Calcul différentiel

Jean-Philippe Nicolas
Département de Mathématiques,
Université de Brest, 6 avenue Victor Le Gorgeu,
29200 Brest.
Bureau H109, Tel. 02 98 01 67 61,
email : Jean-Philippe.Nicolas@univ-brest.fr

Table des matières

Chapitre 1

Rappels sur les applications linéaires continues

Théorème 1.1. *Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et L une application linéaire de E dans F, alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *L est continue sur E ;*
2. *L est continue en 0 ;*
3. *L est bornée, i.e.*
$$\exists C \geq 0\,;\ \|L(x)\|_F \leq C\|x\|_E\,,\ \forall x \in E\,.$$

Preuve. On a clairement *1* $\Rightarrow$ *2* et on a aussi clairement *3* $\Rightarrow$ *2*. Nous allons montrer les deux implications réciproques.

2 $\Rightarrow$ *1.* Supposons que L soit continue en 0. Comme L est linéaire, $L(0) = 0$ et on a donc
$$L(z) \to 0 \text{ lorsque } z \to 0\,,\ z \in E\,.$$
Soit $x \in E$, montrons que L est continue en x. Pour $y \in E$, on a par linéarité que
$$L(y) - L(x) = L(y - x)\,.$$
Lorsque $y \to x$, on a $y - x \to 0$ et donc $L(y - x) \to 0$. Il suit donc que $L(y) \to L(x)$ lorsque $y \to x$, i.e. L est continue en x. Ceci est vrai pour tout $x \in E$, donc L est continue sur E.

2 $\Rightarrow$ *3.* La continuité de L en 0 s'écrit de la façon suivante :
$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \delta > 0\,;\ \forall x \in E\,,\ \|x\| \leq \delta \Rightarrow \|L(x)\| \leq \varepsilon\,.$$
Soit $\varepsilon > 0$ donné et soit $\delta > 0$ permettant de vérifier l'implication ci-dessus. Alors pour $\|x\| = \delta$, on a $\|L(x)\| \leq \varepsilon$. Soit $x \in E$, $x \neq 0$, posons
$$y = \delta \frac{x}{\|x\|}\,.$$

Alors $\|y\| = \delta$ et donc $\|L(y)\| \leq \varepsilon$. De plus, par linéarité,

$$L(y) = \frac{\delta}{\|x\|} L(x)\,,$$

donc

$$\|L(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \|x\|\,.$$

Il existe donc

$$C = \frac{\varepsilon}{\delta} > 0$$

tel que, pour tout $x \in E$, $x \neq 0$, on ait, $\|L(x)\| \leq C\|x\|$ et cette inégalité est bien sûr aussi vraie pour $x = 0$. Donc L est bornée. □

Proposition 1.1. *Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.*

Remarque 1.1. Si E est de dimension infinie et F de dimension finie, le résultat ci-dessus n'est plus vrai. Voir les exemples plus bas.

Le Théorème 1.1 amène naturellement la notion de norme d'une application linéaire continue comme la plus petite constante $C \geq 0$ comme ci-dessus. Autrement dit

Définition 1.1. *Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

- *L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E;F)$ des applications linéaires continues de E dans F possède une norme naturelle donnée par*

$$\|L\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E=1} \|L(x)\|_F\,.$$

  Ceci fait de $\mathcal{L}(E;F)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$.

- *On appelle dual topologique de E, et on note E', l'espace $\mathcal{L}(E;\mathbb{K})$ des formes linéaires continues sur E. A ne pas confondre avec le dual algébrique, en général noté E^*, qui est l'ensemble des formes linéaires (non nécessairement continues) sur E. On a $E' \subset E^*$ mais les deux espaces sont distincts si E est de dimension infinie.*

Exemples et exercices.

- Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne $\|.\|_2$. Soit $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$. On considère l'application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$L(x) = \langle x, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i\,.$$

  Calculer la norme de L. Le résultat est

$$\|L\|_{\mathcal{L}(E;\mathbb{R})} = \|v\|_2\,.$$

Solution. Par Cauchy-Schwarz, on a
$$|L(x)| \leq \|v\|_2 \|x\|_2 \,.$$
On en déduit donc que
$$\|L\|_{\mathcal{L}(E;\mathbb{R})} = \sup_{x\in E\,,\ x\neq 0} \frac{|L(x)|}{\|x\|_2} \leq \|v\|_2 \,.$$
Par ailleurs, on sait que les seuls cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz sont obtenus lorsque x et v sont colinéaires. En particulier, on a
$$L(v) = \|v\|_2^2$$
et donc
$$\frac{|L(v)|}{\|v\|_2} = \|v\|_2 \,.$$
On en déduit que
$$\|L\|_{\mathcal{L}(E;\mathbb{R})} = \sup_{x\in E\,,\ x\neq 0} \frac{|L(x)|}{\|x\|_2} \geq \frac{|L(v)|}{\|v\|_2} = \|v\|_2 \,.$$
Il suit donc que
$$\|L\|_{\mathcal{L}(E;\mathbb{R})} = \|v\|_2 \,. \quad \square$$

- Une application linéaire n'est pas forcément continue. Considérons $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ l'espace des fonctions de classes $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ à valeurs réelles, muni de la norme du max
$$\|f\|_1 = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| \,.$$
C'est bien une norme sur E. Maintenant considérons l'application linéaire L de E dans $\mathbb{R}$ définie par
$$L(f) = f'(0) \,.$$
L'application L est bien définie sur E et est linéaire mais elle n'est pas continue. Ceci est un exemple d'espace E de dimension infinie et F (ici $\mathbb{R}$) de dimension finie avec une application linéaire de E dans F qui n'est pas continue.

  A noter que si on avait muni E de la norme
$$\|f\|_2 = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| + \max_{x\in[0,1]} |f'(x)| \,.$$
l'application L aurait été continue.

- Autre exemple d'application linéaire non continue. On considère $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes d'une variable réelle, muni de la norme
$$\|p\| = \max_{x\in[0,1]} |p(x)| \,.$$
Pour tout $x_0 \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$ donné, l'application $p \mapsto p(x_0)$ est linéaire de E dans $\mathbb{R}$ mais pas continue.

- Soit $E = \mathcal{C}([0,1]\,;\ \mathbb{C})$ muni de la norme
$$\|f\| = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} .$$
Soit $\phi \in E$ et soit $L\ :\ E \to \mathbb{C}$ définie par
$$L(f) = \int_0^1 \phi(x) f(x) \mathrm{d}x \,.$$
Alors L est continue et $\|L\| = \|\phi\|$.
- Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et L une application linéaire de E dans F. On suppose que L est bornée sur la sphère unité de E. Montrer que L est continue.

Proposition 1.2. *La norme des applications linéaires continues définie-ci-dessus vérifie la propriété suivante. Soit E, F, G trois espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, soit $L_1 \in \mathcal{L}(E;F)$ et $L_2 \in \mathcal{L}(F;G)$, alors*
$$\|L_2 \circ L_1\|_{\mathcal{L}(E;G)} \leq \|L_2\|_{\mathcal{L}(F;G)} \|L_1\|_{\mathcal{L}(E;F)} \,.$$

Preuve. Evidente. □

Chapitre 2

Applications différentiables, différentielle

A partir de maintenant, tous les espaces vectoriels normés sur lesquels nous travaillerons seront sur $\mathbb{R}$. Nous ne considèrerons plus d'espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$, ou alors nous les verrons comme des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

2.1 Définitions

Définition 2.1 (Application différentiable)**.** *Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de E. Soit $f : \Omega \to F$ une application, soit $x \in \Omega$, on dit que f est différentiable en x s'il existe une application L* **linéaire continue** *de E dans F telle que*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{\|h\|} = 0\,.$$

Remarque 2.1. Une propriété immédiate mais qui peut être utile : si on change la norme sur E en une norme équivalente et si on change la norme sur F en une norme équivalente, cela ne change pas la notion de différentiabilité. Autrement dit une fonction différentiable en un point pour un choix de norme sur E et sur F le sera pour tout choix de normes équivalentes. De même une fonction non différentiable en x restera non différentiable si on change la norme sur E en une norme équivalente et la norme sur F en une norme équivalente.

