourra la démontrer en TD pour se rappeler le méchanisme. Elle implique en particulier que θ est injective. Ce qui est beaucoup plus surprenant est le fait que θ soit surjective, c'est-à-dire que les seules formes linéaires continues sur H soient des applications de la forme

$$x \mapsto \langle x, y\rangle \,.$$

Démontrons ce résultat. Soit $l \in E'$. Si l est identiquement nulle, on peut prendre $y = 0$. Supposons que l n'est pas identiquement nulle. Alors le noyau de l est un hyperplan et il est fermé du fait que l est continue. Soit b appartenant à la droite $(\operatorname{Ker} l)^{\perp}$ tel que $l(b) = 1$. On pose $y = b/\|b\|^2$. Alors on montre facilement que les deux formes linéaires continues l et $x \mapsto \langle x, y\rangle$ coincident. □

Nous introduisons maintenant la notion de convergence faible.

Définition 2.5 (Convergence faible)**.** *Soit H un espace de Hilbert, $x \in H$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans H. On dit que la suite (x_n) converge faiblement vers x si*

$$\forall y \in H \,,\ \langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle \ \textit{lorsque}\ n \to +\infty \,.$$

On peut voir facilement que la topologie faible est en effet plus faible que la topologie donnée par la norme et qu'on appelle la topologie forte.

Théorème 2.4. *Dans un espace de Hilbert de dimension infinie, la boule unité n'est pas compacte mais elle est faiblement compacte.*

L'idée de la preuve est assez simple. On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\bar{B}(0,1)$. Alors la suite $(\langle x_n, e_0\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans le disque de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{C}$, on peut donc extraire de (x_n) une sous-suite $(x_{n_k})_k$ telle que la suite $(\langle x_{n_k}, e_0\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$. On prend la sous-suite extraite et on lui applique la même construction avec e_1 au lieu de e_0. Et ainsi de suite avec tous les vecteurs de base les uns après les autres. Après une infinité d'opérations de ce genre, on a extrait une quantité dénombrable de sous-suites, on a donc encore une suite que l'on note $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et qui est telle que sa composante sur chaque e_i converge dans $\mathbb{C}$ vers un certain nombre c_i. Il reste à vérifier que la suite $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est dans $l^2(\mathbb{N})$ et que la suite $(\tilde{x}_n)$ converge faiblement vers

$$c := \sum_{i\in\mathbb{N}} c_i e_i \,. \quad \square$$

A partir de maintenant, sauf mention contraire, H sera un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$.

2.2 Convergence d'une suite d'opérateurs, adjoint d'un opérateur, opérateurs auto-adjoints

Sur l'espace $\mathcal{L}(H)$, on dispose de trois types de convergence :

Définition 2.6. *On considère une suite* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* $\mathcal{L}(H)$ *et* $A \in \mathcal{L}(H)$*. On dit que :*

1. A_n *converge vers* A *en norme si* $\|A_n - A\| \to 0$ *lorsque* $n \to \infty$ *;*
2. A_n *converge fortement vers* A *si pour tout* $x \in H$*, on a* $A_n x \to Ax$ *lorsque* $n \to \infty$ *;*
3. A_n *converge faiblement vers* A *si pour tous* $x, y \in H$*, on a* $\langle A_n x, y\rangle \to \langle Ax, y\rangle$ *lorsque* $n \to \infty$*, c'est-à-dire si pour tout* $x \in H$ *on a* $A_n x \rightharpoonup Ax$ *lorsque* $n \to +\infty$*.*

Proposition 2.1. *Les implications suivantes sont évidentes :* A_n *converge vers* A *en norme* $\Longrightarrow$ A_n *converge fortement vers* A $\Longrightarrow$ A_n *converge faiblement vers* A*. Si* $\dim H < +\infty$*, on a équivalence, sinon, les réciproques sont fausses.*

Théorème 2.5. *Soit* $A \in \mathcal{L}(H)$*, il existe un unique opérateur* $A^* \in \mathcal{L}(H)$ *tel que, pour tous* $x, y \in H$*, on ait*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle .$$

De plus A^* *vérifie* $\|A^*\| = \|A\|$*.*

Preuve. Soit y donné dans H, l'application

$$x \longmapsto \langle Ax, y\rangle$$

est une forme linéaire continue sur H. Par le théorème de Riesz, il suit qu'il existe un unique $z \in H$ tel que, pour tout $x \in H$, on ait $\langle Ax, y\rangle = \langle x, z\rangle$. On note $z = A^* y$. A^* est bien défini, et ce de manière unique, en tant qu'application de H dans H car pour y donné, on définit z, l'image de y par A^*, de façon unique.

Montrons que A^* est linéaire : soit $y, y' \in H$, pour $x \in H$ quelconque,

$$\langle Ax, y + y'\rangle = \langle Ax, y\rangle + \langle Ax, y'\rangle$$

et

$$\begin{aligned}\langle Ax, y + y'\rangle &= \langle x, A^*(y + y')\rangle ,\\ \langle Ax, y\rangle &= \langle x, A^* y\rangle ,\\ \langle Ax, y'\rangle &= \langle x, A^* y'\rangle .\end{aligned}$$

D'où, pour tout $x \in H$,

$$\langle x, A^*(y + y')\rangle = \langle x, A^* y\rangle + \langle x, A^* y'\rangle$$

ce qui équivaut à $A^*(y + y') = A^* y + A^* y'$. On peut faire de même pour montrer que $A^*(\lambda y) = \lambda A^* y$.

Montrons maintenant que A^* est borné et a même norme que A. Dans un premier temps,

$$\|A^* x\|^2 = \langle A^* x, A^* x\rangle = \langle AA^* x, x\rangle \leq \|A\|\|A^* x\|\|x\|$$

d'où

$$\|A^*x\| \leq \|A\|\|x\|\,.$$

il suit que $A^* \in \mathcal{L}(H)$ et

$$\|A^*\| = \sup_{x\in H\,,\ x\neq 0} \frac{\|A^*x\|}{\|x\|} \leq \|A\|\,.$$

On procède de la même façon pour l'autre inégalité :

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle x, A^*Ax\rangle \leq \|A^*\|\|Ax\|\|x\|$$

d'où,

$$\|Ax\| \leq \|A^*\|\|x\|$$

et donc $\|A\| \leq \|A^*\|$. □

Définition 2.7. *L'opérateur A^* est appelé l'opérateur adjoint de A.*

Proposition 2.2. *L'application $A \mapsto A^*$ a les propriétés suivantes :*

1. *c'est une isométrie anti-linéaire de $\mathcal{L}(H)$;*
2. *$(AB)^* = B^*A^*$;*
3. *$(A^*)^* = A$;*
4. *si A^{-1} existe dans $\mathcal{L}(H)$, alors $(A^*)^{-1}$ existe également dans $\mathcal{L}(H)$ et de plus $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.*

Preuve.

1. On a $\|A^*\| = \|A\|$. De plus,

$$\begin{aligned}\langle (A+B)x, y\rangle &= \langle x, (A+B)^*y\rangle \\ &= \langle Ax, y\rangle + \langle Bx, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle + \langle x, B^*y\rangle = \langle x, (A^*+B^*)y\rangle\end{aligned}$$

d'où $(A+B)^* = A^* + B^*$, et

$$\langle \lambda Ax, y\rangle = \lambda\langle x, A^*y\rangle = \langle x, \bar{\lambda}A^*y\rangle$$

ce qui montre que $(\lambda A)^* = \bar{\lambda}A^*$.

2. Pour tous $x, y \in H$, on a

$$\langle ABx, y\rangle = \langle Bx, A^*y\rangle = \langle x, B^*A^*y\rangle\,.$$

3. Pour tous $x, y \in H$,

$$\langle A^*x, y\rangle = \overline{\langle y, A^*x\rangle} = \overline{\langle Ay, x\rangle} = \langle x, Ay\rangle\,.$$

4. On suppose que A^{-1} existe dans $\mathcal{L}(H)$, alors, en utilisant le second point et le fait que $\mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}$ (vérification immédiate),

$$\begin{aligned} \mathrm{Id} &= AA^{-1} = \mathrm{Id}^* = (A^{-1})^* A^* \\ &= A^{-1}A = \mathrm{Id}^* = A^*(A^{-1})^* \end{aligned}$$

   ce qui montre bien que A^* est inversible d'inverse $(A^{-1})^*$. $\square$

Définition 2.8. *On dit que $A \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint si $A^* = A$.*

Proposition 2.3. *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, alors :*

$$A \textit{ auto-adjoint } \Leftrightarrow \forall x \in H\,,\ \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}\,.$$

Preuve. Dire que $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ équivaut à dire que

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle\,. \tag{2.7}$$

On utilise alors la formule (2.2) :

$$\begin{aligned} \langle Ax, y\rangle &= \frac{1}{4}(\langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle) \\ &\quad + \frac{i}{4}(\langle A(x+iy), x+iy\rangle - \langle A(x-iy), x-iy\rangle)\,, \\ \langle x, Ay\rangle &= \frac{1}{4}(\langle x+y, A(x+y)\rangle - \langle x-y, A(x-y)\rangle) \\ &\quad + \frac{i}{4}(\langle x+iy, A(x+iy)\rangle - \langle x-iy, A(x-iy)\rangle)\,, \end{aligned}$$

ce qui entraine $\langle Ax, y\rangle) = \langle x, Ay\rangle$ pour tout $(x, y) \in H^2$, i.e. A est autoadjoint. $\square$

Proposition 2.4. *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint, alors*

$$\|A\| = \sup_{x\in H\,,\ \|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|\,.$$

Preuve. Une première inégalité est immédiate :

$$\sup_{x\in H\,,\ \|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle| \leq \|A\|\,.$$

Montrons l'inégalité réciproque. On utilise l'égalité du parallélogramme :

$$\begin{aligned} \langle Ax, y\rangle &= \frac{1}{4}\left(\langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle\right) \\ &\quad + \frac{i}{4}\left(\langle A(x+iy), x+iy\rangle - \langle A(x-iy), x-iy\rangle\right)\,. \end{aligned}$$

La première ligne du second membre est réelle et que la seconde est imaginaire pure. On en déduit que

$$\Re\langle Ax, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle\right)$$

et si on pose

$$K = \sup_{x\in H\,,\ \|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|$$

on a

$$|\Re\langle Ax, y\rangle| \leq \frac{K}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) = \frac{K}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \tag{2.8}$$

car notamment

$$|\langle A(x+y), x+y\rangle| = \|x+y\|^2 \left|\langle A\left(\frac{x+y}{\|x+y\|}\right), \frac{x+y}{\|x+y\|}\rangle\right| \leq K\|x+y\|^2\,.$$

Si $K = 0$, on choisit $y = Ax$, on obtient d'après (2.8)

$$|\Re\langle Ax, y\rangle| = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2 = 0$$

pour tout $x \in H$, d'où $A = 0$ et donc $\|A\| = 0$. Si $K > 0$, on pose $y = \frac{1}{K}Ax$, l'inégalité (2.8) entraine

$$\frac{1}{K}\|Ax\|^2 \leq \frac{K}{2}\left(\|x\|^2 + \frac{1}{K^2}\|Ax\|^2\right)\,,$$

d'où

$$\frac{1}{2K}\|Ax\|^2 \leq \frac{K}{2}\|x\|^2$$

c'est-à-dire, pour $x \neq 0$,

$$\frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2} \leq K^2$$

et finalement $\|A\| \leq K$. □

2.3 Spectre des opérateurs bornés

La notion de spectre a déjà été rencontrée à propos des matrices. Etant donné $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, le spectre de A est l'ensemble des valeurs propres de A, i.e. l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\det(\lambda\mathrm{Id} - A) = 0$, ce qui signifie que $\lambda\mathrm{Id} - A$ n'est pas un isomorphisme de $\mathbb{C}^n$. On va définir de façon tout-à-fait analogue le spectre d'un opérateur borné sur un espace de Hilbert, mais en dimension infinie on va voir qu'on peut distinguer plusieurs types d'éléments du spectre et que les valeurs propres ne sont pas les seuls types de valeurs spectrales.

Définition 2.9 (Ensemble résolvant, résolvante)**.** *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, on dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ appartient à l'ensemble résolvant de A si $\lambda \mathrm{Id} - A$ est un isomorphisme de H, ce qui équivaut à dire que $\lambda \mathrm{Id} - A$ est une bijection de H dans H et que $(\lambda \mathrm{Id} - A)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. L'ensemble résolvant de A est noté $\rho(A)$. L'opérateur $(\lambda \mathrm{Id} - A)^{-1}$ est appelé la résolvante de A en λ et noté $R_\lambda(A)$.*

Remarque 2.1. On rappelle le théorème des isomorphismes de Banach : étant donnés deux espaces de Banach E et F et f une application linéaire continue bijective de E dans F, alors f^{-1} est continue.

C'est une conséquence directe du théorème de l'application ouverte. Soit $f : E \to F$ une application linéaire continue surjective, alors f est ouverte.

