Analyse 2 – L2 MIASHS

Jean-Philippe Nicolas
LMBA,
Université de Brest, 6 avenue Victor Le Gorgeu,
29200 Brest.
Bureau H109
email : Jean-Philippe.Nicolas@univ-brest.fr

Table des matières

Chapitre 1

Séries numériques

1.1 Définitions et premiers exemples

L'an dernier, on a étudié les suites numériques et leur convergence. Rappelons la définition d'une suite numérique convergente :

Définition 1.1 (Convergence d'une suite numérique)**.** *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite numérique à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *et* $l \in \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*. On dit que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* l *si*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,;\ \forall n \geq n_0\,,\ |u_n - l| \leq \varepsilon\,.$$

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite convergente s'il existe* $l \in \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *tel que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* l*.*

L'étude des séries numériques est en fait l'étude d'une famille de suites définies comme des sommes auxquelles on ajoute un terme à chaque étape.

Définition 1.2 (Série numérique)**.** *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*. On considère la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\,.$$

On dira que la série de terme général u_n *est convergente si et seulement si la suite* (S_n) *converge. On appelle alors somme de la série et on note*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ ou encore } \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$$

la limite de la suite (S_n)*.*

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est appelée la suite des sommes partielles de la série de terme général* u_n*.*

Si la suite des sommes partielles ne converge pas dans $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, on dit que la série de terme général* u_n *est divergente.*

Un série est en général représentée par sa somme, même si elle n'est pas convergente. On aura fréquemment à se poser des questions comme celle-ci :

$$\text{La série } S = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n} \text{ est-elle convergente?}$$

Exemples.

- **Une série téléscopique.** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\,.$$

La suite des sommes partielles de la série de terme général u_n est donnée par

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} + u_n \\ &= \frac{1}{2} - 1 \\ &\quad + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ &\quad + ... \\ &\quad + \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \\ &\quad + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n+1} - 1\,. \end{aligned}$$

On voit que la suite (S_n) converge dans $\mathbb{R}$ vers -1. La série de terme général u_n est donc convergente et sa somme est

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -1\,.$$

- **Un exemple fondamental : la somme d'une suite géométrique.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\lambda \in \mathbb{C}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ définie par

$$u_n = \lambda^n\,.$$

La suite des sommes partielles est donnée par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = 1 + \lambda + \lambda^2 + ... + \lambda^n\,.$$

On observe que

$$\begin{aligned} (1-\lambda)S_n &= S_n - \lambda S_n \\ &= 1 + \lambda + \lambda^2 + ... + \lambda^n \\ &\quad -\lambda - \lambda^2 - ... - \lambda^n - \lambda^{n+1} \\ &= 1 - \lambda^{n+1}\,. \end{aligned}$$

On a donc si $\lambda \neq 1$

$$S_n = \frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}\,. \tag{1.1}$$

Si $\lambda \neq 1$, la suite λ^n converge si et seulement si $|\lambda| < 1$ et elle tend alors vers 0. Si $\lambda = 1$, on a $S_n = n$ et la suite des sommes partielles diverge aussi.

Ainsi la série de terme général λ^n converge si et seulement si $|\lambda| < 1$ et dans ce cas sa somme est donnée par

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda}\,.$$

- **Un autre exemple fondamental : les séries de Riemann.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la suite

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}\,,\ n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Théorème 1.1. *La série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Pour l'instant nous admettrons ce résultat. Nous le démontrerons plus tard dans le cours en utilisant une comparaison avec des intégrales.

1.2 Propriétés élémentaires et premiers critères

Soit

$$S = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\,,\ T = \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n\,,$$

deux séries convergentes dont les termes généraux sont à valeurs réelles ou complexes. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors la série de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$ est convergente et sa somme est

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n + \mu \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n\,.$$

La preuve est immédiate, on peut la faire en revenant à la définition de la limite, elle est laissée en exercice.

Remarque 1.1 (Importante!)**.** *La somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente est divergente. La somme de deux séries divergentes peut être convergente ou divergente selon les cas. Essayez de trouver des exemples des deux situations.*

Théorème 1.2. *Soit*

$$S = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$$

une série convergente, alors son terme général tend vers 0.

Preuve. On note (S_n) la suite des sommes partielles. La suite S_n converge vers S mais S_{n-1} également. Il suit que $S_n - S_{n-1}$ tend vers 0. Or $S_n - S_{n-1} = u_n$. Ceci conclut la preuve. □

Ce résultat nous donne un critère pratique pour montrer qu'une série diverge. Attention, ce n'est qu'une condition suffisante de divergence!

Corollaire 1.1. *Soit*

$$S = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$$

une série dont le terme général est à valeurs réelles ou complexes. Si le terme général u_n ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ alors la série diverge.

Un critère de convergence peut être obtenu en utilisant le Critère de Cauchy de convergence pour les suites numériques.

Proposition 1.1 (Critère de Cauchy de convergence d'une série numérique)**.** *Soit la série*

$$S = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \,.$$

Elle est convergente si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,;\ \forall m \geq n_0\,,\ \forall p \in \mathbb{N}\,,\ \left| \sum_{n=m}^{m+p} u_n \right| < \varepsilon\,.$$

Preuve. On applique simplement le critère de Cauchy de convergence à la suite des sommes partielles. □

1.3 Séries à terme général positif

Lorsque le terme général est à valeurs positives, on a une condition nécessaire et suffisante de convergence pour la série associée qui est très simple.

Proposition 1.2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive, soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de u_n. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *la suite (S_n) est majorée, i.e. il existe $A > 0$ tel que $S_n \leq A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;*
2. *la série*

   $$S = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$$

   converge.

Preuve. La suite (S_n) est croissante car

$$S_n - S_{n-1} = u_n \geq 0\,.$$

Donc la suite (S_n) converge si et seulement si elle est majorée. □

Corollaire 1.2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive, soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de u_n. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *la suite (S_n) tend vers $+\infty$;*
2. *la série*
$$S = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$$
diverge.

Nous énonçons maintenant un théorème essentiel dans l'étude de la convergence ou de la divergence d'une série, le théorème de comparaison.

Théorème 1.3 (de comparaison pour les séries à termes positifs)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels positifs.*

1. *On suppose que la série*
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$$
est convergente et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq v_n$. Alors la série
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$$
est convergente.
2. *On suppose que la série*
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$$
est divergente et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq v_n$. Alors la série
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$$
est divergente.

Preuve. Laissée en exercice.

Une conséquence de ce théorème est une autre méthode utile qu'on peut utiliser avec les séries à termes positifs : la méthode des équivalents.

Définition 1.3 (Suites équivalentes)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs strictement positives. On dit que (u_n) et (v_n) sont équivalentes si*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1\,.$$

Dans ce cas on dit aussi que v_n est un équivalent de u_n et réciproquement.

Exemples.

- Les suites $u_n = n$ et $v_n = n - 4$ sont équivalentes.
- Les suites
$$u_n = n^2 \text{ et } v_n = n^3 \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$
sont équivalentes.
- Les suites $u_n = n$ et $v_n = n^2$ ne sont pas équivalentes.

Proposition 1.3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs strictement positives qui sont équivalentes. Alors la série*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$
est convergente si et seulement si
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$
est convergente.

Remarque 1.2. *Attention! La méthode des équivalents ne peut pas être utilisée pour les séries à termes réels qui changent de signe ou à termes complexes. Nous verrons des contre-exemples plus tard dans le cours.*

Pour certaines séries à termes positifs, on a une méthode qui peut être très utile pour étudier la convergence de la série, c'est la comparaison avec une intégrale.

Théorème 1.4 (Comparaison série-intégrale)**.** *Soit une fonction f définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs positives et décroissante. Alors la série*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$$
converge si et seulement si
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n f(x)\mathrm{d}x \text{ existe et est finie.} \tag{1.2}$$

Remarque 1.3. *La propriété (1.2) se dit aussi*
$$\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ converge.}$$
Nous verrons cette notion plus tard dans le cours.

Preuve du théorème. Comme la fonction est positive et décroissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)\mathrm{d}x \leq f(n-1)\,.$$
On voit donc que, si on note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k)\,,$$
on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$S_n - f(0) \leq \int_0^n f(x)\mathrm{d}x \leq S_{n-1}\,. \tag{1.3}$$
On note que les deux suites (S_n) et
$$I_n := \int_0^n f(x)\mathrm{d}x$$
sont croissantes. Elles sont donc convergentes si et seulement si elles sont majorées. Dans la propriété (1.3), la première inégalité montre donc que si la suite I_n converge, alors la suite S_n converge. La deuxième inégalité montre l'implication réciproque. □

1.4 Séries à valeurs réelles ou complexes

Pour les séries à valeurs réelles ou complexes, il existe une notion de convergence absolue qui est différente de la convergence telle que nous l'avons définie plus haut.

Définition 1.4 (Convergence absolue). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que la série*
$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$
est absolument convergente si la série
$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$
est convergente.

Théorème 1.5. *La convergence absolue implique la convergence.*

Preuve. On utilise le critère de Cauchy de convergence. Soit $\varepsilon > 0$ donné. Comme la série converge absolument, on sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $m \geq n_0$ et tout entier naturel p, on ait
$$\sum_{n=m}^{m+p} |u_n| < \varepsilon\,.$$

De plus, on a
$$\left|\sum_{n=m}^{m+p} u_n\right| \le \sum_{n=m}^{m+p} |u_n| \,.$$
Il suit donc que
$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,;\ \forall m \ge n_0\,,\ \forall p \in \mathbb{N}\,,\ \left|\sum_{n=m}^{m+p} u_n\right| < \varepsilon$$
et la série S converge. □

Nous énonçons maintenant un théorème de comparaison pour les séries à valeurs réelles ou complexes.