Proposition 2.1. *Avec les notations de la définition ci-dessus, si l'application L existe, elle est unique.*

Preuve. Supposons qu'il existe $L \in \mathcal{L}(E,F)$ et $L_1 \in \mathcal{L}(E,F)$ telles que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{\|h\|} = 0 \text{ et } \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L_1(h)}{\|h\|} = 0\,.$$

Alors

$$\lim_{h\to 0} \frac{L_1(h) - L(h)}{\|h\|} = 0 \,.$$

Prenons $h = ty$ avec $t > 0$, $y \neq 0$ fixé et faisons tendre t vers 0. On a

$$0 = \lim_{t\to 0} \frac{L_1(ty) - L(ty)}{t\|y\|} = \lim_{t\to 0} \frac{L_1(y) - L(y)}{\|y\|} = \frac{L_1(y) - L(y)}{\|y\|} \,.$$

En multipliant par $\|y\|$, on obtient

$$L_1(y) - L(y) = 0 \,.$$

Donc L et L_1 sont égales sur $E \setminus \{0\}$. Comme L et L_1 sont linéaires, on a aussi que $L(0) = L_1(0) = 0$. Il suit que $L_1 = L$. □

Définition 2.2. *Avec les notations de la définition 2.1, lorsqu'elle existe, l'application L s'appelle la différentielle de f en x, ou encore l'application tangente à f au point x. On la note $Df(x)$.*

Proposition 2.2. *Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, $x \in E$ et $f : E \to F$ une application différentiable en x, alors f est continue en x.*

Preuve. On sait qu'il existe $L \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{\|h\|} = 0 \,,$$

ce qui s'écrit encore de la façon suivante : il existe une application $\varepsilon : E \to F$ satisfaisant

$$\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$$

et telle que pour tout $h \in E$, $h \neq 0$, on ait

$$f(x+h) - f(x) = L(h) + \|h\|\varepsilon(h) \,.$$

Il suit par linéarité et continuité de L que

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x) \,,$$

i.e. f est continue en x. □

Définition 2.3. *Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de E, et f une application de Ω dans F.*

1. *On dira que f est différentiable sur Ω si elle l'est en tout point x de Ω.*

2. *Si f est différentiable sur Ω, on appelle application différentielle (ou simplement différentielle) de f l'application Df qui à $x \in \Omega$ associe $Df(x)$ l'application tangente à f au point x. La différentielle Df est une application de Ω dans $\mathcal{L}(E, F)$.*

3. *On dira que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω si elle est différentiable sur Ω et si Df est continue sur Ω, c'est-à-dire*
$$\forall x \in \Omega\,,\ \lim_{y\to 0} \|Df(x+y) - Df(x)\|_{\mathcal{L}(E,F)} = 0\,.$$
On rappelle que cette norme s'écrit
$$\begin{aligned}\|Df(x+y) - Df(x)\|_{\mathcal{L}(E,F)} &= \sup_{h\in E, h\neq 0} \frac{\|Df(x+y)(h) - Df(x)(h)\|_F}{\|h\|_E} \\ &= \sup_{h\in E, \|h\|_E = 1} \|Df(x+y)(h) - Df(x)(h)\|_F\,.\end{aligned}$$

Remarque 2.2. **Attention!** L'application Df n'a aucune raison d'être linéaire (sauf si f est bilinéaire, nous verrons cela plus tard), c'est sa valeur en chaque point x qui est une application linéaire continue.

Proposition 2.3 (Opérations sur les fonctions différentiables)**.**

1. *Toute combinaison linéaire de fonctions différentiables est différentiable et*
$$D(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda Df(x) + \mu Dg(x)\,.$$

2. *Composition : soit E, F et G trois espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, U un ouvert de E, V un ouvert de F, $x \in U$. Soit $f : U \to F$ une application telle que $f(U) \subset V$, soit $g : V \to G$. Si f est différentiable en x et g est différentiable en $f(x)$, alors $g \circ f$ est différentiable en x et on a*
$$D(g\circ f)(x)(h) = Dg(f(x))\big(Df(x)(h)\big)\,,$$
autrement dit
$$D(g\circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x)\,.$$
Et il suit que si f est différentiable sur U et g sur V alors $g \circ f$ est différentiable sur U.