On voit en particulier que $\lambda \in \rho(A)$ si et seulement si $\lambda \mathrm{Id} - A$ est bijective, la continuité de $(\lambda \mathrm{Id} - A)^{-1}$ est automatique.

Définition 2.10 (Spectre)**.** *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, on appelle spectre de A et on note $\sigma(A)$ le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de $\rho(A)$. Le spectre de A est donc l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda \mathrm{Id} - A$ n'est pas un isomorphisme de H. Par la remarque ci-dessus, ceci équivaut à définir $\sigma(A)$ comme l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda \mathrm{Id} - A$ n'est pas bijective ; cette propriété peut être réalisée de trois façons différentes, ce qui correspond à trois type de spectres distincts.*

1. *Le spectre ponctuel de A, noté $\sigma_p(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de A, il est défini comme suit : $\lambda \in \sigma_p(A)$ si et seulement si* $\mathrm{Ker}\,(\lambda \mathrm{Id} - A) \neq \{0\}$, *i.e. si et seulement si $\lambda \mathrm{Id} - A$ n'est pas injective.*

2. *Le spectre continu de A, $\sigma_c(A)$, est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda \mathrm{Id} - A$ est injectif, non surjectif, mais son image est dense dans H, i.e.*
$$\mathrm{Ker}\,(\lambda \mathrm{Id} - A) = \{0\}\,,\ \ Im\,(\lambda \mathrm{Id} - A) \neq H\,,\ \ \overline{Im\,(\lambda \mathrm{Id} - A)} = H\,.$$

3. *Le spectre résiduel, $\sigma_r(A)$, est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda \mathrm{Id} - A$ est injectif, non surjectif, mais son image n'est pas dense dans H, i.e.*
$$\mathrm{Ker}\,(\lambda \mathrm{Id} - A) = \{0\}\,,\ \ (Im\,(\lambda \mathrm{Id} - A))^{\perp} \neq \{0\}\,.$$

Le spectre $\sigma(A)$ est la réunion disjointe de $\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$ et $\sigma_r(A)$.

On a la proposition suivante.

Proposition 2.5. *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$,*

1. $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(A^*)$,

2. *pour $\lambda \in \rho(A)$, on a $(R_\lambda(A))^* = R_{\bar{\lambda}}(A^*)$,*

3. $\lambda \in \sigma_r(A) \implies \bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$,

4. $\lambda \in \sigma_p(A) \implies \bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*) \cup \sigma_r(A^*)$,

5. $\lambda \in \sigma_c(A) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_c(A^*)$.

Preuve. Laissée en exercice. □

Théorème 2.6. *Soit H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$, le spectre de A est un sous-ensemble compact de $\mathbb{C}$ inclus dans le disque fermé de centre 0 et de rayon $\|A\|$.*

Preuve. On rappelle le résultat fondamental qui va servir pour cette démonstration.

Lemme 2.1. *Soit H un espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\|A\| < 1$. Alors $I - A$ est inversible dans $\mathcal{L}(H)$ et son inverse est donné par la somme de la série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A^n \tag{2.9}$$

qui converge dans $\mathcal{L}(H)$.

Preuve. C'est le calcul classique

$$I - A^{n+1} = (I - A)(I + A + A^2 + \ldots + A^n) = (I + A + A^2 + \ldots + A^n)(I - A)\,.$$

Comme $\|A\| < 1$, $A^{n+1} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, on en déduit que la série 2.9 converge dans $\mathcal{L}(H)$ (on peut aussi voir directement qu'elle converge absolument du fait que $\|A\| < 1$) et est l'inverse de $I - A$. □

Revenons à la preuve du théorème.

1. Commençons par montrer que $\rho(A)$ est ouvert. Soit $\lambda_0 \in \rho(A)$, montrons qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $\lambda \in D(0, \eta)$, $\lambda + \lambda_0 \in \rho(A)$. Posons $B = \lambda_0 I - A$,

$$(\lambda + \lambda_0)I - A = \lambda I + B = B(I + \lambda B^{-1})$$

qui est inversible, comme composée d'opérateurs inversibles, pour $\|\lambda B^{-1}\| < 1$, donc pour $|\lambda| < 1/\|\lambda B^{-1}\|$. On prend donc

$$\eta = \frac{1}{\|\lambda B^{-1}\|} > 0\,.$$

2. Montrons maintenant que pour $|\lambda| > \|A\|$, $\lambda \in \rho(A)$:

$$\lambda I - A = \lambda\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)$$

qui est inversible car

$$\left\|\frac{1}{\lambda}A\right\| < 1\,.$$

Ceci conclut la preuve. □

Théorème 2.7. *Soit H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint, alors :*

- $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$,
- $\sigma_r(A) = \emptyset$,
- *les vecteurs propres de A associées à des valeurs propres différentes sont orthogonales.*

Preuve.

- Commençons par montrer que $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \sigma_p(A)$ et $x \in H$, $x \neq 0$ tel que $Ax = \lambda x$, alors
$$\langle Ax, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \bar{\lambda}\langle x, x\rangle$$
d'où $\left(\lambda - \bar{\lambda}\right)\|x\|^2 = 0$ et $\|x\| \neq 0$, d'où $\lambda \in \mathbb{R}$.

- La Proposition 2.5 implique alors que $\sigma_r(A) = \emptyset$, en effet, soit $\lambda \in \sigma_r(A)$, alors $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*) = \sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$. On a donc $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \sigma_p(A)$, ce qui est absurde car $\sigma_r(A)$ et $\sigma_p(A)$ sont disjoints. Donc $\sigma_r(A) = \emptyset$.

- Montrons maintenant que $\sigma_c(A) \subset \mathbb{R}$. Soit $\lambda = \alpha + i\beta$ avec $\beta \neq 0$. On suppose que $\lambda \in \sigma_c(A)$. Alors $\lambda I - A$ est injective et son image est dense mais distincte de H. On va montrer qu'en fait $Im(\lambda I - A)$ est fermée dans H, ce qui contredit les hypothèses. Pour cela, on commence par montrer une inégalité qu'on utilisera ensuite pour conclure. Soit $x \in H$,
$$\begin{aligned}\|(\lambda - A)x\|^2 &= \langle(\alpha + i\beta - A)x, (\alpha + i\beta - A)x\rangle \\ &= \|(\alpha - A)x\|^2 + \|\beta x\|^2 + 2\Re\langle i\beta x, (\alpha - A)x\rangle\end{aligned}$$
or,
$$\langle i\beta x, (\alpha - A)x\rangle = i\langle\beta, (\alpha - A)x\rangle = i\beta\alpha\|x\|^2 - i\beta\langle x, Ax\rangle \in i\mathbb{R}\,,$$
d'où
$$\|(\lambda - A)x\|^2 = \|(\alpha - A)x\|^2 + \|\beta x\|^2 \geq \beta^2\|x\|^2\,. \tag{2.10}$$
Considérons x_n une suite de Cauchy dans $Im(\lambda I - A)$, soit x sa limite dans H. Pour chaque n, il existe $y_n \in H$ tel que $x_n = (\lambda I - A)y_n$ et en utilisant (2.10), on a
$$\|x_m - x_n\|^2 = \|(\lambda - A)(y_m - y_n)\|^2 \geq \beta^2\|y_m - y_n\|^2\,.$$
Il suit que $\{y_n\}_n$ est une suite de Cauchy, elle est donc convergente, soit y sa limite, par continuité de $(\lambda - A)$, il suit $x = (\lambda - A)y \in Im(\lambda - A)$. D'où le résultat. L'hypothèse $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est donc incompatible avec $\lambda \in \sigma_c(A)$, i.e. $\sigma_c(A) \subset \mathbb{R}$.

- Soit $\lambda, \mu \in \sigma_p(A)$, $\lambda \neq \mu$. On considère $x, y \in H$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ tels que $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$. Alors, en utilisant que $\mu \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}\langle Ax, y\rangle &= \langle\lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle \\ &= \langle x, Ay\rangle = \langle x, \mu y\rangle = \mu\langle x, y\rangle\end{aligned}$$
et comme $\lambda \neq \mu$, il suit $\langle x, y\rangle = 0$. □

2.4 Opérateurs compacts, définition, propriétés

Définition 2.11. *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, on dit que A est compact si pour tout suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans H, la suite $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte, i.e. il existe une sous-suite $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $\{Ax_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans H.*

Cela équivaut à dire que l'image par A de la boule unité de H est relativement compacte dans H.

Proposition 2.6 (et exemple fondamental)**.** *Tout opérateur borné de rang fini (i.e. dont l'image est de dimension finie) est compact.*

Preuve. Soit A un opérateur de rang fini et soit $F = ImA$. Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans H, la suite $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, par continuité de A, est bornée dans F qui est de dimension finie, elle est donc relativement compacte. □

Proposition 2.7. *Soit $A, A_1, A_2 \in \mathcal{L}(H)$, des opérateurs compacts. Alors,*

1. *pour tout $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ est compact,*
2. *pour tout $B \in \mathcal{L}(H)$, AB et BA sont compacts.*

La démonstration est triviale et laissée en exercice.

Proposition 2.8. *Soit $K \in \mathcal{L}(H)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *K est compact,*

(ii) *K transforme toute suite faiblement convergente en une suite convergente en norme.*

Preuve.

(i) $\implies$ *(ii)* Soit $K \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact, soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans H qui converge faiblement vers $x \in H$. Il est facile de voir d'une part que Kx_n converge faiblement vers Kx, simplement en remarquant que pour $y \in H$

$$\langle Kx_n, y\rangle = \langle x_n, K^*y\rangle \longrightarrow \langle x, K^*y\rangle = \langle Kx, y\rangle .$$

Supposons que Kx_n ne tende pas vers Kx en norme. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $\{x_{n_k}\}_k$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait

$$\|Kx_{n_k} - Kx\| \geq \varepsilon .$$

D'après le théorème de Banach-Steinhaus, le fait que x_n converge faiblement implique que c'est une suite bornée ; on peut donc extraire de x_{n_k} une sous-suite $\left\{x_{n_{k_p}}\right\}_p$ telle que $Kx_{n_{k_p}}$ converge dans H vers y qui est nécessairement différent de Kx. Mais comme $x_{n_{k_p}}$ converge faiblement vers x, il suit que $Kx_{n_{k_p}}$ converge faiblement vers Kx et il y a une contradiction.

(ii) $\Longrightarrow$ *(i)* Soit K un opérateur borné vérifiant *(ii)*, soit $\{x_n\}_n$ une suite bornée dans H. Dans un espace de Hilbert, tout borné étant faiblement relativement compact, on peut extraire de $\{x_n\}_n$ une sous-suite $\{x_{n_k}\}_k$ faiblement convergente. Alors par *(ii)*, la suite $\{Kx_{n_k}\}_k$ converge fortement. On vient donc de montrer que de toute suite $\{x_n\}_n$, on peut extraire une sous-suite $\{x_{n_k}\}_k$ telle que $\{Kx_{n_k}\}_k$ soit convergente, i.e. que K est compact. □

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate de la proposition précédente.

Corollaire 2.1. *Soit $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{L}(H)$ qui converge faiblement vers $A \in \mathcal{L}(H)$. Soit $K \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact, alors KA_n converge vers KA fortement.*

Proposition 2.9. *Soit $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs compacts sur H et $A \in \mathcal{L}(H)$. On suppose que $K_n \to A$ en norme dans $\mathcal{L}(H)$, alors A est compact.*

Preuve. Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans H, soit $M > 0$ tel que $\|x_n\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On utilise un procédé diagonal pour extraire une sous-suite dont l'image par A converge. Soit $\{x_{0,n}\}_n$ une sous-suite de $\{x_n\}_n$ telle que $K_0x_{0,n}$ converge. De $\{x_{0,n}\}_n$ on peut extraire une sous-suite $\{x_{1,n}\}_n$ telle que $K_1x_{1,n}$ converge. Ainsi de suite, on extrait au fur et à mesure des sous-suites $\{x_{p,n}\}_n$ telles que $K_px_{p,n}$ converge lorsque $n \to +\infty$ et $\{x_{p,n}\}_n$ soit une sous-suite de $\{x_{p-1,n}\}_n$. On pose alors $y_n := x_{n,n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $\{y_n\}_n$ est une sous-suite de $\{x_n\}_n$ telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite $\{K_py_n\}_n$ converge dans H. De plus, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $p_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|A - K_{p_\varepsilon}\| \leq \frac{\varepsilon}{4M}\,.$$

Maintenant, il existe $q_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, m \geq q_\varepsilon$,

$$\|K_{p_\varepsilon}y_n - K_{p_\varepsilon}y_m\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Il suit que pour tous $n, m \geq q_\varepsilon$,

$$\begin{aligned}\|Ay_n - Ay_m\| &\leq \|Ay_n - K_{p_\varepsilon}y_n\| + \|K_{p_\varepsilon}y_n - K_{p_\varepsilon}y_m\| + \|K_{p_\varepsilon}y_m - Ay_m\| \\ &\leq \|A - K_{p_\varepsilon}\|\|y_n\| + \frac{\varepsilon}{2} + \|A - K_{p_\varepsilon}\|\|y_m\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4M}M + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4M}M = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

La suite $\{Ay_n\}_n$ est donc de Cauchy et donc convergente. □

On va maintenant établir une caractérisation importante des opérateurs compacts.