Théorème 1.6 (de comparaison pour les séries à valeurs réelles ou complexes)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On suppose que la série*
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$$
est convergente et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_n| \le v_n$. Alors la série
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$$
est convergente et même absolument convergente.

Preuve. Les hypothèses impliquent la convergence absolue par le théorème de comparaison vu plus haut et la convergence absolue implique la convergence. □

Il existe une famille de séries qui convergent sans nécessairement converger absolument, ce sont les séries alternées et leurs généralisations. On peut montrer leur convergence à l'aide du critère d'Abel que nous admettrons ici.

Théorème 1.7. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes. On suppose que*

1. *la suite a_n est décroissante et tend vers 0 ;*
2. *il existe $C > 0$ tel que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ on ait*
$$\left|\sum_{n=m}^{m+p} b_n\right| \le C\,.$$

Alors la série
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$$
est convergente.

Un cas particulier simple est celui des séries alternées.

Corollaire 1.3. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels positifs. On suppose que la suite* a_n *est décroissante et tend vers* 0*, alors la série*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n a_n$$

est convergente.

Preuve. On pose $b_n = (-1)^n$ dans le critère d'Abel et on vérifie les hypothèses. □

1.5 Tests simples de convergence et de divergence

On a deux tests simples qui permettent dans certains cas de montrer qu'une série est divergente ou convergente. Ces tests ne marchent pas tout le temps car on a besoin de l'existence d'une certaine limite et elle n'existe pas toujours.

Proposition 1.4. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, on considère*

$$S = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$$

la série associée.

- **Le test de d'Alembert.** *On calcule, si elle existe, la limite suivante*

  $$l := \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| .$$

  Si $l < 1$ *la série* S *converge. Si* $l > 1$ *elle diverge. Si* $l = 1$ *le test ne permet pas de conclure.*

- **Le test de Cauchy.** *On calcule, si elle existe, la limite suivante*

  $$l := \lim_{n\to+\infty}\left(|u_n|\right)^{1/n} .$$

  Si $l < 1$ *la série* S *converge. Si* $l > 1$ *elle diverge. Si* $l = 1$ *le test ne permet pas de conclure.*

La démonstration de la proposition repose sur la comparaison avec des séries géométriques. C'est un bon exercice.

Remarque 1.4. *Les séries de Riemann sont des exemples pour lesquels les tests de d'Alembert et de Cauchy ne fonctionnent pas.*

1.6 Exercices

Exercice 1.1. On considère la série

$$\sum_{n\geq 2} u_n \ , \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Montrer que la somme partielle

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$$

peut s'écrire sous une forme simple. En déduire que la série de terme général u_n converge et calculer sa somme.

Exercice 1.2. Démontrer que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

est convergente et calculer sa somme.

Exercice 1.3. Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{5^n} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} 5^{-2n} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3i)^n}{2^{2n}} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3^{n-1}}{5^{n+1}} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n/2} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(1+i)^n}{2^{n+1}}$$

Exercice 1.4. Etudier la convergence des séries de terme général u_n suivantes :

$$u_n = \frac{1}{n2^n} \ , \ n \geq 1 \qquad u_n = \frac{\ln(n)}{n} \ , \ n \geq 1 \qquad u_n = \frac{\sin^2 n}{3^n} \ , \ n \geq 0 \qquad u_n = e^{1-2n} \ , \ n \geq 0$$

$$u_n = \frac{2+\cos n}{n^{3/2}} \ , \ n \geq 1 \qquad u_n = \frac{2+\cos n}{\sqrt{n}} \ , \ n \geq 1 \qquad u_n = \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \ , \ n \geq 0$$

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \ , \ \alpha > 0 \ , \ n \geq 1 \qquad u_n = \frac{a^n \ln(n)}{n^2} \ , \ a > 0 \ , \ a \neq 1 \ , \ n \geq 2$$

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \ , \ n \geq 1 \qquad u_n = \left(\frac{n+2}{3n}\right)^n \ , \ n \geq 1$$

$$u_n = \frac{n^p}{a^n} \ , \ a \in \mathbb{R}^{+*} \ , \ p \in \mathbb{N}^* \ , \ n \geq 0 \qquad u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \ , \ n \geq 1$$

$$u_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} \ , \ n \geq 1 \qquad u_n = \frac{\ln(n)}{n^2} \ , \ n \geq 1 \qquad u_n = \frac{1}{\ln(n)} \ , \ n \geq 2$$

Chapitre 2

Suites et séries de fonctions

Dans ce chapitre, on voit les résultats généraux concernant les suites et les séries de fonctions à une variable, leur convergence, la continuité de la somme, la dérivation et l'intégration terme à terme. Commençons par fixer les notations. On travaille sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$, on précisera si nécessaire). On étudie la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ elle-même ainsi que la série associée

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \, .$$

On notera les sommes partielles

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \, .$$

2.1 Suites de fonctions

Il existe trois notions de convergence différentes pour les suites de fonctions, la convergence ponctuelle en un point donné, la convergence simple et la convergence uniforme.

Définition 2.1 (Convergence en un point)**.** *Soit $x \in I$, on dit que la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge au point x si et seulement si la suite $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$.*

Définition 2.2 (Convergence simple sur I)**.** *On dit que la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ si pour tout $x \in I$, la suite numérique $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$, i.e.*

$$\forall x \in I \, , \; \forall \varepsilon > 0 \, , \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \, ; \; \forall k \geq n_0 \, , \; |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \, . \tag{2.1}$$

Remarque 2.1. *Vérifier qu'une suite de fonction converge simplement sur I revient simplement à montrer que pour tout $x \in I$, la suite $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente. La fonction f est alors définie en tout point de I par*

$$f(x) = \lim_{k\to+\infty} f_k(x) \, .$$

Définition 2.3 (Convergence uniforme.)**.** *On dit que la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ si dans le critère (2.1) on peut choisir n_0 indépendemment de x, i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,;\ \forall x \in I\,,\ \forall k \geq n_0\,,\ |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

Ceci revient exactement à dire que

$$\lim_{k\to+\infty} \sup_{x\in I} |f_k(x) - f(x)| = 0\,.$$

Proposition 2.1. *La convergence uniforme implique la convergence simple. La réciproque est fausse.*

Preuve. Elle est une conséquence immédiate des définitions. □

Le théorème suivant est un résultat essentiel.

Théorème 2.1. *Si une suite de fonctions continues sur un intervalle converge uniformément sur cet intervalle, sa limite y est continue.*

La convergence uniforme a une autre conséquence importante.

Théorème 2.2 (de la double limite)**.** *Soit $I = (\alpha, a[$ avec $-\infty \leq \alpha < a \leq +\infty$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur I telle que*

1. *$f_n \to f$ uniformément sur I ;*
2. *pour chaque $n \in \mathbb{N}$*
   $$\lim_{x\to a} f_n(x)$$
   existe dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on la note l_n.

Alors la suite l_n converge vers l dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on a

$$l = \lim_{x\to a} f(x)\,.$$

On peut aussi énoncer un résultat similaire sur un intervalle $]b, \beta)$. Ce théorème sera très utile pour vérifier qu'on n'a pas convergence uniforme sur un intervalle.

Exemples.

- Soit $I = [0, 1]$ et la suite $f_n(x) = x^n$. La suite converge simplement sur $[0, 1]$; on a

  $$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \left| \begin{array}{l} 0 \text{ si } x \in [0, 1[\,, \\ 1 \text{ si } x = 1\,. \end{array} \right.$$

  La fonction limite est donc la fonction f définie par $f(x) = 0$ si $x \in [0, 1[$ et $f(1) = 1$. Les fonctions f_n sont continues sur $[0, 1]$ et f n'est pas continue en 1 donc on n'a pas convergence uniforme sur $[0,1]$. Par contre on a convergence uniforme sur $[0,a]$ pour tout $a \in]0,1[$. En effet,

$$\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,a]} x^n = a^n \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty\,.$$

A noter qu'on n'a pas non plus convergence uniforme sur $[0,1[$. Cela vient du fait que

$$\sup_{x\in[0,1[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1[} x^n = \sup_{x\in[0,1]} x^n = 1\,.$$

On peut aussi le voir en appliquant le Théorème de la double limite si on veut.

- Soit $I = \mathbb{R}$ et $f_n(x) = 1 + \frac{x}{n}$. La suite f_n converge simplement vers 1 sur $\mathbb{R}$ mais pas uniformément. Par contre on a convergence uniforme sur $[-A,A]$ pour tout $A > 0$, en effet

$$\sup_{x\in[-A,A]} |f_n(x) - 1| = \sup_{x\in[-A,A]} \left|\frac{x}{n}\right| = \frac{A}{n} \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty\,,$$
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 1| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{x}{n}\right| = +\infty \to +\infty \text{ lorsque } n \to +\infty\,.$$

2.2 Séries de fonctions

Pour les séries de fonctions, nous avons les trois mêmes types de convergence que pour les suites de fonctions mais il y a deux notions de convergences supplémentaires : la convergence absolue et la convergence normale. Voyons ces cinq types en détails.