Preuve.

1. Trivial.

2. En utilisant le fait que f est différentiable en x,
$$g\circ f(x+h) = g(f(x) + Df(x)(h) + \|h\|\varepsilon(h))$$
où $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$. La différentiabilité de g en $f(x)$ nous donne alors
$$\begin{aligned} g\circ f(x+h) &= g(f(x)) + Dg(f(x))(Df(x)(h) + \|h\|\varepsilon(h)) \\ &\quad + \big\|Df(x)(h) + \|h\|\varepsilon(h)\big\|\tilde{\varepsilon}(Df(x)(h) + \|h\|\varepsilon(h)) \\ &= g(f(x)) + Dg(f(x))(Df(x)(h)) + Dg(f(x))(\|h\|\varepsilon(h)) \\ &\quad + \big\|Df(x)(h) + \|h\|\varepsilon(h)\big\|\tilde{\varepsilon}(Df(x)(h) + \|h\|\varepsilon(h)) \\ &= g(f(x)) + Dg(f(x))(Df(x)(h)) + \|h\|Dg(f(x))(\varepsilon(h)) \\ &\quad + \big\|Df(x)(h) + \|h\|\varepsilon(h)\big\|\tilde{\varepsilon}(Df(x)(h) + \|h\|\varepsilon(h))\,, \end{aligned}$$

où $\tilde{\varepsilon}(k) \to 0$ lorsque $k \to 0$. Donc

$$\begin{aligned}&\|g \circ f(x+h) - g(f(x)) - Dg(f(x))(Df(x)(h))\| \\ \leq \|h\| &\left(\|Dg(f(x))(\varepsilon(h))\| + \big(\|Df(x)\|_{\mathcal{L}(E,F)} + \|\varepsilon(h)\|\big) \left\|\tilde{\varepsilon}\big(Df(x)(h) + \|h\|\varepsilon(h)\big)\right\| \right).\end{aligned}$$

Par linéarité et continuité de $Dg(f(x))$, on a

$$Dg(f(x))(\varepsilon(h)) \to 0 \text{ lorsque } h \to 0$$

et comme

$$\tilde{\varepsilon}(Df(x)(h) + \|h\|\varepsilon(h)) \to 0 \text{ lorsque } h \to 0\,,$$

il suit que

$$\lim_{h\to 0} \frac{g \circ f(x+h) - g(f(x)) - Dg(f(x))(Df(x)(h))}{\|h\|} = 0\,.$$

Ceci conclut la preuve. □

Corollaire 2.1. *Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, U un ouvert de E et V un ouvert de F. Soit $f : U \to V$ une application bijective. On suppose que f est différentiable en $x \in U$ et que f^{-1} est différentiable en $f(x)$, alors $Df(x)$ est un isomorphisme de E sur F et*

$$D(f^{-1})(f(x)) = (Df(x))^{-1}\,.$$

Preuve. On applique la proposition précédente à $\mathrm{Id}_E = f^{-1} \circ f$ et $\mathrm{Id}_F = f \circ f^{-1}$, en remarquant que

$$D\mathrm{Id}_E(x) = \mathrm{Id}_E\,,\ D\mathrm{Id}_F(f(x)) = \mathrm{Id}_F\,. \quad \square$$

On va maintenant voir la notion de dérivée directionnelle et son lien avec la différentielle.

Définition 2.4 (Dérivée directionnelle)**.** *Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de E, et f une application de Ω dans F. Soit $x \in E$ et $v \in E$, $v \neq 0$. On appelle dérivée directionnelle de f en x selon la direction v la dérivée en 0, si elle existe, de l'application*

$$\phi\ :\ t \in \mathbb{R} \mapsto f(x+tv)\,;$$

on la note

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x)\,.$$

Autrement dit

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

si elle existe. En effet,

$$\phi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t} \ \textit{si elle existe}$$

et

$$\frac{\phi(t) - \phi(0)}{t} = \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}\,.$$

Lorsqu'une fonction est différentiable, elle admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions et on peut les calculer à l'aide de la différentielle.