Proposition 2.10. *Soit $K \in \mathcal{L}(H)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *K est compact ;*

(ii) *il existe une suite $\{K_n\}_n$ dans $\mathcal{L}(H)$ d'opérateurs de rang fini telle que $K_n \to K$ en norme dans $\mathcal{L}(H)$.*

Preuve.

(ii) $\Longrightarrow$ *(i)* est une conséquence triviale des propositions 2.6 et 2.9.

(i) $\Longrightarrow$ *(ii)* Soit K compact, alors l'image de la boule unité dans H est relativement compacte, i.e. il existe une partie compacte C de H telle que l'image de la boule unité est incluse dans C. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on a

$$C \subset \bigcup_{y \in C} B(y, \varepsilon)\,.$$

On a un recouvrement ouvert dont on peut extraire un sous-recouvrement fini

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B(y_i, \varepsilon)\,.$$

Soit F_ε le sous-espace de H engendré par les y_i, $i = 1, ..., N_\varepsilon$ et soit d_ε sa dimension. On considère $\{e_1, ..., e_{d_\varepsilon}\}$ une base orthonormale de F_ε. On note P_ε le projecteur orthogonal sur F_ε,

$$P_\varepsilon x = \sum_{i=1}^{d_\varepsilon} \langle x, e_i \rangle e_i\,,$$

et on pose

$$K_\varepsilon = P_\varepsilon K\,.$$

Alors K_ε est de rang fini car son image est incluse dans celle de P_ε qui est de dimension d_ε. De plus, pour $x \in H$, $\|x\| \leq 1$, on a

$$\|K_\varepsilon x - Kx\| = \|P_\varepsilon K x - Kx\| = \inf_{y \in F_\varepsilon} \|Kx - y\|\,.$$

Comme on a construit un recouvrement fini de l'image par K de la boule unité par des boules de centre $y_i \in F_\varepsilon$ et de rayon ε, on en déduit que

$$\|K_\varepsilon x - Kx\| \leq \varepsilon \;\forall x \in \bar{B}(0, 1)\,.$$

Il suit $\|K_\varepsilon - K\| \leq \varepsilon$. En prenant $\varepsilon = 1/n$, on construit ainsi une suite d'opérateurs de rang fini qui convergent en norme vers K. □

Remarque 2.2. Lorsque H est séparable (c'est le cas de tous les exemples concrets), la démonstration suit une idée de départ analogue mais est beaucoup plus simple. On considère $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une base Hilbertienne de H. Soit F_n le sous-espace de dimension $n+1$ engendré par $\{e_0, e_1, ..., e_n\}$. On note P_n la projection orthogonale sur F_n, i.e.

$$P_n x = \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k\,.$$

On pose

$$K_n := KP_n\,.$$

Comme P_n converge fortement vers I, il suit que K_n converge fortement vers K. Supposons que K_n ne converge pas en norme vers K. Alors il existe $\varepsilon > 0$, une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans H telle que $\|x_n\| = 1$ et $\|(K-K_n)x_n\| \geq \varepsilon$. Si on pose $y_n = (I-P_n)x_n$, on a $\|y_n\| \leq 1$ et $y_n \in F_n^\perp$. Il suit que la suite $\{y_n\}_n$ tend faiblement vers 0 dans H. L'opérateur K étant compact, la suite $\{Ky_n\}_n$ tend fortement vers 0. C'est absurde car

$$\|Ky_n\| = \|(K-K_n)x_n\| \geq \varepsilon > 0\,.$$

Donc $K_n \to K$ en norme. □

Corollaire 2.2. *Soit $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{L}(H)$ qui converge fortement vers $A \in \mathcal{L}(H)$. Soit $K \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact, alors A_nK converge vers AK en norme.*

Preuve. Comme K est compact, on peut l'approcher en norme par une suite d'opérateurs $\{K_n\}_n$ de rang fini. Par ailleurs, par le théorème de Banach-Steinhaus, comme la suite $\{A_n\}_n$ converge fortement, elle est bornée dans $\mathcal{L}(H)$, i.e. il existe $M > 0$ tel que $\|A_n\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit maintenant $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|K - K_{n_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{4M}\,.$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\|A_nK - AK\| &\leq \|(A_n - A)(K - K_{n_0})\| + \|(A_n - A)K_{n_0}\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4M}2M + \|(A_n - A)K_{n_0}\|\,.\end{aligned}$$

Soit p la dimension de l'image de K_{n_0}, on considère $\{e_1, ..., e_p\}$ une base orthogonale de $\Im K_{n_0}$. Soit $x \in H$, on a

$$\begin{aligned}\|(A_n - A)K_{n_0}x\| &= \|(A_n - A)\sum_{j=1}^{p}\langle K_{n_0}x, e_j\rangle e_j\| \\ &= \|\sum_{j=1}^{p}\langle K_{n_0}x, e_j\rangle (A_n - A)e_j\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{p}|\langle K_{n_0}x, e_j\rangle|\|(A_n - A)e_j\| \\ &\leq \|K_{n_0}\|\|x\|\sum_{j=1}^{p}\|(A_n - A)e_j\|\end{aligned}$$

et comme $(A - A_n)e_j$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, il suit que

$$\|K_{n_0}\|\sum_{j=1}^{p}\|(A_n - A)e_j\| \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \to +\infty\,,$$

et donc $(A_n - A)K_{n_0}$ tend vers 0 en norme. D'où il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$ on ait
$$\|(A_n - A)K_{n_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$
Ceci conclut la preuve du corollaire. $\square$

Proposition 2.11. *Attention! Soit $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{L}(H)$ qui converge fortement vers $A \in \mathcal{L}(H)$. Soit $K \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact, KA_n ne converge pas a priori vers KA en norme.*

Preuve. On donne un contre-exemple. On considère dans H une famille orthonormale $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. Soit $K \in \mathcal{L}(H)$ défini par
$$Kx = \langle x, e_1\rangle e_1\,.$$
Soit la suite d'éléments de $\mathcal{L}(H)$ $\{A_n\}$ définis par
$$A_n x = \langle x, e_n\rangle e_1\,.$$
Alors A_n converge fortement vers 0 mais $\|A_n\| = 1$. D'autre part K est compact car de rang fini et $KA_n = A_n$ donc ne converge pas en norme vers 0. $\square$

Corollaire 2.3. *Soit $K \in \mathcal{L}(H)$ compact, alors K^* est compact. En particulier, les opérateurs*
$$\Re K := \frac{1}{2}\left(K + K^*\right) \text{ et } \Im K := \frac{1}{2i}\left(K - K^*\right)\,,$$
sont auto-adjoints et compacts et on a $K = \Re K + i\Im K$, $K^* = \Re K - i\Im K$.

Preuve. On considère une suite K_n d'opérateurs de rang fini qui convergent en norme vers K. Alors K_n^* est de rang fini et de plus $\|K_n^* - K^*\| = \|K_n - K\| \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. $\square$

2.5 Exemple fondamental : les opérateurs à noyau

Soit $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$; on considère l'espace $H = L^2(]\alpha,\beta[)$, ensemble des fonctions dont le module au carré est intégrable sur $]\alpha,\beta[$. Soit $a \in L^2(]\alpha,\beta[\times]\alpha,\beta[)$ et l'opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ défini par
$$(Af)(x) = \int_\alpha^\beta a(x,y)f(y)\mathrm{d}y\,.$$
D'une part, $\mathcal{C}^0([\alpha,\beta]\times[\alpha,\beta])$ est dense dans $L^2(]\alpha,\beta[\times]\alpha,\beta[)$. D'autre part, le théorème de Stone-Weierstrass assure que les polynômes sont denses dans $\mathcal{C}^0([\alpha,\beta]\times[\alpha,\beta])$. On peut en déduire, en faisant attention aux différentes normes utilisées, que les polynômes sont denses dans $L^2(]\alpha,\beta[\times]\alpha,\beta[)$. Il suit qu'il existe une suite d'opérateurs $P_n \in \mathcal{L}(H)$ de rang fini qui convergent vers A dans $\mathcal{L}(H)$. Un tel opérateur A est donc un opérateur compact.

2.6 Spectre des opérateurs auto-adjoints compacts

Théorème 2.8 (de Hilbert-Schmidt, ou théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints compacts)**.** *Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie. Soit $K \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact auto-adjoint. Alors il existe une famille orthonormale dénombrable dans H, $\{e_n\}_{0\leq n<N+1}$, $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, constituée de vecteurs propres de K, tels que $Ke_n = \lambda_n e_n$, où la famille $\{|\lambda_n|\}_{0\leq n<N+1}$ est décroissante. De plus, si $N = +\infty$, alors $\lambda_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. La famille $\{e_n\}_{0\leq n<N+1}$ constitue une base orthonormale de $\overline{ImK} = (\operatorname{Ker} K)^\perp$ et pour tout $x \in H$, on a*

$$Kx = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n \,. \tag{2.11}$$

Le spectre de K est

$$\sigma(K) = \{0\} \cup \{\lambda_n\,;\ 0 \leq n < N+1\}\,.$$

Remarque 2.3. Que N soit infini ou non, on a toujours que 0 est dans le spectre de K. Si N est fini, l'orthogonal de ImK dans H est un sous-espace vectoriel fermé de H non réduit à $\{0\}$ (il est même de dimension infinie). Comme c'est le noyau de K (du fait que K est auto-adjoint, on voit que 0 est valeur propre de K. Si $N = +\infty$, 0 est dans le spectre de K simplement parce que la suite λ_n tend vers 0 et le spectre de K est fermé, mais 0 n'est pas nécessairement une valeur propre.

Un corollaire immédiat du Théorème de Hilbert-Schmidt est le résultat suivant.

Corollaire 2.4. *Soit H un espace de Hilbert. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *il existe $K \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint compact n'ayant pas 0 dans son spectre ;*
2. *H est de dimension finie.*

Preuve du Théorème de Hilbert-Schmidt. On commence par montrer que $\|K\|$ ou $-\|K\|$ est valeur propre de K. Il suffit pour cela de montrer que $\|K\|^2$ est valeur propre de K^2, car si $K^2x = \|K\|^2x$, avec $x \neq 0$, on pose $y = (K - \|K\|)x$; alors ou bien $y = 0$, ce qui montre que $\|K\|$ est valeur propre de K, ou bien on a $(K + \|K\|)y = 0$ de sorte que $-\|K\|$ est valeur propre de K.

On considère une suite $\{x_n\}_n$, avec $\|x_n\| = 1$, telle que $\|Kx_n\| \to \|K\|$. Alors

$$\begin{aligned}
\left\|(K^2 - \|K\|^2)x_n\right\|^2 &= \left\|K^2x_n\right\|^2 + \|K\|^4\|x_n\|^2 - 2\Re\langle K^2x_n, \|K\|^2x_n\rangle \\
&= \left\|K^2x_n\right\|^2 + \|K\|^4 - 2\|K\|^2\langle Kx_n, Kx_n\rangle \\
&\leq \|K\|^2\left(2\|K\|^2 - 2\|Kx_n\|^2\right) \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty\,.
\end{aligned}$$

Du fait que K est compact et que $\{x_n\}$ est bornée, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $\{Kx_n\}_n$ est convergente. Alors, par continuité de K, la suite

$\{K^2 x_n\}_n$ est convergente et d'après l'inégalité précédente, il suit que la suite $\{x_n\}_n$ est aussi convergente ; soit x sa limite, on a $\|x\| = 1$ (i.e. $x \neq 0$) et $K^2 x = \|K\|^2 x$, d'où le résultat.

Considérons maintenant $e_0 \in H$, $\|e_0\| = 1$, tel que $Ke_0 = \lambda_0 e_0$, avec $|\lambda_0| = \|K\|$ (bien sûr λ_0 est réel comme valeur propre d'un opérateur auto-adjoint). On pose $K_0 = K$. On définit maintenant $H_1 := \{e_0\}^\perp$. Du fait que $Ke_0 = \lambda_0 e_0$ et que K est auto-adjoint, H_1 est stable par K. En effet, considérons $x \in H$, $x \perp e_0$ tel que $\langle Kx, e_0\rangle \neq 0$, alors

$$\langle Kx, e_0\rangle = \langle x, Ke_0\rangle = \lambda_0 \langle x, e_0\rangle = 0$$

ce qui est absurde. On pose alors $K_1 := K|_{H_1}$. Alors $K_1 \in \mathcal{L}(H_1)$, est compact et auto-adjoint sur H_1. Puis on répète le processus. A l'étape n, on choisit $e_n \in H_n$, $\|e_n\| = 1$, avec $Ke_n = K_n e_n = \lambda_n e_n$, où $K_n = K|_{H_n}$ avec $|\lambda_n| = \|K_n\|$. On définit alors $H_{n+1} := \{e_0, ..., e_n\}^\perp$, comme $Ke_i = \lambda_i e_i$ pour $i = 0, .., n$ et comme K est auto-adjoint, H_{n+1} est stable par K et on peut donc poser $K_{n+1} := K|_{H_{n+1}}$, qui à son tour est un opérateur borné sur H_{n+1}, compact et auto-adjoint.