Définition 2.4 (Convergence en un point.)**.** *Soit $x \in I$, on dit que la série $S(x)$ converge si et seulement si la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$. On a le critère de Cauchy de convergence en un point qui vient directement du critère de Cauchy de convergence de la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$: la série $S(x)$ converge si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,;\ \forall n \geq n_0\,,\ \forall p \in \mathbb{N}\,,\ |\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x)| < \varepsilon\,.$$

Dans ce cas, $S(x)$ est définie comme la limite de la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 2.5 (Convergence simple sur I.)**.** *On dit que la série S converge simplement sur I si la série $S(x)$ converge en tout point x de I. Ceci équivaut à dire que*

$$\forall x \in I\,,\ \forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,;\ \forall n \geq n_0\,,\ \forall p \in \mathbb{N}\,,\ |\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x)| < \varepsilon\,. \tag{2.2}$$

Définition 2.6 (Convergence absolue sur I.)**.** *On dit que la série S converge absolument sur I si la série*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |f_k(x)|$$

converge simplement sur I. Ceci équivaut à dire que

$$\forall x \in I\,,\ \forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,;\ \forall n \geq n_0\,,\ \forall p \in \mathbb{N}\,,\ \sum_{k=n}^{n+p} |f_k(x)| < \varepsilon\,.$$

Un type de convergence plus fort est la convergence uniforme qui sera une notion fondamentale pour étudier la continuité et la dérivabilité des séries de fonctions.

Définition 2.7 (Convergence uniforme.)**.** *On dit que la série S converge uniformément sur I si dans le critère (2.2) on peut choisir n_0 indépendemment de x, i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,;\ \forall x \in I\,,\ \forall n \geq n_0\,,\ \forall p \in \mathbb{N}\,,\ |\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x)| < \varepsilon\,.$$

La convergence uniforme est souvent difficile à vérifier. Il existe un type de convergence plus fort encore mais qui est souvent nettement plus facile à vérifier, c'est la convergence normale.

Définition 2.8 (Convergence normale.)**.** *On dit que la série S converge normalement sur I s'il existe une suite numérique $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à terme positif, telle que*

1. *$|f_k(x)| \leq u_k$ $\forall x \in I$, $\forall k \in \mathbb{N}$,*
2. *la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ converge.*

On a les implications suivantes

convergence normale $\Rightarrow$ convergence uniforme $\Rightarrow$ convergence simple ,
convergence normale $\Rightarrow$ convergence absolue $\Rightarrow$ convergence simple ,

les implications réciproques étant fausses. De plus il n'y a d'implication dans aucun des deux sens entre convergence uniforme et convergence absolue.

Le théorème suivant est une conséquence directe du Théorème 2.1.

Théorème 2.3 (Continuité de la série)**.** *Si pour tout $k \in \mathbb{N}$ la fonction f_k est continue sur I et si la série S converge uniformément sur I, alors S est continue sur I.*

Exemple fondamental de série convergeant simplement mais pas normalement. Soit $-\infty < a < b < +\infty$. On considère une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1. On suppose que la série
$$S(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k(x)$$
converge absolument sur $]a,b[$ mais ne converge pas absolument en b. Alors la série ne converge pas normalement sur $]a,b[$.

2. Si on suppose qu'on a convergence sur $]a,b[$ mais pas en b, alors on n'a pas convergence uniforme sur $]a,b[$.

Pour le premier point, l'argument est simple, on considère le meilleur majorant de $|f_k|$ sur $]a,b[$: son sup. En utilisant la continuité de f_k sur $[a,b]$, on a :
$$\sup_{x\in]a,b[} |f_k(x)| = \max_{x\in[a,b]} |f_k(x)| \geq |f_k(b)|\,.$$
Il suit que la série de terme général $\sup_{x\in]a,b[} |f_k(x)|$ diverge. Tout autre majorant de $|f_k|$ sur $]a,b[$ sera encore pire. On n'a donc pas convergence normale sur $]a,b[$.

Pour le second point, c'est une conséquence du théorème de la double limite, dans une version adaptée aux séries.

Théorème 2.4 (de la double limite pour les séries de fonctions)**.** *Soit $I = (\alpha, a[$ avec $-\infty \leq \alpha < a \leq +\infty$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur I telle que*

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur I ;

2. pour chaque $n \in \mathbb{N}$
$$\lim_{x\to a} f_n(x)$$
existe dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on la note l_n

Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} l_n$ converge et on a
$$\lim_{x\to a} \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} l_n\,.$$

On peut aussi énoncer un résultat similaire sur un intervalle $]b, \beta)$.

On a un théorème de dérivation terme à terme qui est une conséquence un peu moins directe.

Théorème 2.5 (Dérivation terme à terme)**.** *On suppose que :*

1. pour tout $k \in \mathbb{N}$ la fonction f_k est dérivable sur I ;

2. il existe $x_0 \in I$ tel que la série $S(x_0)$ converge ;

3. la série $\sum_{k=0}^{+\infty} f'_k$ converge uniformément sur I.

Alors : S est dérivable sur I et
$$\forall x \in I\,,\ S'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f'_k(x)\,.$$

2.3 Exercices

Exercice 2.1. On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = 1 + \frac{x}{n}\,.$$

1. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sur $\mathbb{R}$.

2. Y a-t-il convergence uniforme sur tout intervalle $[-A, A]$?

Exercice 2.2. On considère les suites de fonctions

$$\begin{aligned} f_n(x) &= e^{-nx} && \text{définie sur } [1, +\infty[\,, \\ g_n(x) &= \sin\left(\frac{x}{n}\right) && \text{définie sur } \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Etudier leur convergence simple et leur convergence uniforme.

Exercice 2.3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction f sur un intervalle I. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si les f_n sont croissantes, alors f aussi.

2. Si les f_n sont strictement croissantes, alors f aussi.

3. Si les f_n sont périodiques, alors f aussi.

4. Si les f_n sont continues en a, alors f aussi.

Exercice 2.4. Étudier la convergence, éventuellement uniforme, des suites de fonctions définies par :

1. $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$.

2. $g_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$ sur $[0, 1]$.

3. $h_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.5. Montrer que les hypothèses du théorème 2.5 impliquent la conclusion *(i)* du théorème.

Exercice 2.6. Déterminer le domaine de convergence des séries de fonctions suivantes :

$$\sum_{n\geq 0} 3^n x^n \qquad \sum_{n\geq 1} n^2 e^{-nx} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x} \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{1+x^{2n}} \qquad \sum_{n\geq 0} x^n(1-x)^n$$

Exercice 2.7. Démontrer que les séries suivantes convergent uniformément sur le domaine D :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^2+x^2} \qquad D=\mathbb{R} \qquad\qquad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{n+1} \qquad D=[-1,1]$$

$$\sum_{n\geq 0} x^n(1-x)^n \qquad D=[0,1] \qquad\qquad \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2+\operatorname{Arctg}(nx)} \qquad D=R$$

Exercice 2.8.

1. Démontrer que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$$

converge si et seulement si $x \geq 0$.

2. Soit $S(x)$ sa somme, démontrer que $S(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $]0,+\infty[$.

Exercice 2.9. On considère la série de fonctions de terme général

$$u_n(x) = \frac{\sin(n^2x)}{n^2}\,,\ n \geq 1\,.$$

Montrer que cette série converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire de la série de terme général u_n'?

Exercice 2.10. On considère la fonction f définie par la série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)-1\right)\sin(nx)\,.$$

1. Quel est le domaine de définition de f?
2. Montrer que f est continue sur son domaine de définition.
3. Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition.

Exercice 2.11.

1. Montrer que la série de terme général

$$u_n(x) = ne^{-nx}$$

est uniformément convergente sur tout intervalle $[a,+\infty[$.

2. Est-elle uniformément convergente sur $[0,+\infty[$?
3. Calculer sa somme.

Exercice 2.12. Soit la série de foncrions

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1 + (nx)^2}\,.$$

1. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la série $S(x)$ est-elle convergente?
2. Montrer que S est continue sur $]0, +\infty[$.

Chapitre 3

Intégrale de Riemann

Dans tout le chapitre on travaillera sur un intervalle $[a,b]$ où $-\infty < a < b < +\infty$.

3.1 Définition de l'intégrale de Riemann

Définition 3.1 (Subdivision)**.** *On appelle subdivision de $[a,b]$ une famille finie et strictement croissante de nombres $\mathcal{S} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n\}$ tels que*

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

On appelle pas de la subdivision et on note $\delta(\mathcal{S})$ le nombre

$$\delta(\mathcal{S}) := \max\{\ (x_{k+1} - x_k)\,,\ 0 \leq k \leq n-1\}\,.$$

L'intégrale de Riemann va être définie sur une classe de fonctions qu'on appelle continues par morceaux sur $[a,b]$. Le cadre général est en fait plus large mais plus difficile à définir et les fonctions continues par morceaux sont le cadre le plus usuel pour cette intégrale.

Définition 3.2. *Une fonction $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dite continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\{x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n\}$ de $[a,b]$ telle que f soit continue sur chaque intervalle ouvert $]x_k, x_{k+1}[$ et admette des limites finies à gauche et à droite en chaque x_k (simplement à droite en x_0 et à gauche en x_n). Autrement dit les seules discontinuités de f sont de première espèce et sont en nombre fini.*

On va commencer par définir l'intégrale pour des fonctions continues par morceaux positives.

Définition 3.3. *Soit f une fonction continue par morceaux et positive sur $[a,b]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la subdivision $\{x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_{2^n-1}, x_{2^n}\}$ de $[a,b]$ par*

$$x_k = a + k\frac{b-a}{2^n}\,.$$

On définit deux suites :

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{b-a}{2^n} \inf\{f(x)\,;\; x \in]x_k, x_{x+1}[\}\,, \\ A_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{b-a}{2^n} \sup\{f(x)\,;\; x \in]x_k, x_{x+1}[\}\,. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $a_n \leq A_n$, la suite a_n est croissante, la suite A_n est décroissante et de plus $A_n - a_n$ tend vers 0. Leur limite commune est appelée l'intégrale de f entre a et b et est notée

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,.$$

On étend l'intégrale à des fonctions de signe quelconque puis à des fonctions complexes de la façon suivante.