Proposition 2.4. *Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de E, $x \in \Omega$ et f une application de Ω dans F différentiable en x. Alors f admet en x des dérivées directionnelles dans toutes les directions et pour tout $v \in E$, $v \neq 0$, on a*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = Df(x)(v)\,.$$

Preuve. On sait que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Df(x)(h)}{\|h\|} = 0\,.$$

Soit $v \in E$, $v \neq 0$, en prenant $h = tv$, $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x) - Df(x)(tv)}{|t|\|v\|} = 0\,,$$

ce qui équivaut à

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x) - Df(x)(tv)}{t} = 0\,.$$

D'autre part, comme $Df(x)$ est linéaire, $Df(x)(tv) = tDf(x)(v)$. Il suit

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = Df(x)(v)\,.$$

Ceci conclut la preuve. □

Remarque 2.3. Une application peut admettre en un point des dérivées directionnelles dans toutes les directions et pourtant ne pas être différentiable en ce point. On verra des exemples explicites de ce genre de situation en dimension finie.

Voyons quelques exemples de calculs de différentielles.

- $E = F = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(A) = I + 2A$. On développe $f(A+H)$:

  $$f(A+H) = I + 2A + 2H\,.$$

  On identifie la partie linéaire en H : on pose $L(H) = 2H$ et on a

  $$f(A+H) = f(A) + L(H)\,.$$

  Donc en particulier

  $$\lim_{H \to 0} \frac{f(A+H) - f(A) - L(H)}{\|H\|} = 0\,.$$

  Donc f est différentiable en tout point A de E et $Df(A)(H) = 2H$.

- $E = F = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ munis de la même norme matricielle, $f(A) = A^2$. On développe $f(A+H)$ en n'oubliant pas que le produit matriciel ne commute pas :

$$f(A+H) = (A+H)^2 = A^2 + AH + HA + H^2 \,.$$

On identifie la partie linéaire en H : on pose $L(H) = AH + HA$ et on a

$$f(A+H) = f(A) + L(H) + H^2 \,,$$

il suit

$$\left\| \frac{f(A+H) - f(A) - L(H)}{\|H\|} \right\| = \left\| \frac{H^2}{\|H\|} \right\| \leq C\|H\|$$

car pour toute norme $\|.\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ il existe $C > 0$ tel que

$$\|AB\| \leq C\|A\| \, \|B\| \ \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,.$$

On a donc

$$\lim_{H \to 0} \frac{f(A+H) - f(A) - L(H)}{\|H\|} = 0 \,,$$

f est différentiable en tout point A de E et $Df(A)(H) = AH + HA$.

2.2 Cas des applications constantes

Proposition 2.5. *Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to F$ une application constante, i.e. il existe $y_0 \in F$ tel que pour tout $x \in \Omega$, $f(x) = y_0$. Alors f est différentiable sur Ω et pour tout $x \in \Omega$ on a*

$$Df(x) = 0 \,.$$

Preuve. Soit $x \in \Omega$ et $h \in E$ tel que $x + h \in \Omega$, on a

$$f(x+h) = f(x) = y_0$$

et on peut donc écrire

$$f(x+h) = f(x) + L(h) + R(h)$$

où L est l'application linéaire continue de E dans F identiquement nulle et R est l'application nulle de E dans F. On a bien

$$\lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{\|h\|} = 0 \,.$$

Il suit que f est différentiable en x et $Df(x) = L = 0$. $\square$

2.3 Cas des applications linéaires continues

Proposition 2.6. *Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ et $L \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors L est différentiable sur E et pour tout $x \in E$ on a*

$$DL(x) = L\,.$$

Preuve. C'est un calcul direct

$$L(x+h) = L(x) + L(h) + 0$$

et 0 est bien de la forme $\|h\|\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$. □

2.4 Cas où $E = \mathbb{R}$

Proposition 2.7. *On considère ici le cas où $E = \mathbb{R}$. Soit F un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et f une application définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}$ à valeurs dans F. Soit $x \in U$, f est différentiable en x si et seulement si elle est dérivable en x au sens usuel et dans ce cas, on a*

$$Df(x)\,:\; h \mapsto hf'(x)\,.$$

On voit donc que la notion habituelle de dérivabilité pour les fonctions à une variable réelle est exactement la même chose que la différentiabilité. De plus pour ces fonctions la différentielle en un point est l'application de multiplication par la dérivée de f en ce point.