Comme les K_n sont des restrictions de K sur des espaces de plus en plus petits, leur norme décroit, i.e. $|\lambda_n|$ est décroissante en n.

Ce processus s'arrête si pour un certain $N \in \mathbb{N}$, on a $K_{N+1} = 0$, i.e. on a $H_{N+1} = \operatorname{Ker} K$. On est alors clairement dans le cadre du théorème avec N fini. Si ce processus ne s'arrête pas, alors on obtient une suite $\{\lambda_n\}$, tous les λ_n étant non nuls, telle que $|\lambda_n| = \|K_n\|$ décroit avec n (on est dans le cadre du théorème avec $N = +\infty$). La suite $\{|\lambda_n|\}_n$ admet donc une limite, on la note δ. Supposons que $\delta > 0$, alors $x_n := (\delta/\lambda_n)e_n$ est de norme inférieure ou égale à 1 et $Kx_n = \delta e_n$ n'a pas de sous-suite de Cauchy, car pour $n \neq m$,

$$\|Kx_n - Kx_m\|^2 = \delta^2 \left(\|e_n\|^2 + \|e_m\|^2\right) = 2\delta^2$$

du fait que $e_n \perp e_m$. Ceci contredit la compacité de K. D'où $\lambda_n \to 0$.

Supposons N fini. Pour $x \in H$, on peut décomposer x de façon unique sous la forme suivante :

$$x = \sum_{n=0}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n + P_{H_{N+1}} x$$

où $P_{H_{N+1}}$ est la projection sur $H_{N+1} = \operatorname{Ker} K$. On a donc

$$Kx = \sum_{n=0}^{N} \langle x, e_n\rangle Ke_n = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n\,.$$

Ainsi les $\{e_n\}_{0\leq n\leq N}$ engendrent ImK qui est de dimension finie $N+1$ et donc fermée, d'où

$$ImK = (\operatorname{Ker} K)^\perp\,.$$

Supposons maintenant que $N = +\infty$. Soit $x \in H$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, en projetant x sur l'espace engendré par $\{e_0, e_1, ..., e_n\}$ puis sur H_{n+1},

$$x = \sum_{p=0}^{n} \langle x, e_p\rangle e_p + P_{H_{n+1}} x$$

et en utilisant que $KP_{H_{n+1}} = K_{n+1}P_{H_{n+1}}$,

$$Kx = \sum_{p=0}^{n} \langle x, e_p\rangle K e_p + K_{n+1}P_{H_{n+1}}x = \sum_{p=0}^{n} \lambda_p \langle x, e_p\rangle e_p + K_{n+1}P_{H_{n+1}}x\,.$$

Comme $\|K_n\|$ tend vers zéro, on en déduit que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n$$

converge dans H et que sa limite vaut Kx. On obtient donc (2.11), ce qui implique que ImK est engendré par les e_n et donc que la famille $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de

$$\overline{ImK} = (\mathrm{Ker}\, K)^{\perp}\ .$$

Ceci clôt la preuve du théorème. □

Corollaire 2.5. *Si H est séparable, pour $K \in \mathcal{L}(H)$ autoadjoint compact, il existe une base orthonormale de H constituée de vecteurs propres de K.*

Preuve. On considère la famille $\{e_n\}_{0\le n<N+1}$ donnée par le théorème de Hilbert-Schmidt et on y ajoute une base orthonormale de $\mathrm{Ker}\, K$. □

Remarque 2.4. Attention, si à la fois $\mathrm{Ker}\, K$ et ImK sont de dimension infinie, il n'est pas possible de trouver une base orthonormée $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de H de vecteurs propres de H tels que la suite $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ des valeurs propres associés ($Ka_n = \lambda_n a_n$) soit de module décroissant avec n. On peut le faire sur $\overline{ImK}$ mais pas sur H.

Le théorème de Hilbert-Schmidt s'étend en fait, avec quelques modifications, au cas d'un opérateur compact non auto-adjoint, mais pour établir le résultat, on a besoin de la théorie de Fredholm. Voir Chapitre 5.

2.7 Deux exemples

Voyons maintenant deux exemples d'opérateurs compacts ayant 0 dans leur spectre mais pour lesquels 0 joue des rôles différents. Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base Hilbertienne de H.

- Le premier exemple est l'opérateur K_1 défini par

  $$K_1 x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \langle x, e_n\rangle e_n\,.$$

  L'opérateur K_1 est compact, son spectre est

  $$\sigma(K_1) = \{0\} \cup \{\frac{1}{\sqrt{n}}\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$$

  et 0 n'est pas une valeur propre.

- Le second exemple est l'opérateur K_2 défini par

$$K_2 x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \langle x, e_{2k} \rangle e_{2k} \,.$$

L'opérateur K_2 est compact, son spectre est

$$\sigma(K_2) = \{0\} \cup \{\frac{1}{\sqrt{n}}\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$$

et 0 est une valeur propre, son sous-espace propre est

$$\operatorname{Ker} K_2 = \overline{\operatorname{Vect}\{e_{2k+1}\,,\ k \in \mathbb{N}\}}\,.$$

2.8 Exercices

Exercice 2.1. Soit $H = l^2(\mathbb{N})$. On considère les deux opérateurs sur H définis par leur action sur une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quelconque :

$$Au := (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}\,,\ (Bu)_0 = 0\,,\ (Bu)_n = u_{n-1} \text{ pour } n \geq 1\,.$$

1. Déterminer le spectre de A.
2. Déterminer A^*.
3. Déterminer le spectre de B.
4. Détailler les différentes parties des spectres de A et B : $\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$, $\sigma_r(A)$, $\sigma_p(B)$, $\sigma_c(B)$, $\sigma_r(B)$.

Exercice 2.2. Expliquer comment construire une base Hilbertienne de $L^2(]a,b[)$, où $-\infty < a < b < +\infty$. Faire explicitement la construction pour $L^2(]0,1[)$.

Exercice 2.3. On considère l'opérateur A de $L^2(]0,1[$ dans lui-même défini par :

$$\forall f \in L^2(]0,1[\,,\ Af(x) = \left(\int_0^1 (f(y)e^y)\mathrm{d}y\right)\cos x - \left(\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y\right)\frac{1}{1+x^2}\,.$$

Montrer que A est compact.

Exercice 2.4. Soit H un espace de Hilbert et l'opérateur A défini par $A = \lambda I$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ donné.

1. Déterminer le spectre de A.
2. Si $\lambda \neq 0$, donner une condition nécessaire et suffisante sur H pour que A soit un opérateur compact.

Exercice 2.5. Soit H un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel fermé de H. On considère P_F la projection orthogonale sur F.

1. Rappeler la définition de $P_F(x)$ pour $x \in H$.
2. Montrer que P_F est auto-adjoint.
3. Déterminer le spectre de P_F.
4. On suppose que P_F est compact, que peut-on en déduire sur F?

Exercice 2.6. Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base Hilbertienne de H. Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit P_n la projection sur le sous-espace de H engendré par $\{e_0, ..., e_n\}$.

1. Montrer que P_n converge fortement vers l'identité.
2. A-t-on convergence en norme?

Exercice 2.7. Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{L}(H)$, on suppose que $A = A^*$ et qu'il existe une famille $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ orthonormale telle que

$$Ae_n = \frac{1}{n}e_n$$

et pour tout $x \in H$,

$$x \perp e_n \, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow Ax = 0\,.$$

1. Ecrire Ax pour $x \in H$ quelconque.
2. Montrer que A est compact.

Exercice 2.8. Soit H un espace de Hilbert séparable sur $\mathbb{C}$, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H. Soit $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{C}$. On définit l'opérateur

$$Ax = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \langle x, e_n\rangle e_n\,.$$

1. A quelle condition sur $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (nécessaire et suffisante) a-t-on $A \in \mathcal{L}(H)$?
2. A quelle condition sur $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (nécessaire et suffisante) a-t-on $A \in \mathcal{L}(H)$ et A auto-adjoint?
3. On se place dans le cas $A \in \mathcal{L}(H)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pour que $0 \in \sigma_p(A)$.
4. Donner un exemple de suite $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle $A \in \mathcal{L}(H)$, $A = A^*$, $0 \notin \sigma_p(A)$ mais $0 \in \sigma(A)$.

5. A quelle condition sur $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (nécessaire et suffisante) l'opérateur A est-il compact?

Exercice 2.9. Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base Hilbertienne de H. Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{C}$ tendant vers 0. On définit l'opérateur

$$Tx = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n \,.$$

Soit f une fonction de $\mathbb{C}$ dans lui-même continue. On définit l'opérateur $f(T)$ par

$$f(T)x = \sum_{n=0}^{+\infty} f(\lambda_n)\langle x, e_n\rangle e_n \,.$$

A quelle condition sur f l'opérateur $f(T)$ est-il compact?

Chapitre 3

Espaces de Sobolev sur $\mathbb{R}$

Lorsqu'on définit les espaces de Sobolev, on fait en général appel à la théorie de l'intégration de Lebesgue et à la théorie des distributions. C'est la façon naturelle de procéder. Cependant, on peut aussi prendre un autre chemin qui consiste à les définir comme complétés d'un espace de fonctions plus intuitif (l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact) pour les normes de Sobolev. L'avantage de cette approche est qu'elle prépare aux méthodes utilisées dans les applications du théorème de Lax-Milgram que nous verrons dans le dernier chapitre.

Rappelons ici la notion de complétion d'un espace pour une norme.

Théorème 3.1. *Soit $(F, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Il existe un espace E contenant F et qui soit complet pour la norme $\|.\|$ et tel que F soit dense dans E. On appelle E le complété de F pour la norme $\|.\|$ et on le note $\overline{F}^{\|.\|}$.*

Remarque 3.1. La formulation du théorème est en fait légèrement abusive. La formulation correcte est la suivante. **Soit F un espace vectoriel normé, il existe un espace de Banach E et une isométrie linéaire de F dans E dont l'image est dense.** Cela dit, la formulation incorrecte a l'avantage d'être plus facile à comprendre et c'est pourquoi nous l'avons adoptée ici.

La question est de savoir comment "réaliser" un complété, c'est-à-dire comment le construire. Une façon naturelle est la suivante.

Théorème 3.2. *Le complété de F peut être vu comme l'ensemble des suites de Cauchy dans F quotienté par la relation d'équivalence*

$$(u_n)_n \simeq (v_n)_n \iff \lim_{n\to+\infty} \|v_n - u_n\| = 0\,.$$

Remarque 3.2. De façon heuristique, un complété se construit en ajoutant à l'espace dont on est parti les limites des suites de Cauchy.

Définition 3.1 (Espace $\mathcal{C}_0^\infty$)**.** *On note $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ nulles en dehors d'un compact. De même si I est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{C}_0^\infty(I)$ l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur I nulles en dehors d'un compact de I.*

3.1 Espace $L^2(\mathbb{R})$ et transformée de Fourier

Le matériel de cette section est donné sans démonstration, ce sont des rappels de troisième année. On pourra se reporter à un cours d'intégration pour plus de détails.

L'espace $L^2(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions dont le module au carré est intégrable sur $\mathbb{R}$. C'est le complété de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ pour la norme

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

De façon analogue, pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $L^p(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions dont le module à la puissance p est intégrable sur $\mathbb{R}$. C'est le complété de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ pour la norme

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

La transformée de Fourier d'une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$, i.e. $f \in L^1(\mathbb{R})$ est définie de la façon suivante

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} \mathrm{d}x\,,$$

$\mathcal{F}f$ est également notée $\hat{f}$. Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et de plus la transformée de Fourier se prolonge en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même, i.e. $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même et

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}\,.$$

La transformée de Fourier a les propriétés importantes suivantes : si $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{F}(f^{(k)})(\xi) = (i\xi)^k \hat{f}(\xi)\,; \tag{3.1}$$

$$\mathcal{F}(x^k f)(\xi) = i^k \frac{d^k}{\mathrm{d}\xi^k} \hat{f}(\xi)\,. \tag{3.2}$$

La transformée de Fourier inverse, notée $\check{\mathcal{F}}$ est définie sur $L^1(\mathbb{R})$ par

$$\check{\mathcal{F}}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ix\xi} \mathrm{d}x\,.$$

Si f est réelle, on voit que $\check{\mathcal{F}}f = \bar{\hat{f}}$. Il suit que comme $\mathcal{F}$, $\check{\mathcal{F}}$ définit une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$, c'est l'isométrie inverse de $\mathcal{F}$, i.e.

$$\check{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^{-1}\,.$$

3.2 Espaces de Sobolev sur $\mathbb{R}$

Définition 3.2. *Soit $k \in \mathbb{N}$:*

- *l'espace de Sobolev d'ordre* k *sur* $\mathbb{R}$, *noté* $H^k(\mathbb{R})$, *est défini comme le complété de* $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ *pour la norme*

$$\|f\|_{H^k(\mathbb{R})} = \left(\sum_{p=0}^{k} \|f^{(p)}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right)^{1/2} = \left(\sum_{p=0}^{k} \int_{\mathbb{R}} |f^{(p)}|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} ;$$

- *l'espace de Sobolev d'ordre* $-k$ *sur* $\mathbb{R}$, *noté* $H^{-k}(\mathbb{R})$, *est le dual topologique de* $H^k(\mathbb{R})$, *c'est-à-dire l'espace des formes linéaires continues sur* $H^k(\mathbb{R})$.