Définition 3.4. *Soit une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs réelles. On définit sa partie positive f^+ et sa partie négative f^- de la façon suivante*

$$f^+(x) := \max\{0, f(x)\}\,,\;\; f^-(x) := \max\{0, -f(x)\}\,.$$

Les fonctions f^+ et f^- sont positives et sont également continues par morceaux sur $[a,b]$. On définit alors l'intégrale de f entre a et b de la façon suivante

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \int_a^b f^+(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f^-(x)\mathrm{d}x\,.$$

Soit maintenant f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Sa partie réelle et sa partie imaginaire sont continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs réelles. On définit

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \int_a^b \mathrm{Re}\, f(x)\mathrm{d}x + i\int_a^b \mathrm{Im}\, f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Les sommes de Riemann sont une autre façon de retrouver l'intégrale de Riemann. On les utilise notamment pour calculer certaines séries en calculant l'intégrale vers laquelle elles convergent.

Définition 3.5 (Somme de Riemann)**.** *Soit $\mathcal{S} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n\}$ une subdivision de $[a,b]$. Soit une fonction $f\;:\;[a,b] \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ bornée. On appelle somme de Riemann de f par rapport à $\mathcal{S}$ une somme de la forme*

$$\mathcal{R}(f,\mathcal{S}) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(c_k)\,,$$

où pour $0 \leq k \leq n-1$, c_k est un nombre compris entre x_k et x_{k+1}.

Théorème 3.1. *Soit $f\;:\;[a,b] \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction continue, alors lorsque le pas de la subdivision $\mathcal{S}$ tend vers 0, on a*

$$\lim_{\delta(\mathcal{S})\to 0} \mathcal{R}(f,\mathcal{S}) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t\,.$$

3.2 Calcul et propriétés

Tout ça définit certes l'intégrale mais ne permet pas forcément de la calculer. Le calcul de l'intégrale repose sur une propriété fondamentale que nous énonçons maintenant.

Théorème 3.2. *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ et soit F une primitive de f sur $[a,b]$. Alors*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,.$$

En particulier, la fonction

$$\phi(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$$

est la primitive de f sur $[a,b]$ qui s'annule en a.

L'intégrale de Riemann est orientée, c'est-à-dire qu'on considère qu'on intègre une fonction sur un intervalle en choisissant un sens de parcours. Changer de sens de parcours change le signe de l'intégrale. On définit donc

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,.$$

L'intégrale de Riemann a les propriétés suivantes.

- Linéarité : soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et λ et μ deux nombres (réels ou complexes). Alors

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\,.$$

- Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $c \in]a,b[$ alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x\,.$$

- Croissance : soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on suppose que $f \leq g$, alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\,.$$

- Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\,.$$

Pour calculer des intégrales, le calcul direct de primitive est parfois difficile. Deux outils fondamentaux permettent de simplifier certaines intégrales pour ensuite les calculer.

Théorème 3.3 (Intégration par parties)**.** *Soit u et v deux fonctions continûment dérivables sur $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x\,,$$

où

$$[u(x)v(x)]_a^b := u(b)v(b) - u(a)v(a)\,.$$

Théorème 3.4 (Changement de variables)**.** *Soit $[a,b]$ et $[c,d]$ deux intervalles fermés bornés et ϕ une fonction bijective et continûment dérivable de $[c,d]$ sur $[a,b]$ telle que $\phi(c) = a$ et $\phi(d) = b$. Alors si f est continue par morceaux sur $[a,b]$ on a*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_c^d f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t\,.$$

3.3 Quelques dérivées usuelles

Voici une liste de dérivées classiques, c'est-à-dire aussi une liste de primitives classiques

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}\,,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x) = e^x\,,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \frac{1}{x}\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = \cos x\,,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) = -\sin x\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x) = \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2\,,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cot x) = \frac{-1}{(\sin x)^2} = -1 - (\cot x)^2\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arccos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

3.4 Exercices

Exercice 3.1. Trouver toutes les primitives des fonctions suivantes en indiquant leur domaine de définition :

$$f_1(x) = \frac{2x}{1+x^2}\,,\ f_2(x) = \cos(x)e^{\sin x}\,,\ f_3(x) = \frac{-1}{1+x^2}\,,\ f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}\,.$$

Exercice 3.2. Calculer l'intégrale suivante par intégration par parties

$$\int_2^x \ln(t)\mathrm{d}t\,.$$

En déduire toutes les primitives de $\ln x$.

Exercice 3.3. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'intégrations par parties :

$$\int_1^2 x \ln x \mathrm{d}x\,, \quad \int_0 \pi \cos x \sin(2x) \mathrm{d}x\,, \quad \int_0^2 x^2 e^{-x} \mathrm{d}x\,, \quad \int_0^1 \arctan x \mathrm{d}x\,.$$

Exercice 3.4. Calculer les intégrales suivantes à l'aide de changements de variables :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\,, &\qquad \text{on posera } x = \sin t\,, \\ \int_e^{e^2} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}\,, &\qquad \text{on posera } x = e^t\,, \\ \int_1^3 \frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x\,, &\qquad \text{on posera } u = e^x\,. \end{aligned}$$

Exercice 3.5. Montrer que l'intégrale suivante vaut zéro :

$$\int_{-7}^7 x e^{x^4} \mathrm{d}x\,.$$

Indication : on pourra couper l'intégrale en deux sur $[-7, 0]$ et sur $[0, 7]$ et dans l'une des deux intégrales faire un changement de variables $x \mapsto -x$.

Chapitre 4

Intégrales généralisées

Dans ce chapitre, nous allons étudier une extension de la notion d'intégrale usuelle, qui est définie par une notion de convergence.

4.1 Définitions

Nous commençons par poser la définition générale de la convergence d'une intégrale généralisée.

Définition 4.1. *On a deux cas typiques.*

1. *Nous considérons une fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, définie et continue par morceaux sur un intervalle $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$. On dit que l'intégrale généralisée*
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
converge si la limite suivante
$$\lim_{y \to b} \int_a^y f(x)\mathrm{d}x$$
existe dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On définit alors
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{y \to b} \int_a^y f(x)\mathrm{d}x\,.$$

2. *On peut également considérer une fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, définie et continue par morceaux sur un intervalle $]a, b]$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$. On dit alors que l'intégrale généralisée*
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
converge si la limite suivante
$$\lim_{y \to a} \int_y^b f(x)\mathrm{d}x$$

existe dans $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *et on définit*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{y\to a}\int_y^b f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Remarque 4.1. *On peut aussi considérer des intégrales généralisées des deux côtés, du type*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

où la fonction f *est définie et continue par morceaux sur* $]a,b[$*. Dans ce cas, on dira que l'intégrale converge si les deux intégrales généralisées*

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x \;\; et \;\; \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

convergent pour un c *quelconque choisi dans* $]a,b[$*.*

4.2 Exemples fondamentaux

Comme pour les séries, on a des exemples fondamentaux d'intégrales généralisées convergentes et divergentes.

Théorème 4.1. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et soit* $a > 0$*.*

1. *L'intégrale*

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$*.*

2. *L'intégrale*

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$$

converge si et seulement si $\alpha < 1$*.*

3. *En particulier, l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$$

ne converge pour aucune valeur de α*.*

Preuve. Il s'agit de calculs directs en appliquant la définition de la convergence. Commençons par le premier cas. Soit $y > a$, on a pour $\alpha \neq 1$

$$\int_a^y \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_a^y = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{y^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right)$$

et

$$\lim_{y\to+\infty}\int_a^y \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \left|\begin{array}{l} \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}} \text{ si } \alpha > 1\,, \\ +\infty \text{ si } \alpha < 1\,. \end{array}\right.$$

Pour $\alpha = 1$,

$$\int_a^y \frac{\mathrm{d}x}{x} = [\ln(x)]_a^y = \ln y - \ln a \to +\infty \text{ lorsque } y \to +\infty\,.$$

Le second point s'établit de façon similaire. Soit $0 < y < a$, on a pour $\alpha \neq 1$

$$\int_y^a \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_y^a = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{a^{\alpha-1}} - \frac{1}{y^{\alpha-1}}\right)$$

et

$$\lim_{y\to+\infty}\int_y^a \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \left|\begin{array}{l} +\infty \text{ si } \alpha > 1\,, \\ \frac{1}{(1-\alpha)a^{\alpha-1}} \text{ si } \alpha < 1\,. \end{array}\right.$$

Pour $\alpha = 1$,

$$\int_y^a \frac{\mathrm{d}x}{x} = [\ln(x)]_y^1 = \ln a - \ln y \to +\infty \text{ lorsque } y \to 0\,.$$

Ceci clôt la démonstration. □

L'autre exemple fondamental est celui de l'exponentielle, qui est l'analogue des séries géométriques pour les séries numériques. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et $a \in \mathbb{R}$ donné, l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} e^{-\alpha x}\mathrm{d}x$$

converge si et seulement si $\alpha > 0$ et dans ce cas on a

$$\int_a^{+\infty} e^{-\alpha x}\mathrm{d}x = \frac{e^{-\alpha a}}{\alpha}\,.$$

De même l'intégrale

$$\int_{-\infty}^a e^{-\alpha x}\mathrm{d}x$$

converge si et seulement si $\alpha < 0$ et dans ce cas on a

$$\int_{-\infty}^a e^{-\alpha x}\mathrm{d}x = \frac{-e^{-\alpha a}}{\alpha}\,.$$

4.3 Etude de convergence

Nous avons pour les intégrales généralisées à peu près les mêmes méthodes que pour les séries afin d'étudier la convergence.