Preuve de la proposition. Supposons que f soit dérivable en x, alors on peut effectuer un développement de Taylor-Lagrange de f à l'ordre 1 en x :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varepsilon(h) \text{ où } \varepsilon \text{ tend vers 0 en 0.}$$

On voit que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - hf'(x)}{|h|} = 0$$

et donc f est différentiable en x avec $Df(x)(h) = hf'(x)$.

Supposons maintenant que f soit différentiable en x. Il existe une application $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$ telle que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{|h|} = 0\,.$$

Mais $L(h) = hL(1)$ car $h \in \mathbb{R}$ et donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - hL(1)}{|h|} = 0\,.$$

Ceci est équivalent à

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - hL(1)}{h} = 0$$

et on a donc
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = L(1)\,.$$
Donc f est dérivable en x et $f'(x) = L(1)$. □

2.5 Cas où $E = \mathbb{R}^n$

On se place dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$ et F est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to F$ une application. Soit $x = (x_1, ..., x_n) \in U$. On rappelle la définition des dérivées partielles de f en x.

Définition 2.5. *La dérivée partielle de f par rapport à la i-ème variable au point x est la dérivée en 0, si elle existe, de l'application*

$$t \in \mathbb{R} \mapsto f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, ..., x_n)\,;$$

on la note
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,.$$
Autrement dit,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)}{t}$$

si cette limite existe.

On voit donc que la dérivée partielle de f par rapport à la i-ème variable au point x est la dérivée directionnelle de f en x selon le i-ème vecteur de base e_i (où $\{e_1, ..., e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$), i.e.
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(x)\,.$$
Donc en particulier, si f est différentiable en x,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = Df(x)(e_i) = Df(x)(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \text{ (le 1 étant à la i-ème place).}$$

Comme la différentielle de f en x, si elle existe, est linéaire, il suit que nous connaissons sa forme : on développe $h \in \mathbb{R}^n$ sur la base canonique

$$h = h_1 e_1 + ... + h_n e_n$$

et on a
$$Df(x)(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,.$$

Nous venons de montrer la

Proposition 2.8. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x \in U$, F un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et $f\,:\, U \to F$ une application différentiable en x. Alors la différentielle de f en x s'écrit en fonction des dérivées partielles de f en x de la façon suivante*

$$Df(x)(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i Df(x)(e_i) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,. \tag{2.1}$$

Ceci nous donne un moyen pratique d'étudier la différentiabilité en un point d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 2.9. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x \in U$, F un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et $f\,:\, U \to F$ une application. Alors f est différentiable en x si et seulement si*

1. *les dérivées partielles de f en x existent par rapport à toutes les variables ;*

2. *de plus*
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)}{\|h\|} = 0\,.$$

2.6 Cas où $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$, matrices Jacobiennes

Soit $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$, Ω un ouvert de E, $x \in \Omega$ et $f\,:\, \Omega \to F$ une application. On note f_1, ..., f_p les composantes de f. Les dérivées partielles de f en x, si elles existent, sont les vecteurs de $\mathbb{R}^p$ dont les composantes sont les dérivées partielles des composantes de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_i} \end{pmatrix}\,.$$

On voit que si f est différentiable en x, on a

$$Df(x)(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = J(f)(x) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ . \\ . \\ . \\ h_n \end{pmatrix}\,, \tag{2.2}$$

où $J(f)(x)$ est la matrice Jacobienne de f en x, donnée par (les colonnes correspondent aux variables par rapport auxquelles on dérive et les lignes aux composantes de la fonction)

$$J(f)(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & . & . & . & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & . & . & . & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \frac{\partial f_p}{\partial x_2} & . & . & . & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

L'étude de la différentiabilité de la fonction f en x peut donc se faire de la façon suivante :

1. on commence par vérifier que les dérivées partielles en x de f_1, f_2, ..., f_p existent par rapport à toutes les variables ;
2. on vérifie ensuite que
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - (J(f)(x))(h)}{\|h\|} = 0\,,$$
où $(J(f)(x))(h)$ est $J(f)(x)$ appliquée au vecteur colonne h (équation (2.2)).