On peut aussi définir des espaces de Sobolev d'ordre $s \in \mathbb{R}$ quelconque. Cela se fait à l'aide de la transformation de Fourier.

Définition 3.3. *Soit* $s \in \mathbb{R}$, *l'espace de Sobolev* $H^s(\mathbb{R})$ *est défini comme le complété de* $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ *pour la norme*

$$\|f\|_s = \|(1+\xi^2)^{s/2}\hat{f}(\xi)\|_(L^2(\mathbb{R})\,.$$

Proposition 3.1. *Si* $k \in \mathbb{N}$, *les normes* $\|.\|_{H^k(\mathbb{R})}$ *et* $\|.\|_k$ *sont équivalentes.*

Preuve. Laissée en exercice. □

On observe facilement à partir de cette définition les propriétés suivantes.

Proposition 3.2.

1. *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *et pour tout* $s \in \mathbb{R}$, *l'opérateur* $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}$ *est une application linéaire continue de* $H^s(\mathbb{R})$ *dans* $H^{s-k}(\mathbb{R})$.

2. *L'opérateur*

$$I - \Delta = I - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$$

est un isomorphisme de $H^s(\mathbb{R})$ *sur* $H^{s+2}(\mathbb{R})$ *pour tout* $s \in \mathbb{R}$.

Preuve. Laissée en exercice. □

Nous admettrons la dernière proposition, mais une partie sera démontrée en exercice.

Proposition 3.3. *Si* $f \in H^1(\mathbb{R})$ *alors* f *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et tend vers* 0 *à l'infini. De plus il existe* $C > 0$ *telle que pour tout* $f \in H^1(\mathbb{R})$,

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \leq C\|f\|_{H^1}\,.$$

De même si $f \in H^{k+1}(\mathbb{R})$, *alors* f *est* $\mathcal{C}^k$ *sur* $\mathbb{R}$ *et* f *ainsi que toutes ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à* k *tendent vers* 0 *à l'infini. De plus il existe* $C > 0$ *telle que pour tout* $f \in H^{k+1}(\mathbb{R})$,

$$\sum_{p=0}^{k} \max_{x\in\mathbb{R}} |f^{(p)}(x)| \leq C\|f\|_{H^k}\,.$$

3.3 Espaces de Sobolev sur un intervalle de $\mathbb{R}$

Définition 3.4. *Soit $I =]a,b[$ un intervalle ouvert, borné, non vide de $\mathbb{R}$. Soit $s \in \mathbb{R}$ on appelle espace de Sobolev d'ordre s sur I l'ensemble des restrictions à I des éléments de $H^s(\mathbb{R})$. La norme sur $H^s(I)$ est le norme induite par celle de $H^s(\mathbb{R})$, i.e.*

$$\|f\|_{H^s(I)} = \inf\{\|\tilde{f}\|_{H^s(\mathbb{R})}\,;\ \tilde{f} \in H^s(\mathbb{R}) \text{ et } \tilde{f}|_I = f\}\,.$$

Proposition 3.4. *Si $s = k \in \mathbb{N}$, la norme $\|.\|_{H^k(I)}$ est équivalente à la norme*

$$\left(\sum_{p=0}^{k} \|f\|^2_{L^2(I)}\right)^{1/2}$$

et on a

$$H^k(I) = \overline{\mathcal{C}^\infty(\bar{I})}^{\|.\|_{H^k(I)}}\,,$$

c'est-à-dire

$$H^k(]a,b[) = \overline{\mathcal{C}^\infty([a,b])}^{\|.\|_{H^k(I)}}\,,$$

Attention, $H^s(I)$ n'est pas le complété de $\mathcal{C}_0^\infty(I)$ pour la norme $H^s(I)$.

Définition 3.5. *On note $H_0^s(I)$ le complété de $\mathcal{C}_0^\infty(I)$ pour la norme $H^s(I)$.*

Proposition 3.5. *Soit $I =]a,b[$ un intervalle ouvert, borné, non vide. Si $k \in \mathbb{N}^*$, les éléments de $H^k(I)$ sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur $\bar{I}$ et l'espace $H_0^k(I)$ est simplement donné par*

$$H_0^k(I) = \{f \in H^k(I)\,;\ f^{(p)}(a) = f^{(p)}(b) = 0\,,\ 0 \leq p \leq k-1\}\,.$$

3.4 Exercices

Exercice 3.1. Démontrer la Proposition 3.2.

Exercice 3.2 (Une injection de Sobolev)**.**

1. Soit $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $|f(x)| \leq C\|f\|_{H^1(\mathbb{R})}$. Observer que C est indépendante de f.

2. En déduire que $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire que $H^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et que l'identité de $H^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ est continue).

Exercice 3.3 (Intégration par parties dans $H^2(\mathbb{R})$)**.** Soit u et v appartenant à $H^2(\mathbb{R})$. En utilisant la densité de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ dans $H^2(\mathbb{R})$, montrer qu'on peut faire les intégrations par parties usuelles sur u et v :

$$\int_{\mathbb{R}} (u'v')\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} (-u''v)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} u(-v'')\mathrm{d}x\,.$$

Exercice 3.4 (Intégration par parties dans $H^1(I)$)**.** Soit u et v appartenant à $H^1(]a,b[)$. En utilisant la densité de $\mathcal{C}^\infty([a,b])$ dans $H^1(]a,b[)$, montrer qu'on peut faire les intégrations par parties usuelles sur u et v :

$$\begin{aligned}\int_a^b u'v\mathrm{d}x &= -\int_a^b uv'\mathrm{d}x + \big[uv\big]_a^b \\ &= -\int_a^b uv'\mathrm{d}x + u(b)v(b) - u(a)v(a)\,.\end{aligned}$$

Chapitre 4

Théorème de Lax-Milgram et applications

4.1 Le théorème de Lax-Milgram

Théorème 4.1. *Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$. Soit a une forme bi-linéaire sur H qui vérifie :*

1. *a est continue sur $H \times H$, i.e. il existe $C > 0$ tel que pour tout $(u, v) \in H \times H$, $|a(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|$;*

2. *a est coercive (on dit aussi H-elliptique), i.e. il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $u \in H$ on ait $a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2$.*

Soit également $L \in H'$ (une forme linéaire continue sur H).

Sous ces hypothèses, il existe un unique $u \in H$ tel que

$$a(u, v) = L(v)\,,\ \forall v \in H\,.$$

Si de plus a est symétrique, alors u est l'unique élément de H qui minimise la fonctionnelle sur H :

$$\Phi(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)\,.$$

4.2 Application à la résolution d'équations différentielles sur $\mathbb{R}$

On peut utiliser le Théorème de Lax-Milgram pour résoudre des équations aux dérivées partielles. On suppose ici que toutes les fonctions sont à valeurs réelles.

Nous traitons ici un premier exemple d'équation différentielle sur $\mathbb{R}$. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, on cherche à résoudre

$$-u'' + u = f \text{ sur } \mathbb{R}\,. \tag{4.1}$$

Il est naturel de chercher des solutions dans $H^2(\mathbb{R})$. On va obtenir une formulation variationnelle du problème. On multiplie l'équation par v pour $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ et on intègre par parties sur $\mathbb{R}$. On obtient

$$a(u,v) = L(v)\,, \tag{4.2}$$

où

$$a(u,v) = \int_{\mathbb{R}} (u'(x)v'(x) + u(x)v(x))\mathrm{d}x$$

et

$$L(u) = \int_{\mathbb{R}} f(x)u(x)\mathrm{d}x\,.$$

Par densité de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ dans $H^1(\mathbb{R})$, l'égalité (4.2) s'étend à $v \in H^1(\mathbb{R})$. On cherche donc à résoudre le problème suivant qu'on appelle la **formulation variationnelle** de (4.1) : trouver $u \in H^1(\mathbb{R})$ telle que

$$a(u,v) = L(v)\,,\ \forall v \in H^1(\mathbb{R})\,. \tag{4.3}$$

On remarque que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées, on a donc une unique solution $u \in H^1(\mathbb{R})$.

On vient de voir que si $u \in H^2(\mathbb{R})$ est solution de (4.1), alors u est solution de (4.3). De plus, (4.3) admet une unique solution dans $H^1(\mathbb{R})$. Pour montrer que la solution de (4.3) est effctivement dans $H^2(\mathbb{R})$, il faut utiliser la théorie des distribution et la notion de dérivée faible. Ce sont des notions assez intuitives mais il faudrait tout de même un cours d'un semestre pour les exposer clairement. Nous allons donc supposer que la solution de (4.3) est dans $H^2(\mathbb{R})$ et montrer qu'alors elle vérifie (4.1).

Si la solution u de (4.3) est dans $H^2(\mathbb{R})$, alors on peut faire les intégrations par parties suivantes pour $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}} (u'v' + uv)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} (-u'' + u)v\mathrm{d}x\,.$$

Il suit que pour tout $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} (-u'' + u - f)v\mathrm{d}x = 0\,.$$

Par densité de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, il suit que

$$\int_{\mathbb{R}} (-u'' + u - f)v\mathrm{d}x = 0\ \forall v \in L^2(\mathbb{R})$$

et donc

$$-u'' + u = f\,,$$

et c'est une égalité dans $L^2(\mathbb{R})$.

D'autres exemples sont proposés dans les exercices et dans la sous-section suivante. Leur traitement suit le même type de raisonnement que pour l'exemple que nous venons de voir.

L'avantage de cette méthode par rapport aux méthodes usuelles de résolution d'équations différentielles (variation de la constante) est qu'elle s'étend sans modification à des équations aux dérivées partielles sur $\mathbb{R}^n$.

4.3 Application à l'étude de problèmes aux limites sur un intervalle borné de $\mathbb{R}$

4.3.1 Conditions de Dirichlet homogènes

Soit $f \in L^2(]0,1[)$, on considère le problème suivant : trouver $u \in H^2(]0,1[)$ tel que

$$-u'' + u = f \text{ sur }]0,1[\,,\ u(0) = u(1) = 0\,. \tag{4.4}$$

On va procéder comme dans la section précédente. On multiplie par $v \in \mathcal{C}_0^\infty(]0,1[)$ et on intègre par parties ; comme v et sa dérivée sont nuls au bord, on n'a pas de terme de bord dans les intégrations par parties. On obtient :

$$\int_{]0,1[} (u'v' + uv)\mathrm{d}x = \int_{]0,1[} fv\mathrm{d}x\,.$$

Par densité de $\mathcal{C}_0^\infty(]0,1[)$ dans $H_0^1(]0,1[)$, cette égalité s'étend à $v \in H_0^1(]0,1[)$. On obtient donc que u vérifie

$$a(u,v) = L(v)\ \forall v \in H_0^1(]0,1[)\,, \tag{4.5}$$

où

$$a(u,v) = \int_{]0,1[} (u'v' + uv)\mathrm{d}x \text{ et } L(v) = \int_{]0,1[} fv\mathrm{d}x\,.$$

On vérifie facilement que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites pour $H = H_0^1(]0,1[)$. On a donc une unique solution $u \in H_0^1(]0,1[)$. Si maintenant on suppose que de plus $u \in H^2(]0,1[)$ on peut par intégrations par parties (en prenant $v \in H_0^1(]0,1[)$ ou $v \in \mathcal{C}_0^\infty(]0,1[)$) montrer que u vérifie

$$-u'' + u = f\,,$$

ceci étant une égalité dans $L^2(]0,1[)$. Et comme $u \in H_0^1(]0,1[)$, u vérifie les conditions aux limites $u(0) = u(1) = 0$.

4.3.2 Conditions de Neumann homogènes

Si maintenant on change les conditions aux limites en $u'(0) = u'(1) = 0$ (conditions de Neumann homogènes) au lieu de $u(0) = u(1) = 0$ (conditions de Dirichlet homogènes), le traitement va changer de façon importante.