4.3.1 Cas des fonctions positives

Dans le cas *(1)*, si la fonction f est positive, alors l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

converge si et seulement si

$$\int_a^y f(x)\mathrm{d}x$$

est majorée indépendemment de $y \in [a, b[$, c'est-à-dire si et seulement si

$$\exists C > 0\,;\ \forall y \in [a, b[\,,\ \int_a^y f(x)\mathrm{d}x \leq C\,.$$

De même dans le cas *(2)*, si la fonction f est positive, alors l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

converge si et seulement si

$$\int_y^b f(x)\mathrm{d}x$$

est majorée indépendemment de $y \in]a, b]$, c'est-à-dire si et seulement si

$$\exists C > 0\,;\ \forall y \in]a, b]\,,\ \int_y^b f(x)\mathrm{d}x \leq C\,.$$

Ces remarques viennent simplement du fait qu'une fonction continue croissante sur $[a, b[$ admet une limite en b si et seulement si elle est majorée sur $[a, b[$. De même une fonction décroissante et continue sur $]a, b]$ admet une limite en a si et seulement si elle est majorée sur $]a, b]$. Ceci a une conséquence directe qui est la méthode de comparaison ; elle est tout aussi fondamentale que pour les séries.

Théorème 4.2. *Soit deux fonctions f et g à valeurs positives, définies et continues par morceaux sur $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$. On suppose que :*

1. *l'intégrale généralisée*

   $$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

   converge ;

2. *pour tout $x \in [a, b[$, $f(x) \leq g(x)$;*

alors l'intégrale généralisée

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

converge et on a

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\,.$$

De même, si on suppose que :

1. *l'intégrale généralisée*

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

   diverge ;

2. *pour tout* $x \in [a, b[$, $f(x) \geq g(x)$ *;*

alors l'intégrale généralisée

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

diverge.

Remarque 4.2. *On peut bien sûr écrire des énoncés analogues sur* $]a, b]$.

On a aussi une règle des équivalents pour les intégrales généralisées de fonctions positives.

Définition 4.2 (Fonctions équivalentes)**.** *Soit deux fonctions* f *et* g *à valeurs positives, définies, continues par morceaux et ne s'annulant pas sur* $[a, b[$, $-\infty < a < b \leq +\infty$. *On dit que* f *et* g *sont équivalentes en* b *et on écrit* $f \underset{(b)}{\simeq} g$, *si*

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\,.$$

Théorème 4.3 (Règle des équivalents)**.** *Soit deux fonctions* f *et* g *à valeurs positives, définies, continues par morceaux sur* $[a, b[$, $-\infty < a < b \leq +\infty$. *On suppose que* $f \underset{(b)}{\simeq} g$. *Alors les intégrales généralisées*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \text{ et } \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

sont de même nature.

Remarque 4.3. *On a un énoncé analogue sur* $]a, b]$, $-\infty \leq a < b < +\infty$.

4.3.2 Cas des fonctions à valeurs réelles ou complexes

Comme pour les séries, on va tout d'abord se ramener au cas des fonctions à valeurs positives en travaillant avec la valeur absolue ou le module de la fonction à intégrer. On énonce les résultats sur $[a,b[$, on a des énoncés analogues sur $]a,b]$.

Définition 4.3 (Convergence absolue ou intégrabilité)**.** *Soit f une fonction réelle ou complexe, définie et continue par morceaux sur un intervalle $[a,b[$, $-\infty < a < b \leq +\infty$. On dira que l'intégrale*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

converge absolument, ou encore que f est intégrable sur $[a,b[$, si l'intégrale

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

est convergente.

Proposition 4.1. *Si l'intégrale*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

converge absolument, alors elle converge. Autrement dit

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \text{ converge } \Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \text{ converge.}$$

Certaines intégrales sont convergentes sans être absolument convergentes. On les appelle parfois intégrales oscillantes. Le critère d'Abel permet de traiter certaines intégrales de ce type.

Théorème 4.4 (Critère d'Abel)**.** *Soit $-\infty < a < b \leq +\infty$. On considère une fonction $f : [a,b[\to \mathbb{R}^+$ et une fonction $g : [a,b[\to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, toutes deux continues par morceaux sur $[a,b[$. On suppose que*

1. *f est décroissante et $\lim_{x\to b} f(x) = 0$;*
2. *Il existe $C > 0$ tel que*

$$\forall x, y \in [a,b[\,, \quad \left|\int_x^y g(t)\mathrm{d}t\right| \leq C\,.$$

Alors, l'intégrale

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

est convergente.

4.4 Interversion limite-intégrale et série-intégrale

Le premier outil pour intervertir limite et intégrale est la convergence uniforme. On a un théorème avec des hypothèses assez fortes qui se démontre simplement à partir des définitions.

Théorème 4.5. *Soit $-\infty < a < b < +\infty$. On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui converge uniformément vers une fonction f sur $[a,b]$. On a vu qu'alors f est continue sur $[a,b]$ et de plus, on a*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,.$$

On a aussi une version pour les séries qui est une conséquence directe du théorème pour les suites.

Corollaire 4.1. *Soit $-\infty < a < b < +\infty$. On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que la série*

$$S(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$$

converge uniformément sur $[a,b]$. Alors la somme S de la série est continue sur $[a,b]$ et de plus, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x\,.$$

On a des théorèmes beaucoup plus puissants et aussi beaucoup plus difficiles à démontrer (on les admettra) qui permettent de traiter de la même façon intégrales classiques et généralisées pour intervertir limite et intégrale ou série et intégrale.

Théorème 4.6 (de convergence dominée pour les suites)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que :*

1. *la suite f_n converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I ;*

2. *il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que*
$$\forall n\in\mathbb{N}\,,\ \forall x\in I\,,\ |f_n(x)| \le g(x)\,.$$

Alors f est intégrable sur I, de même f_n est intégrable sur I pour tout n, et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(x)\mathrm{d}x = \int_I f(x)\mathrm{d}x\,.$$

On en tire une version pour les séries.

Théorème 4.7 (de convergence dominée pour les séries)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que :*

1. *la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur I et sa somme est une fonction S continue par morceaux sur I ;*

2. *il existe une fonction g continue par morceaux positive et intégrable sur I telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \forall x \in I\,,\quad \left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| \leq g(x)\,.$$

Alors S est intégrable sur I et

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_I f_n(x)\mathrm{d}x = \int_I S(x)\mathrm{d}x\,.$$

On a aussi un autre théorème utile et plus simple à utiliser :

Théorème 4.8. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que :*

1. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable sur I ;*

2. *la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur I et sa somme est une fonction S continue par morceaux sur I ;*

3. *la série numérique*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_I |f_n(x)|\mathrm{d}x$$

converge.

Alors S est intégrable sur I, la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_I f_n(x)\mathrm{d}x$$

converge et

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_I f_n(x)\mathrm{d}x = \int_I S(x)\mathrm{d}x\,.$$

4.5 Exercices

Exercice 4.1. Etudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

$$\int_0^1 \frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t \quad , \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan t \mathrm{d}t \quad , \qquad \int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\mathrm{d}t\,.$$

Exercice 4.2. Etudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^2)^{1/2}} \quad , \qquad \int_1^{+\infty} \mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \quad , \qquad \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\mathrm{d}t\,,$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \quad , \qquad \int_0^1 \frac{\tan t - 1}{t^{5/2}\sin t}\mathrm{d}t \quad , \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)\,(\cos(t)-1)}{\tan(t)t^{5/2}}\,.$$

Exercice 4.3. Etudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}\mathrm{d}x \quad , \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{1/4}(x^{1/2}+x^{4/5})}\,.$$

Exercice 4.4. Montrer la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\,.$$

Exercice 4.5. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $[0,1]$ par : $f_n(0)=0$, $f_n(1/n)=\alpha_n\in\mathbb{R}$, f_n affine sur $[0,1/n]$ et sur $[1/n,2/n]$ et $f_n=0$ sur $[2/n,1]$. On tracera le graphe de f_n.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

2. On suppose que $\alpha_n = 1\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. La convergence de (f_n) vers 0 est-elle uniforme sur $[0,1]$? Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x\,,.$$

3. Etudier de même les cas : $\alpha_n = n$ et $\alpha_n = 1/n$.

Exercice 4.6. Soit la suite de fonctions définie par

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\,,\ \forall x\in\mathbb{R}^*\,,\ u_n(x)=\ln\left(x+\frac{1}{n}\right)\,.$$

1. Sur quel intervalle (u_n) est-elle simplement convergente? Quelle est sa limite?

2. Démontrer que la convergence est uniforme sur $[1,+\infty[$.

3. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^2 u_n(x)\mathrm{d}x\,.$$

Exercice 4.7. Soit les fonctions suivantes définies sur $]0,+\infty[$:

$$f(x)=\frac{1}{x^2}\,,\;\; g(x)=\frac{(1-\cos x)e^{-x}}{x^{3/2}\ln(1+x)}\,.$$

1. L'intégrale de f sur $]0,+\infty[$ est-elle convergente?
2. Trouver un équivalent de g au voisinage de 0.
3. L'intégrale de g sur $]0,+\infty[$ est-elle convergente?