La proposition suivante permet de ramener, si on le souhaite, l'étude de la différentiabilité de f à celle de ses composantes.

Proposition 2.10. *La fonction f est différentiable en x si et seulement si toutes ses composantes le sont.*

Preuve. Supposons que f soit différentiable en x. La i-ème composante de f est donnée par $f_i = \pi_i \circ f$ où

$$\pi_i \,:\, \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}\,,\ \pi_i(x_1, ..., x_p) = x_i\,.$$

Comme π_i est linéaire (et donc continue car $\mathbb{R}^p$ est de dimension finie), elle est différentiable en tout point, en particulier en $f(x)$. Donc f_i est différentiable en x comme composée de fonctions différentiables.

Supposons maintenant que toutes les composantes de f soient différentiables en x, alors leurs différentielles en x sont données par

$$Df_i(x)(h) = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\,.$$

Posons $L(h) = (J(f)(x))(h)$ donné par l'équation (2.2) ; L est bien linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ (et donc aussi continue, car on est en dimension finie). La i-ème composante de $f(x+h) - f(x) - L(h)$ est

$$f_i(x+h) - f_i(x) - \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = f_i(x+h) - f_i(x) - Df_i(x)(h)$$

et du fait que toutes les normes sur $\mathbb{R}^p$ sont équivalentes,

$$\|f(x+h) - f(x) - L(h)\| \leq C \sum_{i=1}^{p} |f_i(x+h) - f_i(x) - Df_i(x)(h)| \,,$$

où $C > 0$ est indépendante de x et f. Il suit que

$$\left\| \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{\|h\|} \right\| \leq C \sum_{i=1}^{p} \frac{|f_i(x+h) - f_i(x) - Df_i(x)(h)|}{\|h\|}$$

et chaque terme de la somme tend vers 0 lorsque h tend vers 0 du fait que les f_i sont toutes différentiables en x. □

2.7 Cas des applications multilinéaires continues

Dans ce paragraphe, nous allons travailler avec des espaces produits. Nous adopterons pour tout le cours les conventions suivantes sur les espaces produits.

Si E_1, E_2 sont des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, nous munirons $E_1 \times E_2$ d'une des normes équivalentes suivantes

$$\begin{aligned} \|(x,y)\|_p &= \left(\|x\|_{E_1}^p + \|y\|_{E_2}^p\right)^{1/p} \,,\ p \in [1, +\infty[\,, \\ \|(x,y)\|_\infty &= \max\left(\|x\|_{E_1} \,,\ \|y\|_{E_2}\right) \,. \end{aligned}$$

De même, si E_1, E_2, ..., E_n sont des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, nous munirons $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ d'une des normes équivalentes suivantes

$$\begin{aligned} \|(x_1, x_2, ..., x_n)\|_p &= \left(\|x_1\|_{E_1}^p + \|x_2\|_{E_2}^p + ... + \|x_n\|_{E_n}^p\|\right)^{1/p} \,, p \in [1, +\infty[\,, \\ \|(x_1, x_2, ..., x_n)\|_\infty &= \max\left(\|x_1\|_{E_1} \,,\ \|x_2\|_{E_2} \,,\ ... \,,\ \|x_n\|_{E_n}\right) \,. \end{aligned}$$

Définition 2.6 (Application bilinéaire)**.** *Soit E_1, E_2, F des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$. Une application $f \,:\, E_1 \times E_2 \to F$ est dite bilinéaire si elle est linéaire par rapport à chacun de ses arguments, i.e. si pour tout $y \in E_2$, l'application*

$$\phi_1 \,:\, x \in E_1 \mapsto f(x,y) \tag{2.3}$$

est linéaire de E_1 dans F et pour tout $x \in E_1$, l'application

$$\phi_2 \,:\, y \in E_2 \mapsto f(x,y) \tag{2.4}$$

est linéaire de E_2 dans F.

On a pour les applications bilinéaires un résultat de continuité analogue à celui des applications linéaires.