Nous considérons le problème suivant : trouver $u \in H^2(]0,1[)$ tel que

$$-u'' + u = f \text{ sur }]0,1[\,,\ u'(0) = u'(1) = 0\,. \tag{4.6}$$

On multiplie par $v \in \mathcal{C}_0^\infty(]0,1[)$ et on intègre par parties ; ici encore on n'a pas de termes de bord du fait que v et sa dérivée sont nuls au bord. On obtient :

$$\int_{]0,1[} (u'v' + uv)\mathrm{d}x = \int_{]0,1[} fv\mathrm{d}x\,.$$

Cette fois-ci, l'espace sur lequel on va travailler est $H^1(]0,1[)$ et non plus $H_0^1(]0,1[)$, du fait qu'on ne suppose plus que u est nulle au bord de l'intervalle. Le problème est que $\mathcal{C}_0^\infty(]0,1[)$ n'est pas dense dans $H^1(]0,1[)$. On va donc refaire les intégrations par parties avec $v \in H^1(]0,1[)$. Du fait que u' est nulle au bord, on n'a toujours pas de termes de bord et on obtient donc que u vérifie

$$a(u,v) = L(v)\ \forall v \in H^1(]0,1[)\,, \tag{4.7}$$

où

$$a(u,v) = \int_{]0,1[} (u'v' + uv)\mathrm{d}x \text{ et } L(v) = \int_{]0,1[} fv\mathrm{d}x\,.$$

Là encore, on vérifie facilement que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites, mais cette fois pour $H = H^1(]0,1[)$. On a donc une unique solution $u \in H^1(]0,1[)$.

Supposons maintenant que u est une solution de (4.7) et que de plus $u \in H^2(]0,1[)$. Peut-on en déduire que u est solution de (4.6)? Commençons par considérer $v \in \mathcal{C}_0^\infty(]0,1[)$ (ou ce qui revient au même $v \in H_0^1(]0,1[)$) : par intégration par parties, on trouve

$$a(u,v) = \int_{]0,1[} (-u'' + u)v\mathrm{d}x\,.$$

On a donc que

$$\int_{]0,1[} (-u'' + u - f)v\mathrm{d}x = 0\ \forall v \in H_0^1(]0,1[)\,. \tag{4.8}$$

Par densité de $H_0^1(]0,1[)$ dans $L^2(]0,1[)$, on en déduit que (4.8) s'étend au cas $v \in L^2(]0,1[)$, ce qui implique

$$-u'' + u = f\,, \tag{4.9}$$

comme égalité dans $L^2(]0,1[)$. Nous avons donc obtenu l'équation. Comment peut-on récupérer les conditions aux limites. On considère cette fois $v \in H^1(]0,1[)$ et on utilise l'équation :

$$0 = a(u,v) - L(v) = \int_{]0,1[} (u'v' + uv - fv)\mathrm{d}x = \big[u'v\big]_0^1 + \int_{]0,1[} (-u'' + u - f)v\mathrm{d}x = \big[u'v\big]_0^1\,.$$

Il suit que

$$\big[u'v\big]_0^1 = u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0\ \forall v \in H^1(]0,1[)\,.$$

Comme v est quelconque dans $H^1(]0,1[)$, $v(0)$ et $v(1)$ sont quelconques, il suit que

$$u'(0) = v'(0) = 0\,.$$

On en déduit que u est solution de (4.6).

4.4 Exercices

Exercice 4.1. On veut résoudre à l'aide du théorème de Lax-Milgram l'équation différentielle suivante :

$$-(gu')' + hu = f \text{ sur } \mathbb{R}\,, \tag{4.10}$$

où $g, h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et vérifient : il existe $0 < C_1 < C_2 < +\infty$ telles que

$$C_1 \leq g(x) \leq C_2\,,\ |g'(x)| \leq C_2 \text{ et } C_1 \leq h(x) \leq C_2\ \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

1. Donner la formulation variationnelle de (4.10) et montrer qu'elle admet une unique solution dans un espace fonctionnel qu'on précisera.

2. En supposant que la solution du problème variationnel est dans $H^2(\mathbb{R})$, montrer qu'elle vérifie (4.10).

Exercice 4.2. On considère l'équation différentielle suivante :

$$u^{(4)} - 2u'' + 3u = f \text{ sur } \mathbb{R}\,,\ f \in L^2(\mathbb{R})\,. \tag{4.11}$$

1. Donner la formulation variationnelle de (4.11) et montrer qu'elle admet une unique solution dans un espace fonctionnel qu'on précisera.

2. En supposant que la solution du problème variationnel est dans $H^4(\mathbb{R})$, montrer qu'elle vérifie (4.11).

Exercice 4.3. On considère l'équation différentielle suivante :

$$u^{(4)} - (gu')' + u' + hu = f \text{ sur } \mathbb{R}\,,\ f \in L^2(\mathbb{R})\,, \tag{4.12}$$

où $g, h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\exists C > 0$ telle que

$$\frac{1}{C} \leq g \leq C\,,\ |g'| \leq C\,,\ \frac{1}{C} \leq h \leq C\,.$$

1. Donner la formulation variationnelle de (4.12) et montrer qu'elle admet une unique solution dans un espace fonctionnel qu'on précisera.

2. En supposant que la solution du problème variationnel est dans $H^4(\mathbb{R})$, montrer qu'elle vérifie (4.12).

3. La solution du problème variationnel est-elle solution d'un problème de minimisation naturellement associé au problème variationnel?

Exercice 4.4. On veut résoudre à l'aide du théorème de Lax-Milgram le problème aux limites suivant

$$(-gu')' + hu = f \text{ sur }]0,1[\,,\ u'(0) = u'(1) = 0\,, \tag{4.13}$$

où f et g vérifient les mêmes hypothèses que dans l'exercice 4.1.

1. Trouver la formulation variationnelle de (4.13) et montrer à l'aide du théorème de Lax-Milgram qu'elle admet une unique solution dans un espace fonctionnel que l'on précisera.

2. En supposant que la solution u de la formulation variationnelle est dans $H^2(]0,1[)$, montrer que u vérifie
$$-u'' + u = f$$
en prenant $v \in \mathcal{C}_0^\infty(]0,1[)$ puis en raisonnant par densité.

3. Montrer en prenant maintenant $v \in H^1(]0,1[)$ que $u'(0) = u'(1) = 0$.

Chapitre 5

Matériel complémentaire

5.1 Théorie de Fredholm

Etudier le spectre d'un opérateur compact K signifie étudier les valeurs $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquelles l'opérateur $I - \lambda^{-1}K$ est bijectif (le cas $\lambda = 0$ est particulier, comme on le verra avec le théorème de Riesz-Schauder). Il s'agit donc de savoir si, pour K opérateur compact quelconque, l'équation

$$(I - K)x = y$$

admet une unique solution pour tout $y \in H$. La théorie de Fredholm établit que si on peut assurer l'unicité, alors l'existence suit. C'est le résultat appelé "alternative de Fredholm" :

Théorème 5.1 (Alternative de Fredholm)**.** *Soit $K \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact, alors l'une des deux propriétés suivantes est réalisée :*

(1) il existe $x_0 \in H$ tel que $x_0 \neq 0$ et $(I - K)x_0 = 0$, i.e. $1 \in \sigma_p(K)$;

(2) pour tout $y \in H$, il existe un unique $x \in H$ tel que $(I - K)x = y$, i.e. $I - K$ est un isomorphisme de H.

Remarque 5.1. Quel est le lien entre l'alternative de Fredholm et la description intuitive que nous en avons faite avant de l'énoncer? Tout d'abord on remarque qu'au lieu d'écrire l'alternative en distinguant les deux cas $1 \in \sigma_p(K)$ et $1 \notin \sigma(K)$, on aurait pu distinguer, pour n'importe quel $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ les cas $\lambda \in \sigma_p(K)$ et $\lambda \notin \sigma(K)$. En effet, pour $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$,

$$\lambda I - K = \lambda \left(I - \frac{1}{\lambda} K \right) .$$

On pose $\tilde{K} = \frac{1}{\lambda}K$, $\tilde{K}$ est compact. Distinguer les cas $1 \in \sigma_p(\tilde{K})$ et $1 \notin \sigma(\tilde{K})$ est équivalent à distinguer $\lambda \in \sigma_p(K)$ et $\lambda \notin \sigma(K)$. On voit alors que dans le premier cas ($1 \in \sigma_p(\tilde{K})$, c'est-à-dire $\lambda \in \sigma_p(K)$), le noyau de $\lambda I - K$ est non réduit à $\{0\}$, donc il existe une infinité de $x \in H$ (les éléments de $\operatorname{Ker}(\lambda I - K)$) tels que $(\lambda I - K)x = 0$. Maintenant, pour $y \in H$, on considère l'équation

$$(\lambda I - K)\, x = y\,. \tag{5.1}$$

On voit que si pour $y \in H$ donné, l'équation $(\lambda I - K)x = y$ admet une solution, alors elle en admet une infinité. Autrement dit, dans le premier cas, on n'a pas unicité. Si on est dans le second cas, alors on a existence et unicité des solutions pour tout $y \in H$ car $\lambda I - K$ est bijective. On voit que si on peut montrer l'unicité, alors on n'est forcément pas dans le premier cas et on est donc dans le second, c'est-à-dire qu'on a existence et unicité. Ainsi, si on peut assurer l'unicité des solutions de (5.1), alors on a nécessairement existence.

Remarque 5.2. Le résultat de l'alternative de Fredholm est assez remarquable dans la mesure où on voit que si 1 (ou $\lambda \neq 0$ quelconque) n'est pas dans $\sigma_p(K)$, alors il n'est pas du tout dans le spectre de K ; les éventuelles valeurs spectrales de K en dehors de 0 dans $\mathbb{C}$ sont nécessairement des valeurs propres. C'est-à-dire

$$\sigma(K) \setminus \{0\} \subset \sigma_p(K)\,.$$

L'alternative de Fredholm est un corollaire du théorème de Fredholm analytique :

Théorème 5.2 (Théorème de Fredholm analytique)**.** *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $z \mapsto K(z)$ une fonction analytique de Ω dans $\mathcal{L}(H)$, telle que pour tout $z \in \Omega$, $K(z)$ soit compact. Alors, l'une des deux propriétés suivantes est réalisée :*

(i) $I - K(z)$ n'est inversible pour aucun $z \in \Omega$;

(ii) il existe une partie discrète D dans Ω telle que $I - K(z)$ soit inversible pour tout $z \in \Omega \setminus D$, $(I - K(z))^{-1}$ est donc analytique dans $\Omega \setminus D$. De plus, si $z_0 \in D$, $1 \in \sigma_p(K(z_0))$ et il existe $r > 0$, $N \in \mathbb{N}$, $A_j \in \mathcal{L}(H)$, $j \geq -N$, tels que, pour $0 < |z - z_0| < r$, on ait

$$(I - K(z))^{-1} = \sum_{j=-N}^{+\infty} (z - z_0)^j A_j$$

la série convergeant dans $\mathcal{L}(H)$ normalement sur tout compact de $C(z_0, 0, r)$ et

$$A_{-1} = \text{Rés}\left((I - K(z))^{-1}, z_0\right)$$

est de rang fini. On voit notamment que $(I - K(z))^{-1}$ est méromorphe dans Ω.

Preuve de l'alternative de Fredholm. On considère la fonction $K(z) = zK$, analytique dans $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathcal{L}(H)$. Pour $z = 0$, $I - zK = I$ et est clairement inversible. On est donc dans le cas *(ii)* du théorème de Fredholm analytique. Alors ou bien 1 appartient à la partie discrète D et on est dans le cas *(1)* (car $K(1) = K$), ou bien $1 \in \mathbb{C} \setminus D$ et on est dans le cas *(2)*. □

Preuve du théorème de Fredholm analytique. On commence par démontrer le résultat au voisinage d'un $z_0 \in D$ quelconque. Soit $z_0 \in D$, on choisit $r > 0$ tel que $K(z)$ soit analytique dans $D(z_0, r)$ et

$$\text{pour } |z - z_0| < r\,,\ \|K(z) - K(z_0)\| < 1/2\,;$$

on choisit également $F \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur de rang fini tel que $\|K(z_0) - F\| < 1/2$ (ce qui est possible d'après la proposition 2.10 et du fait que $K(z_0)$ est compact). Alors la fonction $z \mapsto K(z) - F$ est analytique dans $D(z_0, r)$ à valeurs dans $\mathcal{L}(H)$, de plus, pour tout $z \in D(z_0, r)$, on a $\|K(z) - F\| < 1$. Il suit que $(I - K(z) + F)^{-1}$ existe et est analytique dans $D(z_0, r)$ (on admet ici que si f est une fonction holomorphe dans $D(0, R)$, $R > 0$, et si g est une fonction analytique sur Ω ouvert de $\mathbb{C}$ à valeurs dans la boule de centre 0 et de rayon R dans $\mathcal{L}(H)$, alors $f \circ g$ est analytique sur Ω à valeurs dans $\mathcal{L}(H)$).