Exercice 4.8. Etudier la convergence des intégrales suivantes

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{3/2}}\,,\;\; \int_0^{+\infty}\frac{x^{1/2}+x^2}{x^{3/4}+x^3+x^4}\mathrm{d}x\,,\;\; \int_0^{+\infty}\frac{\sin x(\cos x-1)}{x^4e^x}\mathrm{d}x\,,$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3}{x^2+x^6}\mathrm{d}x\,,\;\; \int_0^{+\infty}\frac{\sin x(\cos x-1)}{x^2+x^4}\mathrm{d}x\,,\;\; \int_0^{+\infty}g(x)=\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\mathrm{d}x\,.$$

Exercice 4.9. Etudier l'intégrabilité des fonctions suivantes sur les domaines spécifiés :

$$f_1(t)=\frac{1}{1-t^2}\text{ sur }[0,1]\,,\;\; f_2(t)=\mathrm{tg}\,t\text{ sur }[0,\pi/2]\,,\;\; f_3(t)=\frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\text{ sur }[0,1[\,,$$

$$f_4(t)=\frac{1}{t(1+t^2)^{1/2}}\text{ sur }]1,+\infty[\,,\;\; f_5(t)=\mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{t}\right)\text{ sur }]1,+\infty[\,,$$

$$f_6(t)=t^2e^{-t}\text{ sur }]0,+\infty[\,,\;\; f_7(t)=\frac{1}{\ln t}\text{ sur }]0,1[\,,\;\; f_8(t)=\frac{\mathrm{tg}t-1}{t^{5/2}\sin t}\text{ sur }]0,1[\,,$$

$$f_9(t)=\frac{\sin(t)\,(\cos(t)-1)}{\mathrm{tg}(t)t^{5/2}}\text{ sur }]0,+\infty[\,,\;\; f_{10}(t)=\frac{1-\cos(x)}{x^2}\text{ sur }]0,+\infty[\,,$$

$$f_{11}(t)=\frac{1}{x^{1/4}(x^{1/2}+x^{4/5})}\text{ sur }]0,+\infty[\,.$$

Chapitre 5

Intégrales dépendant d'un paramètre

5.1 Intégrales de Riemann dépendant d'un paramètre

Théorème 5.1 (Continuité)**.** *Soit* $[a, b]$ *un intervalle fermé borné et* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*. Soit*

$$f : [a, b] \times I \longrightarrow \mathbb{R} \ (ou\ \mathbb{C})$$

et soit F *la fonction définie sur* I *par*

$$F(x) = \int_a^b f(t, x)\mathrm{d}t\,.$$

Si f *est continue sur* $[a, b] \times I$*, alors* F *est continue sur* I*.*

Théorème 5.2 (Dérivabilité)**.** *Soit* $[a, b]$ *un intervalle fermé borné et* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*. Soit*

$$f : [a, b] \times I \longrightarrow \mathbb{R} \ (ou\ \mathbb{C})$$

et soit F *la fonction définie sur* I *par*

$$F(x) = \int_a^b f(t, x)\mathrm{d}t\,.$$

On suppose que f *est continue sur* $[a, b] \times I$*, qu'elle admet en tout point de* $[a, b] \times I$ *une dérivée partielle par rapport à* x *et que* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *est continue sur* $[a, b] \times I$ *; alors* F *est dérivable sur* I*, on a*

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\mathrm{d}t\,,\ \forall x \in I$$

et F' *est continue sur* I*.*

5.2 Intégrales généralisées dépendant d'un paramètre

Encore une fois on travaille avec un intervalle $[a, b[$, $-\infty < a < b \leq +\infty$, mais on peut tout aussi bien travailler sur $]b, a]$, $-\infty \leq b < a < +\infty$. Nous allons énoncer des théorèmes analogues aux théorèmes 5.1 et 5.2. Du fait que nous travaillons avec des intégrales généralisées, il faudra vérifier la convergence des intégrales, de façon uniforme par rapport au paramètre x. La convergence uniforme d'une intégrale généralisée s'exprime de façon différente selon que l'endroit où l'intégrale est généralisée (ici b) est fini ou infini. Nous énonçons la définition dans chacun des deux cas, puis nous donnerons une condition suffisante de convergence uniforme qui est beaucoup plus simple à vérifier et qui est la condition avec laquelle nous travaillerons dans les applications.

Définition 5.1 (Convergence uniforme d'intégrale généralisée)**.** *Soit $-\infty < a < b \leq +\infty$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et*

$$f : [a, b[\times I \longrightarrow \mathbb{R} \ (ou\ \mathbb{C})\,.$$

Soit F la fonction définie sur I par

$$F(x) = \int_a^b f(t, x)\mathrm{d}t\,.$$

1^er^ cas : $b = +\infty$. *On dit que l'intégrale*

$$\int_a^b f(t, x)\mathrm{d}t$$

converge uniformément par rapport à x sur I si

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists A > 0\,,\ \forall x \in I\,,\ \forall t_2 > t_1 \geq A\,,\ \left|\int_{t_1}^{t_2} f(t, x)\mathrm{d}t\right| < \varepsilon\,.$$

2^ème^ cas : $b < +\infty$. *On dit que l'intégrale*

$$\int_a^b f(t, x)\mathrm{d}t$$

converge uniformément par rapport à x sur I si

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\ \forall x \in I\,,\ \forall b - \eta \leq t_1 < t_2 < b\,,\ \left|\int_{t_1}^{t_2} f(t, x)\mathrm{d}t\right| < \varepsilon\,.$$

Nous donnons maintenant une condition suffisante de convergence uniforme qui simple à utiliser.

Définition 5.2 (Convergence normale ou dominée)**.** *Soit $-\infty < a < b \leq +\infty$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et*

$$f : [a, b[\times I \longrightarrow \mathbb{R} \ (ou\ \mathbb{C})\,.$$

Soit F la fonction définie sur I par

$$F(x) = \int_a^b f(t,x)\mathrm{d}t\,.$$

On dit que l'intégrale

$$\int_a^b f(t,x)\mathrm{d}t$$

converge normalement sur I si il existe une fonction $g\,:\,[a,b[\to [0,+\infty[$ telle que

1. *g est intégrable sur $[a,b[$, c'est-à-dire que l'intégrale*

   $$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

   converge

2. *et pour tout $t \in [a,b[$ et pour tout $x \in I$, on a $|f(t,x)| \leq g(x)$.*

Proposition 5.1. *On a les implications suivantes*

- *$\int_a^b f(t,x)\mathrm{d}t$ converge normalement sur $I \Longrightarrow \int_a^b f(t,x)\mathrm{d}t$ converge uniformément sur I,*
- *$\int_a^b f(t,x)\mathrm{d}t$ converge uniformément sur $I \Longrightarrow \int_a^b f(t,x)\mathrm{d}t$ converge pour tout $x \in I$,*
- *$\int_a^b f(t,x)\mathrm{d}t$ converge normalement sur $I \Longrightarrow \int_a^b |f(t,x)|\mathrm{d}t$ converge pour tout $x \in I$.*

Les réciproques sont fausses.

Théorème 5.3. **Continuité.** *Soit $-\infty < a < b \leq +\infty$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et*

$$f : [a,b[\times I \longrightarrow \mathbb{R}\ (ou\ \mathbb{C})\,.$$

Soit F la fonction définie sur I par

$$F(x) = \int_a^b f(t,x)\mathrm{d}t\,.$$

Si f est continue sur $[a,b[\times I$ et si $\int_a^b f(t,x)\mathrm{d}t$ converge uniformément sur I, alors F est continue sur I.

Théorème 5.4. **Dérivabilité.** *Soit $-\infty < a < b \leq +\infty$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et*

$$f : [a,b[\times I \longrightarrow \mathbb{R}\ (ou\ \mathbb{C})\,.$$

Soit F la fonction définie sur I par

$$F(x) = \int_a^b f(t,x)\mathrm{d}t\,.$$

On suppose que

- *f est continue sur $[a, b[\times I$*
- *pour tout $x \in I$, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t,x)\mathrm{d}t$ est convergente*
- *f admet en tout point de $[a, b[\times I$ une dérivée partielle par rapport à x et $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $[a, b[\times I$*
- *$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\mathrm{d}t$ converge uniformément sur I*

alors F est dérivable sur I, on a

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\mathrm{d}t\,,\ \forall x \in I$$

et F' est continue sur I.

Dans certains cas extrêmes, on pourra avoir besoin du théorème suivant. Nous ne l'utiliserons pas cette année, mais le voici pour information.

Théorème 5.5 (Critère d'Abel de convergence uniforme)**.** *Soit $-\infty < a < b \leq +\infty$. Soit*

$$\begin{array}{lcl} \phi & : & [a, b[\times I \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \psi & : & [a, b[\times I \longrightarrow \mathbb{R}\ (ou\ \mathbb{C}) \end{array}$$

des fonctions continues sur $[a, b[\times I$. On suppose que

1. *$\phi(t,x)$ est décroissante en t pour chaque $x \in I$*
2. *$\phi(t,x)$ tend vers zéro, uniformément par rapport à $x \in I$, lorsque t tend vers $+\infty$, c'est-à-dire*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A \in [a, b[\,;\ \forall t \in [A, b[\ \text{on ait}\ \sup_{x \in I} \phi(t,x) < \varepsilon$$

3. *il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, pour tous $y_1, y_2 \in [a, b[$, $y_2 > y_1$, on ait*

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} \psi(t,x)\mathrm{d}t \right| \leq M$$

alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} \phi(t,x)\psi(t,x)\mathrm{d}t$ converge uniformément sur I.

5.3 Exercices

Exercice 5.1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \int_1^2 \frac{\cos t}{t + x^2} \mathrm{d}t \, .$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.2. On considère la fonction F définie pour $t > 0$ par l'intégrale :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x + t} \mathrm{d}t \, .$$

Montrer que F est continue sur $]0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$ et que sa dérivée est continue sur $]0, +\infty[$.

Exercice 5.3. Soit la fonction F définie pour $x \in \mathbb{R}$ par l'intégrale

$$F(x) = \int_0^2 t e^{xt} \mathrm{d}t \, .$$

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $F^{(n)}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ quelconque.
4. Peut-on calculer explicitement $F^{(n)}(x)$ pour tout n et pour tout x?

Exercice 5.4. Soit

$$F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + (x + y)^2} \mathrm{d}x \, , \ y \geq 0 \, .$$

Montrer que F est continue et admet une dérivée continue sur $[0, +\infty[$.

Exercice 5.5. Soit

$$F(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+y)^2} \mathrm{d}x \, , \ y \in \mathbb{R} \, .$$

Montrer que F est continue et admet une dérivée continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.6. Soit

$$F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2} - e^{-yx^2}}{x} \mathrm{d}x \, , \ y > 0 \, .$$

1. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et trouver sa dérivée $F'(y)$.
2. Calculer $F(y)$ pour tout $y > 0$.

Exercice 5.7. Soit
$$G(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{t}\mathrm{d}t\,,\ x > 0\,.$$
Montrer que G est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 5.8. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t$$
converge.

1. Montrer que la transformée de Fourier de f
$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}\mathrm{d}t$$
est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que la transformée de Fourier de f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Si de plus l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|\mathrm{d}t$$
converge, alors montrer que $\hat{f}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée.

Exercice 5.9. On considère pour $t > 0$ la fonction
$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(x+t)}{t^2+x^2}\mathrm{d}x\,.$$

1. La fonction F est-elle définie en $t = 0$?

2. Montrer que pour $a > 0$ donné, F est continue sur $[a, +\infty[$.

3. F est-elle continue sur $]0, +\infty[$?

4. F est-elle dérivable sur $]0, +\infty[$?

Exercice 5.10. On considère la fonction
$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}\mathrm{d}x\,.$$

1. Montrer que F est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

2. Montrer que pour $a > 0$ donné, il existe $C > 0$ telle que
$$0 \leq h(x) = x^2e^{-tx^2} \leq C \text{ pour tous } t \geq a \text{ et } x \geq 0\,.$$

3. Montrer que pour tout $a > 0$, F est dérivable sur $[a, +\infty[$ et exprimer $F'(t)$ comme une intégrale.

4. Quel est le plus grand intervalle sur lequel on peut en déduire que F est dérivable?

Chapitre 6

Intégrales doubles et triples

6.1 Théorie générale sur $\mathbb{R}^n$

Définition 6.1 (Fonction intégrable)**.** *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

- *On dit que f est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ si les intégrales généralisées successives suivantes convergent*
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}...\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2...\mathrm{d}x_n\,.$$
Si c'est le cas, on peut changer l'ordre d'intégration sans changer le résultat. Alors l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2...\mathrm{d}x_n$ a un sens et est définie par
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}...\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2...\mathrm{d}x_n\,.$$
- *Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$, on dit que f est intégrable sur A si la fonction $f.\mathrm{Id}_A$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$, où Id_A est la fonction indicatrice de A, définie par*
$$\mathrm{Id}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A\,, \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A\,. \end{cases}$$
On écrit
$$\int_A f(x)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2...\mathrm{d}x_n = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{Id}_A(x)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2...\mathrm{d}x_n\,.$$

Définition 6.2 ($\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme)**.** *Soit Ω_1 et Ω_2 deux domaines de $\mathbb{R}^n$, soit $\phi : \Omega_1 \to \Omega_2$, on dit que ϕ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de Ω_1 sur Ω_2 si :*

1. *ϕ est bijective,*
2. *ϕ est $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω_1,*
3. *$\det(J(\phi)) \neq 0$ en tout point de Ω_1.*

Théorème 6.1 (Changement de variable). *Soit Ω et D deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, une fonction positive ou intégrable sur Ω et soit $\phi : D \to \Omega$ un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de D sur Ω. On a*

$$\int_\Omega f(y)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2...\mathrm{d}y_n = \int_D (f \circ \phi)(x)\,|\det(J(\phi)(x))|\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2...\mathrm{d}x_n\,.$$

6.2 Intégrales doubles

Dans cette partie, on étudie l'intégration sur les domaines de $\mathbb{R}^2$.

6.2.1 Découpage en intégrales simples

Théorème 6.2 (Théorème de Fubini). *Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note X la projection de A sur l'axe Ox et Y la projection de A sur l'axe Oy, i.e.*

$$\begin{aligned} X &= \{x \in \mathbb{R}\,;\ \exists y \in \mathbb{R}\,;\ (x,y) \in A\}\,, \\ Y &= \{y \in \mathbb{R}\,;\ \exists x \in \mathbb{R}\,;\ (x,y) \in A\}\,. \end{aligned}$$

De plus, pour chaque $x \in X$, on note

$$Y_x = \{y \in \mathbb{R}\,;\ (x,y) \in A\}\,,$$

et pour tout $y \in Y$, on note

$$X_y = \{x \in \mathbb{R}\,;\ (x,y) \in A\}\,.$$

Si la fonction f est positive ou intégrable sur A, on a :

$$\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_X \left(\int_{Y_x} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_Y \left(\int_{X_y} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\,.$$

Voir figure 6.1.

6.2.2 Coodonnées polaires

Les coordonnées polaires d'un point (x,y) de $\mathbb{R}^2$ sont les nombres $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que

$$x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta\,.$$

On considère l'ouvert de $\mathbb{R}^2$

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x \geq 0\,,\ y = 0\right\}$$

et la fonction

$$\phi :]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\longrightarrow \Omega\,,\ \phi(r,\theta) = (r\cos\theta\,,\ r\sin\theta)\,.$$

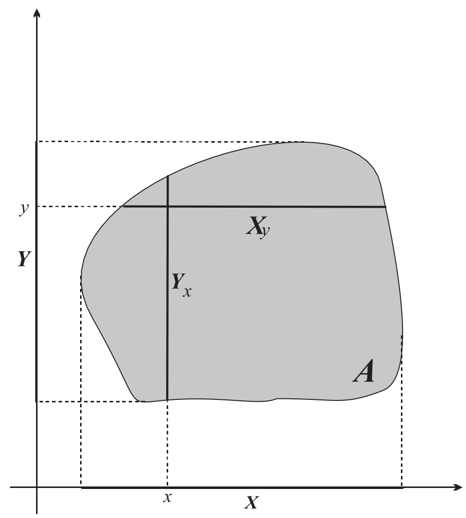

Figure 6.1: Allure des ensembles X, Y, Y_x et X_y sur un exemple simple.

Proposition 6.1. *ϕ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $]0,+\infty[\times]0,2\pi[$ sur Ω.*

Preuve. ϕ est clairement $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[\times]0,2\pi[$ et bijective de $]0,+\infty[\times]0,2\pi[$ sur Ω. De plus, pour tout $(r,\theta)\in]0,+\infty[\times]0,2\pi[$, on a

$$\begin{aligned}\det\left(J(\phi)(r,\theta)\right) &= \det\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}\\ &= r\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=r\neq 0\,.\quad\square\end{aligned}$$

On notera que la demi-droite $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\ x\geq 0\,,\ y=0\}$ est une partie négligeable de $\mathbb{R}^2$. Le fait que ϕ soit seulement un difféomorphisme de $]0,+\infty[\times]0,2\pi[$ sur Ω et non pas sur $\mathbb{R}^2$, n'est donc pas génant pour effectuer des changements de variables dans des intégrales. De façon générale, on a pour $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, positive ou intégrable sur $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \iint_{]0,+\infty[_r\times]0,2\pi[_\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{+\infty} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}\theta\right)r\mathrm{d}r\,,\end{aligned}$$

où r est le déterminant de la Jacobienne de Φ calculé dans la preuve de la proposition ci-dessus. Si on veut intégrer sur une partie A de $\mathbb{R}^2$, on note A_{pol} la description de A en coordonnées polaires, c'est-à-dire $A_{\text{pol}}=\Phi^{-1}(A)$, on a

$$\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{A_{\text{pol}}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\,.$$

6.2.3 Aire, masse et inertie

Définition 6.3. *Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$ et ρ une fonction positive définie sur A, appelée fonction densité.*

1. *L'aire de A est la mesure de A définie par*
$$\mathcal{A}(A) = mes(A) = \iint_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{Id}_A(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

2. *La masse de A associée à la densité ρ est donnée par*
$$\mathcal{M}(A) = \iint_A \rho(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{Id}_A(x,y)\rho(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

3. *Le centre d'inertie de A associé à la densité ρ est le point de coordonnées*
$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{\mathcal{M}(A)}\iint_A x\,\rho(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\mathcal{M}(A)}\iint_{\mathbb{R}^2} x\,\mathrm{Id}_A(x,y)\rho(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,\\ y_G &= \frac{1}{\mathcal{M}(A)}\iint_A y\,\rho(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\mathcal{M}(A)}\iint_{\mathbb{R}^2} y\,\mathrm{Id}_A(x,y)\rho(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.\end{aligned}$$

4. *Soit Δ une droite ou un point de $\mathbb{R}^2$. On appelle moment d'inertie (associé à la densité ρ) de A relativement à Δ, la quantité*
$$\begin{aligned} m_\Delta(A) &= \iint_A \left(d\left((x,y),\Delta\right)\right)^2 \rho(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \left(d\left((x,y),\Delta\right)\right)^2 \mathrm{Id}_A(x,y)\rho(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,\end{aligned}$$
où $d\left((x,y),\Delta\right)$ est la distance du point (x,y) à Δ.

6.3 Intégrales triples

On considère maintenant l'intégration sur les domaines de $\mathbb{R}^3$.

6.3.1 Découpage : un exemple

Comme pour le cas de $\mathbb{R}^2$, on peut découper l'intégrale sur un domaine de $\mathbb{R}^3$ en trois intégrales intégrales simples imbriquées, en choisissant l'ordre d'intégration comme on le souhaite. On peut énoncer une version du théorème de Fubini pour les domaines de $\mathbb{R}^3$ avec une fonction positive ou intégrable. La généralisation donne lieu à une expression longue et un peu compliquée. Comme par ailleurs elle est totalement naturelle, il semble préférable de la voir fonctionner sur un exemple plutôt que d'énoncer le théorème général.