F est de rang fini, soit N la dimension de son image, soit $\{\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n\}$ une base de ImF, alors pour tout $x \in H$, on a

$$Fx = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(x)\psi_j \, .$$

Les α_j, $j = 1, ..., N$, sont des formes linéaires continues sur H, donc d'après le théorème de Riesz, il existe des vecteurs ϕ_j, $j = 1, ..., N$, uniques, tels que

$$\alpha_j(x) = \langle x, \phi_j \rangle \; \forall x \in H \, .$$

On a alors, pour tout $x \in H$,

$$Fx = \sum_{j=1}^{N} \langle x, \phi_j \rangle \psi_j$$

et donc

$$F \left(I - K(z) + F\right)^{-1} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^{N} \langle \left(I - K(z) + F\right)^{-1} x, \phi_j \rangle \psi_j \, .$$

En posant $g(z) = F \left(I - K(z) + F\right)^{-1}$ et $\phi_j(z) = \left(\left(I - K(z) + F\right)^{-1}\right)^* \phi_j$, on obtient

$$g(z)x = \sum_{j=1}^{N} \langle x, \phi_j(z) \rangle \psi_j \, .$$

On remarque maintenant que

$$\begin{aligned} \left(I - g(z)\right)\left(I - K(z) + F\right) &= \left(I - K(z) + F\right) - F \left(I - K(z) + F\right)^{-1} \left(I - K(z) + F\right) \\ &= I - K(z) \, . \end{aligned}$$

Il suit que $I - K(z)$ est inversible pour z dans $D(z_0, r)$ si et seulement si $I - g(z)$ est inversible pour z dans $D(z_0, r)$ (simplement du fait que $I - K(z) + F$ est inversible dans ce disque). De même, pour $z \in D(z_0, r)$, $\mathrm{Ker}\left(I - K(z)\right) \neq \{0\}$ si et seulement si $\mathrm{Ker}\left(I - g(z)\right) \neq \{0\}$, toujours en utilisant le fait que $I - K(z) + F$ est inversible. Si $g(z)x = x$, alors on a

$$x = \sum_{j=1}^{N} \langle x, \phi_j(z) \rangle \psi_j \tag{5.2}$$

i.e.

$$x = \sum_{j=1}^{N} \beta_j \psi_j \tag{5.3}$$

et en utilisant (5.2), les β_j sont solution du système

$$\beta_k - \sum_{j=1}^{N} \langle \psi_j, \phi_k(z) \rangle \beta_j = 0\,. \tag{5.4}$$

De plus, x vérifie (5.2) si et seulement si (5.3) et (5.4) sont vérifiés. Conséquemment, (5.2) a une solution non nulle si et seulement si le déterminant de la matrice A du système (5.4), de composantes

$$A_{kj} = \delta_{kj} - \langle \psi_j, \phi_k(z) \rangle\,, \tag{5.5}$$

est nul. On note $d(z)$ ce déterminant ; du fait que $\langle \psi_j, \phi_k(z) \rangle$ est analytique sur $D(z_0, r)$, $d(z)$ y est holomorphe. Il suit que

$$S_r := \{z \in D(z_0, r)\,;\ d(z) = 0\}$$

est ou bien un ensemble discret dans $D(z_0, r)$, ou bien égal à $D(z_0, r)$ tout entier.

- Si $S_r = D(z_0, r)$, alors (5.2) admet une solution non nulle pour tous $z \in D(z_0, r)$ et $I - g(z)$ (et donc aussi $I - K(z)$ n'est jamais inversible.

- Si S_r est discret, pour $z \notin S_r$, alors la matrice A de coefficients (5.5) est inversible et étant donnés α_j, $j = 1, ...N$, le système

$$\beta_k - \sum_{j=1}^{N} \langle \psi_j, \phi_k(z) \rangle \beta_j = \alpha_k\,, \tag{5.6}$$

  admet une unique solution $\{\beta_j\}_{j=1,\dots,N}$. Soit $y \in H$, on pose $\alpha_j = \langle y, \phi_j(z) \rangle$ et, les β_j étants la solution correspondante de (5.6),

$$x := y + \sum_{j=1}^{N} \beta_j \psi_j\,.$$

  Alors

$$\begin{aligned}
(I - g(z))x &= y + \sum_{j=1}^{N} \beta_j \psi_j - \sum_{j=1}^{N} \langle y + \sum_{k=1}^{N} \beta_k \psi_k, \phi_j(z) \rangle \psi_j \\
&= y + \sum_{j=1}^{N} \left(\beta_j - \sum_{k=1}^{N} \beta_k \langle \psi_k, \phi_j(z) \rangle - \langle y, \phi_j(z) \rangle \right) = y\,.
\end{aligned}$$

  Donc $I - g(z)$ est inversible. Et on a bien sûr que si $I - g(z)$ est inversible, alors $z \notin S_r$. L'analyticité et le résidu de rang fini sont obtenus par une expression explicite à l'aide de (5.6) de $(I - g(z))^{-1}$ en termes de cofacteurs.

La globalisation de l'argument pour un petit disque à Ω tout entier est basée sur un argument classique de connexité. Nous omettons les détails. □

5.2 Spectre des opérateurs compacts

Dans cette section, on étudie le spectre des opérateurs compacts non nécessairement auto-adjoint et on en déduit une forme canonique de tels opérateurs. L'ensemble généralise le théorème de Hilbert-Schmidt au cas non auto-adjoint.

Théorème 5.3 (Théorème de Riesz-Schauder)**.** *Soit $K \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact, alors :*

1. $0 \in \sigma(H)$ *(en dimension finie, bien sûr, ce n'est plus vrai, sinon tout opérateur en dimension finie aurait* 0 *dans son spectre),*

2. $\sigma(K) \setminus \{0\}$ *est un ensemble discret dans* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$*, si son cardinal est infini, alors* $\sigma(K) \setminus \{0\}$ *est l'ensemble des éléments d'une suite dans* $\mathbb{C}$ *tendant vers* 0*, i.e. on peut écrire* $\sigma(K) \setminus \{0\}$ *sous la forme suivante*
$$\sigma(K) \setminus \{0\} = \{z_n \,;\ n \in \mathbb{N}\}\ ,\quad \lim_{n \to +\infty} z_n = 0\,,$$

3. *soit* $\lambda \in \sigma(K)$*,* $\lambda \neq 0$*, alors* λ *est une valeur propre et* $\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - K) < +\infty$*, on voit en particulier que*
$$\sigma(K) = \{0\} \cup \sigma_p(K)\,.$$

Remarque 5.3. Attention! 0 peut être valeur propre de K mais pas nécessairement.

Preuve.

1. On suppose que $0 \notin \sigma(K)$, alors K est inversible dans $\mathcal{L}(H)$. On considère $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite orthonormale dans H, bien sûr $\{K^{-1}e_n\}_n$ est une suite bornée dans H car
$$\|K^{-1}e_n\| \leq \|K^{-1}\|\|e_n\| = \|K^{-1}\|\,.$$
D'autre part, la suite $\{e_n = KK^{-1}e_n\}_n$ n'admet pas de sous-suite de Cauchy car pour $n \neq m$
$$\|e_n - e_m\|^2 = 2\,,$$
ce qui contredit la compacité de K.

2. On considère $K(z) = zK$, c'est une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathcal{L}(H)$ et $K(z)$ est compact pour tout z, de plus $I - K(0) = I$ est inversible. Le théorème de Fredholm analytique dit que
$$\begin{aligned} D &:= \{z \in \mathbb{C}\,;\ I - K(z) \text{ non inversible}\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}\,;\ \operatorname{Ker}(I - K(z)) \neq \{0\}\} \end{aligned}$$
est un ensemble discret dans $\mathbb{C}$. Donc $(I - K(z))^{-1}$ existe si et seulement si $z \in \mathbb{C} \setminus D$, et si de plus $z \neq 0$,
$$(I - K(z))^{-1} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{z} I - K\right)^{-1}\,.$$

Donc, si $z \neq 0$ alors $1/z \in \mathbb{C} \setminus D$ équivaut à dire que $(z-K)^{-1}$ existe. On en déduit donc que

$$\sigma(K) = \{0\} \cup \left\{ \lambda \in \mathbb{C}^* \, ; \; \frac{1}{\lambda} \in D \right\} .$$

De plus 0 est le seul point d'accumulation possible de $\sigma(K)$ car D étant discret dans $\mathbb{C}$, il n'a aucun point d'accumulation dans $\mathbb{C}$, les seules limites possibles de suites de points de D (deux à deux distincts) sont à l'infini. Et si $\sigma(K) \setminus \{0\}$ est de cardinal infini, comme il est borné du fait que $\sigma(K)$ est borné, il admet forcément une valeur d'adhérence et d'après ce qui précède, c'est 0.

3. Si $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$, alors $1/\lambda \in D$, i.e. $\mathrm{Ker}\,(\lambda I - K) \neq \{0\}$. Donc $\lambda \in \sigma_p(K)$. Supposons que $\mathrm{Ker}\,(\lambda I - K)$ soit de dimension infinie, alors on peut trouver $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite orthonormale dans $\mathrm{Ker}\,(\lambda I - K)$, i.e. on a $Ke_n = \lambda e_n$, mais $\{e_n\}_n$ est bornée (car $\|e_n\| = 1$) et $\lambda \neq 0$, donc $\{Ke_n\}_n$ n'admet pas de sous-suite de Cauchy, ce qui contredit la compacité de K. □

Théorème 5.4 (Forme canonique des opérateurs compacts)**.** *On considère $K \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact. Alors il existe deux familles orthonormales dénombrables*

$$\{x_n\}_{0 \leq n < N+1} \, , \; \{y_n\}_{0 \leq n < N+1} \, , \; N \leq +\infty \, ,$$

et une famille de nombres positifs décroissants $\{\lambda_n\}_{0 \leq n < N+1}$, avec $\lambda_n \to 0$ lorsque n tend vers $+\infty$ dans le cas où $N = +\infty$, telles que, pour tout $x \in H$

$$Kx = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n \langle x, x_n \rangle y_n \, ,$$

la somme convergeant dans H.

Preuve. Comme K est compact, K^*K est compact et auto-adjoint et de plus positif. On suppose de plus $K \neq 0$, sans quoi le théorème est trivial. Alors on a aussi $K^*K \neq 0$, car, étant donné $x \in H$ tel que $Kx \neq 0$, on a $\langle K^*Kx, x \rangle = \|Kx\|^2 \neq 0$. Soit $\{x_n\}_{0 \leq n < N+1}$ la famille orthonormale associée à l'opérateur K^*K, donnée par le théorème de Hilbert-Schmidt, et $\{\mu_n\}_{0 \leq n < N+1}$ la famille décroissante de valeurs propres de K^*K associée (a priori, c'est seulement la famille $\{|\mu_n|\}$ qui est décroissante, mais comme K^*K est positif, on a $\mu_n > 0$. On pose alors $\lambda_n = \sqrt{\mu_n}$ et $y_n = \frac{1}{\lambda_n} K x_n$. La famille $\{y_n\}_{0 \leq n < N+1}$ est bien orthonormale, en effet

$$\langle y_n, y_m \rangle = \frac{1}{\lambda_n \lambda_m} \langle Kx_n, Kx_m \rangle = \frac{1}{\lambda_n \lambda_m} \langle x_n, K^*Kx_m \rangle = \frac{\lambda_m}{\lambda_n} \langle x_n, x_m \rangle = \frac{\lambda_m}{\lambda_n} \delta_{nm} = \delta_{nm} \, .$$

Maintenant, pour $x \in H$, en utilisant le fait que $\{x_n\}_{0 \leq n < N+1}$ est une base hilbertienne de $\overline{Im(K^*K)}$, on peut écrire

$$x = \sum_{n=0}^{N} \langle x, x_n \rangle x_n + P_{\mathrm{Ker}\,(K^*K)} x \, .$$

On a alors

$$\left\|KP_{\mathrm{Ker}\,(K^*K)}x\right\|^2 = \langle K^*KP_{\mathrm{Ker}\,(K^*K)}x, P_{\mathrm{Ker}\,(K^*K)}x\rangle = 0\,.$$

De plus si $N = +\infty$, la série

$$\sum_{n=0}^{N}\langle x, x_n\rangle Kx_n = \sum_{n=0}^{N}\lambda_n\langle x, x_n\rangle y_n$$

converge dans H du fait que K est continu sur H et que la série

$$\sum\langle x, x_n\rangle x_n$$

converge dans H (car $\{x_n\}_n$ est une suite orthonormale). On a donc

$$Kx = \sum_{n=0}^{N}\lambda_n\langle x, x_n\rangle y_n\,. \quad \square$$

5.3 Théorème de Hahn-Banach et applications

Le théorème de Hahn-Banach traite du prolongement de formes linéaires. Il y a bien sûr un cas très simple où le prolongement est unique et automatique. Il est valable en fait non seulement pour les formes linéaires mais également pour les applications linéaires à valeurs dans un espace de Banach.