On considère le tétrahèdre dans $\mathbb{R}^3$ défini par (voir figure 6.2) :

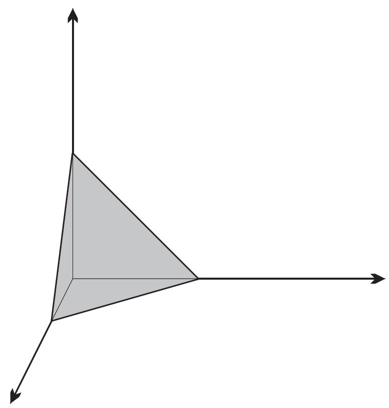

Figure 6.2: Le tétrahèdre P.

$$P = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 1\right\} .$$

On intègre sur P la fonction $f(x,y,z) = x$:

$$\begin{aligned}
\int_P f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} [xz]_{z=0}^{z=1-x-y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x(1-x-y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[xy - x^2y - x\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1-x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(x(1-x) - x^2(1-x) - x\frac{(1-x)^2}{2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}\left(x - 2x^2 + x^3\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{12}\,.
\end{aligned}$$

6.3.2 Coodonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques d'un point (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ sont les nombres $r > 0$, $\theta \in [0,\pi[$ et $z \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta\,,\ z = z\,,$$

i.e. on décrit x et y en coordonnées polaires et on conserve z. On considère l'ouvert de $\mathbb{R}^3$

$$\Omega = \left(\mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x \geq 0\,,\ y = 0\right\}\right) \times \mathbb{R}$$

et la fonction

$$\phi :]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R} \longrightarrow \Omega\,,\ \phi(r,\theta,z) = (r\cos\theta\,,\ r\sin\theta\,,\ z)\ .$$

Proposition 6.2. *ϕ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R}$ sur Ω.*

C'est une conséquence directe de la propriété analogue pour les coordonnées sphériques. On calcule tout de même le déterminant de la Jacobienne de Φ car nous en aurons besoin dans le changement de variables :

$$\begin{aligned} \det\left(J(\phi)(r,\theta,z)\right) &= \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= r\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = r\,. \end{aligned}$$

Le demi-plan $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x \geq 0\,,\ y = 0\} \times \mathbb{R}_z$ est une partie négligeable de $\mathbb{R}^3$. Pour $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, positive ou intégrable sur $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \iiint_{]0,+\infty[_r\times]0,2\pi[_\theta\times\mathbb{R}_z} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \end{aligned}$$

que l'on peut ensuite découper comme on le souhaite (le r devant $\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta dz$ est le déterminant de $J(\Phi)$). Si on veut intégrer sur une partie A de $\mathbb{R}^3$, on note A_{cyl} la description de A en coordonnées cylindriques, i.e. $A_{\mathrm{cyl}} = \Phi^{-1}(A)$, et on a

$$\iiint_A f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{A_{\mathrm{cyl}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\,.$$

6.3.3 Coodonnées sphériques

Les coordonnées sphériques d'un point (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ sont les nombres $r > 0$, $\theta \in [0,\pi[$ et $\varphi \in [0,2\pi]$ tels que

$$x = r\sin\theta\cos\varphi\,,\ y = r\sin\theta\sin\varphi\,,\ z = r\sin\theta\,.$$

On considère l'ouvert de $\mathbb{R}^3$

$$\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2\,;\ x \geq 0\,,\ y = 0\,,\ z \in \mathbb{R}\right\}$$

et la fonction

$$\phi :]0,+\infty[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[\longrightarrow \Omega\,,\ \phi(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi\,,\ r\sin\theta\sin\varphi\,,\ r\sin\theta)\ .$$

Proposition 6.3. *ϕ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $]0,+\infty[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[$ sur Ω.*

Preuve. On admettra la bijectivité. Par ailleurs, Φ est clairement $\mathcal{C}^\infty$ sur le domaine $]0,+\infty[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[$ comme produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. Reste à voir que $\det(J(\Phi))$ ne s'annule pas sur $]0,+\infty[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[$. On a

$$\det\left(J(\Phi)(r,\theta,\varphi)\right) = \det\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} = r^2\sin\theta\,.$$

On voit donc que $\det(J(\Phi))$ ne s'annule pas sur $]0,+\infty[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[$, car $r^2\sin\theta$ ne s'annule que pour $r=0$ ou $\theta=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. □

A noter que la partie en dehors de laquelle Φ est un difféomorphisme est la même que dans le cas des coordonnées cylindriques, en effet,

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2\,;\ x\geq 0\,,\ y=0\,,\ z\in\mathbb{R}\right\} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\ x\geq 0\,,\ y=0\right\}\times\mathbb{R}_z\,.$$

C'est une partie négligeable de $\mathbb{R}^3$. Pour $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, positive ou intégrable sur $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} &\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \iiint_{]0,+\infty[_r\times]0,\pi[_\theta\times]0,2\pi[_\varphi} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

(que l'on peut ensuite découper comme on le souhaite) où $r^2\sin\theta$ est le déterminant de la Jacobienne de Φ, calculé dans la preuve de la proposition ci-dessus. Si on veut intégrer sur une partie A de $\mathbb{R}^3$, on note A_{sph} la description de A en coordonnées sphériques, i.e. $A_{\mathrm{sph}}=\Phi^{-1}(A)$, et on a

$$\iiint_A f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{A_{\mathrm{sph}}} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\,.$$

6.3.4 Volume, masse et inertie

Définition 6.4. *Soit A une partie de $\mathbb{R}^3$ et ρ une fonction positive définie sur A, appelée fonction densité.*

1. *Le volume de A est la mesure de A définie par*

$$\mathcal{V}(A) = mes(A) = \iiint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\mathbb{R}^3}\mathrm{Id}_A(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,.$$

2. *La masse de A associée à la densité ρ est donnée par*

$$\mathcal{M}(A) = \iiint_A \rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\mathbb{R}^3}\mathrm{Id}_A(x,y,z)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,.$$

3. *Le centre d'inertie de A associé à la densité ρ est le point de coordonnées*

$$\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{\mathcal{M}(A)} \iiint_A x\, \rho(x,y,z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\mathcal{M}(A)} \iiint_{\mathbb{R}^3} x\, \mathrm{Id}_A(x,y,z) \rho(x,y,z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z\,, \\
y_G &= \frac{1}{\mathcal{M}(A)} \iiint_A y\, \rho(x,y,z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\mathcal{M}(A)} \iiint_{\mathbb{R}^2} y\, \mathrm{Id}_A(x,y,z) \rho(x,y,z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z \\
z_G &= \frac{1}{\mathcal{M}(A)} \iiint_A z\, \rho(x,y,z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\mathcal{M}(A)} \iiint_{\mathbb{R}^2} z\, \mathrm{Id}_A(x,y,z) \rho(x,y,z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z\,.
\end{aligned}$$

4. *Soit Δ un plan, une droite ou un point de $\mathbb{R}^3$. On appelle moment d'inertie (associé à la densité ρ) de A relativement à Δ, la quantité*

$$\begin{aligned}
m_\Delta(A) &= \iiint_A \left(d\left((x,y,z),\Delta\right)\right)^2 \rho(x,y,z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} \left(d\left((x,y,z),\Delta\right)\right)^2 \mathrm{Id}_A(x,y,z) \rho(x,y,z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z\,,
\end{aligned}$$

où $d\left((x,y,z),\Delta\right)$ est la distance du point (x,y,z) à Δ.

6.4 Exercices

Exercice 6.1. Soit D le rectangle $[0,4] \times [1,2]$. Calculer

$$\iint_D x \ln y \mathrm{d}x \mathrm{d}y\,.$$

Exercice 6.2. Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ délimité par les lignes :

$$x = 0\,,\ x = 1\,,\ y = x^2\,,\ y = \sqrt{x}\,.$$

Représenter D et calculer l'intégrale

$$\iint_D xy \mathrm{d}x \mathrm{d}y\,.$$

Exercice 6.3. Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ délimité par les lignes :

$$y = 2 - x^2\,,\ y = 2x - 1\,.$$

Représenter D et calculer l'intégrale

$$\iint_D (x - y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y\,.$$

Exercice 6.4. Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ délimité par les cercles $x^2+y^2=e^2$ et $x^2+y^2=e^4$, calculer
$$\iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Exercice 6.5. Soit D le carré limité par les droites $x+y=1$, $x+y=3$, $x-y=1$ et $x-y=-1$. Calculer
$$\iint_D (x+y)^3(x-y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Exercice 6.6. On considère D le demi-disque de $\mathbb{R}^2$
$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\ x^2+y^2<2x\,,\ x>1\right\}\,.$$
Calculer l'intégrale
$$\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Exercice 6.7. Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ délimité par les lignes $xy=1$, $xy=2$, $y=x$ et $y=3x$. En utilisant le changement de variables
$$(u,v)\longmapsto(x,y)=\left(\sqrt{\frac{u}{v}},\sqrt{uv}\right)$$
calculer l'aire de D.

Exercice 6.8. Soit $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,;\ x^2+y^2+z^2\leq 2\}$. Calculer
$$\iiint_\Omega \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,.$$

Exercice 6.9. Soit Ω le domaine de $\mathbb{R}^3$ limité par les surfaces $x^2+y^2=z^2$, $z=0$ et $z=1$. Calculer le volume de Ω et son moment d'inertie par rapport à O.

Exercice 6.10.
1. Calculer les coordonnées du centre de gravité du prisme dans $\mathbb{R}^3$ limité par les plans $x=0$, $z=0$, $y=1$, et $x+2z=3$.
2. Même question avec l'ellipse dans $\mathbb{R}^2$:
$$\frac{x^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=25\,.$$