Proposition 5.1. *Soit E et H deux espaces de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F un sous-espace vectoriel de E dense dans E. Soit L une application linéaire de F dans H continue pour la norme sur E, i.e.*

$$L\,:\; F \to \mathbb{K}\ \textit{linéaire}\ ;\ \exists C > 0\,;\ \forall x \in F\,,\ \|L(x)\|_H \le C\|x\|_E\,.$$

Alors L se prolonge de façon unique en une forme linéaire continue de E dans H telle que

$$\forall x \in E\,,\ \|\tilde{L}(x)\|_H \le C\|x\|_E\,. \tag{5.7}$$

Preuve. Soit $x \in E \setminus F$ et soit $(x_n)_n$ une suite dans F qui converge vers x dans E. Comme la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy et L est continue, il suit que la suite $(L(x_n))_n$ est de Cauchy dans F ; elle converge donc dans F, on note y sa limite. On pose $\tilde{L}(x) = y$. L'application $\tilde{L}$ ainsi construite est linéaire et, par conservation des inégalités larges par passage à la limite, vérifie (5.7). Par unicité de la limite, toute application linéaire continue de E dans H qui prolonge L est égale à $\tilde{L}$. $\square$

Le théorème de Hahn-Banach traite d'une situation plus délicate : le sous-espace F de E n'est pas supposé dense. De plus le théorème est valable sur un espace-vectoriel quelconque mais ne considère que le cas des formes linéaires.

Théorème 5.5 (de Hahn-Banach, forme analytique, cas réel)**.** *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $p\,:\; E \to \mathbb{R}$ une application sous-linéaire, i.e. vérifiant*

1. *$\forall x \in E$, $\forall \lambda \geq 0$, $p(\lambda x) = \lambda p(x)$;*

2. *$\forall (x, y) \in E \times E$, $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.*

Soit d'autre part F un sous-espace vectoriel de E et $L : F \to \mathbb{C}$ une forme linéaire telle que

$$\forall x \in F\,,\ L(x) \leq p(x)\,.$$

Alors il existe une forme linéaire $\tilde{L} : E \to \mathbb{C}$ qui prolonge L, i.e. telle que

$$\forall x \in F\,,\ \tilde{L}(x) = L(x)\,,$$

et qui vérifie

$$\forall x \in F\,,\ \tilde{L}(x) \leq p(x)\,.$$

La preuve du théorème de Hahn-Banach fait appel au lemme de Zorn, qui est une des formes de l'Axiome du choix, un célèbre résultat indécidable en mathématiques. Le théorème de Hahn-Banach est de fait lui aussi indécidable.

Lemme 5.1 (de Zorn)**.** *Tout ensemble ordonné, inductif et non vide admet un élément maximal.*

Preuve du Théorème 5.5. On considère :

$$P := \{h \mid h : D(h) \subset E \to \mathbb{R} \text{ avec } D(h) \text{ sev de } E, h \text{ linéaire}, G \subset D(h),\\ h \text{ prolonge } g \text{ et } \forall x \in D(h), h(x) \leq p(x)\}$$

On munit P de la relation d'ordre :

$$h_1 \leq h_2 \iff D(h_1) \subset D(h_2) \text{ et } h_2 \text{ prolonge } h_1.$$

On a $P \neq \varnothing$ car $g \in P$. De plus, P est inductif : soit $Q \subset P$ un sous-ensemble totalement ordonné, on note $Q = (h_i)_{i \in I}$, on définit $D(h) := \bigcup_{i \in I} D(h_i)$ et $h(x) := h_i(x)$ si $x \in D(h_i)$. Alors h est un majorant de Q. D'après le lemme de Zorn, P possède un élément maximal f. Prouvons que $D(f) = E$. Supposons que $D(f) \neq E$ et soit $x_0 \notin D(f)$, on pose $D(h) := D(f) + \mathbb{R}x_0$ et :

$$h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha \qquad \forall x \in D(f), \forall t \in \mathbb{R}$$

pour un certain α, le but étant que $h \in P$. On doit donc avoir

$$f(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0) \qquad \forall x \in D(f), \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

c'est-à-dire,

$$\begin{cases} f(x) + \alpha \leq p(x + x_0) & \forall x \in D(f) \\ f(x) - \alpha \leq p(x - x_0) & \end{cases}$$

par (i). Il suffit donc de choisir α tel que

$$\sup_{y \in D(f)} (f(y) - p(y - x_0)) \leq \alpha \leq \inf_{x \in D(f)} (p(x + x_0) - f(x)) .$$

Ceci est possible car

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &\leq p(x + y) \\ &\leq p(x + x_0) + p(y - x_0) . \end{aligned}$$

Donc $f(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - f(x) \quad \forall x, y \in D(f)$. Ainsi, $h \in P$ et $f \leq h, f \neq h$, on obtient une contradiction. □

Théorème 5.6 (de Hahn-Banach, forme analytique, cas complexe)**.** *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $p : E \to \mathbb{R}$ une semi-norme, i.e. vérifiant*

1. *p est à valeurs positives ;*
2. *$\forall x \in E$, $\forall \lambda > 0$, $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$;*
3. *$\forall (x, y) \in E \times E$, $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.*

Soit d'autre part F un sous-espace vectoriel de E et $L : F \to \mathbb{C}$ une forme linéaire telle que

$$\forall x \in F , \ |L(x)| \leq p(x) .$$

Alors il existe une forme linéaire $\tilde{L} : E \to \mathbb{C}$ qui prolonge L, i.e. telle que

$$\forall x \in F , \ \tilde{L}(x) = L(x) ,$$

et qui vérifie

$$\forall x \in F , \ |\tilde{L}(x)| \leq p(x) .$$

Théorème 5.7 (de Hahn-Banach, première forme géométrique)**.** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et A et B deux parties convexes de E, non vides et disjointes. On suppose que A est ouverte. Alors il existe un hyperplan fermé de E qui sépare A et B au sens large.*

Preuve. Nous aurons besoin de deux lemmes.

Lemme 5.2. *Soit $C \subset E$ un convexe ouvert avec $0 \in C$. On pose, pour $x \in E$, $p(x) := \inf\{\alpha > 0 \mid x \in \alpha C\}$ la jauge de C. Alors p vérifie les conditions (i) et (ii) de Hahn-Banach analytique et :*

(iii) *Il existe M tel que $0 \leq p(x) \leq M\|x\| \qquad \forall x \in E$*

(iv) *$C = \{x \in E \mid p(x) < 1\}$.*

Preuve.

(iii) Soit $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset C$, alors $p(x) \leq \frac{1}{r}\|x\|$, d'où *(iii)*.

(i) Vérification immédiate.

(iv)
- Supposons $x \in C$, C est ouvert donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(1+\varepsilon)x \in C$, donc :
$$p(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$$
- Si $p(x) < 1$, il existe $0 < \alpha < 1$ tel que $\frac{x}{\alpha} \in C$, donc :
$$x = \alpha\frac{x}{\alpha} + (1-\alpha) \times 0 \in C$$

(ii) Soit $x, y \in E$, soit $\varepsilon > 0$, alors d'après (i) et (iv) :
$$\frac{x}{p(x)+\varepsilon} \text{ et } \frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$$
Donc :
$$\frac{tx}{p(x)+\varepsilon} + \frac{(1-t)y}{p(y)+\varepsilon} \in C \qquad \forall t \in [0,1]$$
Alors :
$$\text{pour } t = \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}, \text{ on a } \frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in C$$
D'où $p(x+y) < p(x)+p(y)+2\varepsilon \qquad \forall\varepsilon > 0$, d'où *(ii)*.

Ceci conclut la preuve du premier lemme. □

Lemme 5.3. *Soit $C \subset E$ un convexe ouvert non vide. Soit $x_0 \in E \setminus C$.*
Alors il existe $f \in E'$ tel que $f(x) < f(x_0) \qquad \forall x \in C$.
En particulier, l'hyperplan affine d'équation $\{f = f(x_0)\}$ sépare $\{x_0\}$ et C au sens large.

Preuve. Par translation, on peut toujours supposer $0 \in C$ et introduire p la jauge de C. On considère $G := \mathbb{R}x_0$ et on pose $g : G \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $g(tx_0) = t \qquad \forall t \in \mathbb{R}$. Alors $g(x) \leq p(x) \qquad \forall x \in G$

- si $t > 0$, alors $\frac{x}{g(x)} = \frac{tx_0}{t} = x_0 \notin C$ donc $g(x) \leq p(x)$
- si $t \leq 0, g(x) \leq 0 \leq p(x)$.

Donc par le théorème de Hahn-Banach analytique, il existe $f \in E'$ prolongeant g telle que $f(x) \leq p(x), \forall x \in E$. On a $f(x_0) = 1$ et f est continue par *(iii)*. D'autre part, $(iv) \Rightarrow f(x) < 1, \forall x \in C$. □

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème. On pose $C := A - B$. Alors C est convexe, ouvert (car $C = \bigcup_{y\in B}(A-y)$) et $0 \notin C$ car $A \cap B = \varnothing$. D'après le dernier lemme, il existe $f \in E'$ tel que $f(z) < 0, \forall z \in C$, c'est-à-dire, $f(x) < f(y), \forall x \in A, \forall y \in B$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\sup_{x\in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf_{y\in B} f(y)$. Alors l'hyperplan affine d'équation $\{f = \alpha\}$ sépare A et B au sens large. □

Théorème 5.8 (de Hahn-Banach, deuxième forme géométrique). *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et A et B deux parties convexes de E, non vides et disjointes. On suppose que A est fermée et que B est compacte. Alors il existe un hyperplan fermé de E qui sépare A et B au sens strict.*

Preuve. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $A_\varepsilon := A + B(0, \varepsilon)$ et $B_\varepsilon := B + B(0, \varepsilon)$ de sorte que A_ε et B_ε sont convexes, ouverts et non vides. De plus, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, A_ε et B_ε sont disjoints (sinon on pourrait trouver des suites $\varepsilon_n \to 0, x_n \in A$ et $y_n \in B$ telles que $\|x_n - y_n\| < 2\varepsilon_n$ et on pourrait extraire une sous-suite $y_n \to y \in B$ par compacité de B et $y \in A$ car A fermé).

D'après le théorème de Hahn-Banach géométrique sens large, il existe un hyperplan fermé d'équation $\{f = \alpha\}$ qui sépare A_ε et B_ε au sens large. On a donc

$$f(x + \varepsilon z) \leq \alpha \leq f(y + \varepsilon z) \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B, \quad \forall z \in B(0, 1).$$

Il en résulte que

$$f(x) + \varepsilon\|f\| \leq \alpha \leq f(y) - \varepsilon\|f\|, \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B.$$

On conclut que A et B sont séparés au sens strict par l'hyperplan $\{f = \alpha\}$ puisque $\|f\| \neq 0$. □

Nous voyons maintenant quelques applications du théorème de Hahn-Banach analytique dans le cas où E est un espace vectoriel normé.

Corollaire 5.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, G un sous-espace vectoriel de E et $g : G \to \mathbb{K}$ une application linéaire continue pour la norme sur E, de norme*

$$\|g\| = \sup_{x \in G, \ \|x\| \leq 1} \|g(x)\|.$$

Alors il existe $f \in E'$ qui prolonge g telle que

$$\|f\|_{E'} = \|g\|.$$

Preuve. On pose $p(x) := \|g\|\|x\|$, les hypothèses du théorème sont bien vérifiées et on a $|f(x)| \leq \|g\|\|x\|$, d'où $\|f\| \leq \|g\|$, d'où $\|f\| = \|g\|$ car f prolonge g. □

Corollaire 5.2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tout $x_0 \in E$ il existe $f_0 \in E'$ telle que*

$$\|f_0\|_{E'} = \|x_0\|_E \text{ et } f_0(x_0) = \|x_0\|_E^2.$$

Preuve. On applique le corollaire avec $G := \mathbb{R}x_0$ et $g(tx_0) := t\|x_0\|^2$, de sorte que $\|g\| = \|x_0\|$.

Corollaire 5.3. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tout $x \in E$,*

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |\langle f, x \rangle| = \max_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |\langle f, x \rangle|$$

Preuve. Soit $x \neq 0$, alors :

$$\sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |\langle f, x \rangle| \leq \|x\|$$

et, par le corollaire précédent, il existe $f_0 \in E'$ tel que $\|f_0\| = \|x\|$ et $\langle f_0, x \rangle = \|x\|^2$. On pose $f_1 := \frac{f_0}{\|x\|}$, on a $\|f_1\| = 1$ et $\langle f_1, x \rangle = \|x\|$. $\square$

Bibliographie

[1] V. Avanissian, *Initiation à l'analyse fonctionnelle*, Presses Universitaires de France, 1996.

[2] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, 1983.

[3] F. Hirsch, G. Lacombe, *Eléments d'analyse fonctionnelle, cours et exercices avec réponses,* Dunod, 1997.