Théorème 2.1. *Avec les notations de la définition ci-dessus, une application bilinéaire f est continue si et seulement si*

$$\exists C > 0 \ t.q. \ \forall (x,y) \in E_1 \times E_2 \,, \ \|f(x,y)\|_F \leq C \|x\|_{E_1} \|y\|_{E_2} \,. \tag{2.5}$$

Preuve. C'est évident si on remarque que $f \,:\, E_1 \times E_2 \to F$ est bilinéaire continue si et seulement si

$$\psi \,:\, x \in E_1 \mapsto (y \in E_2 \mapsto f(x,y))$$

est linéaire continue de E_1 dans $\mathcal{L}(E_2, F)$. □

Définition 2.7 (Application n-multilinéaire)**.** *Soit E_1, E_2, ..., E_n, F des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$. Une application $f \,:\, E_1 \times E_2 \times ... \times E_n \to F$ est dite n-multilinéaire si elle est linéaire par rapport à chacun de ses arguments, i.e. pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, pour tout $x_1 \in E_1$, ..., $x_{i-1} \in E_{i-1}$, $x_{i+1} \in E_{i+1}$, ..., $x_n \in E_n$, l'application*

$$\phi_i \,:\, x_i \in E_i \mapsto f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n) \tag{2.6}$$

est linéaire de E_i dans F.

On a pour ces applications un résultat de continuité similaire qui se démontre comme le cas bilinéaire mais avec une succession de n applications au lieu de 2.

Proposition 2.11. *Avec les notations de la définition ci-dessus, une application n-multilinéaire f est continue si et seulement si il existe $C > 0$ tel que*

$$\|f(x_1, ..., x_n)\|_F \leq C \|x_1\|_{E_1} ... \|x_n\|_{E_n} \,, \ \forall (x_1, ..., x_n) \in E_1 \times ... \times E_n \,. \tag{2.7}$$

Notation. On notera $\mathcal{L}_n(E_1 \times E_2 \times ... \times E_n \,;\ F)$ l'espace vectoriel des applications n-multilinéaires continues de $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ dans F.

On peut montrer facilement qu'une application n-multilinéaire continue est différentiable et sa différentielle se calcule très simplement. On commence par traiter le cas bilinéaire.

Proposition 2.12. *Soit E_1, E_2, F des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ et $f \,:\, E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire continue. Alors f est différentiable sur $E_1 \times E_2$ et*

$$Df(x,y)(h,k) = f(x,k) + f(h,y) \,.$$

Preuve. On développe $f((x,y) + (h,k))$:

$$\begin{aligned} f((x,y) + (h,k)) &= f(x+h, y+k) \\ &= f(x,y) + f(x,k) + f(h,y) + f(h,k) \,. \end{aligned}$$

L'expression $f(x,k) + f(h,y)$ est linéaire continue en (h,k) pour chaque (x,y), on pose donc $L(h,k) = f(x,k) + f(h,y)$. On a alors

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f(x+h, y+k) - f(x,y) - L(h,k)}{\|(h,k)\|_2} \right\| &= \left\| \frac{f(h,k)}{\|(h,k)\|_2} \right\| \\ &\leq C \frac{\|h\| \|k\|}{\|(h,k)\|_2} \leq C \frac{\|(h,k)\|_2^2}{\|(h,k)\|_2} = C \|(h,k)\|_2 \,. \end{aligned}$$

On a donc

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x+h,y+k)-f(x,y)-L(h,k)}{\|(h,k)\|_2} = 0$$

ce qui conclut la preuve. □

On a un résultat similaire dans le cas multi-linéaire. La preuve est laissée en exercice.

Proposition 2.13. *Soit E_1, E_2, ..., E_n, F des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ et*

$$f\;:\;E_1 \times E_2 \times ... \times E_n \to F$$

une application n-multilinéaire continue, alors f est différentiable sur $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ et

$$Df(x_1,x_2,...,x_n)(h_1,h_2,...,h_n) = f(h_1,x_2,...,x_n) + f(x_1,h_2,...,x_n) + ... + f(x_1,x_2,...,h_n)$$

ce qu'on peut aussi écrire

$$Df(x_1,x_2,...,x_n)(h_1,h_2,...,h_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_1,...,x_{i-1},h_i,x_{i+1},...,x_n)\,.$$

Proposition 2.14 (Continuité et dimension finie)**.** *Soit E_1, E_2, ..., E_n, F des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$. On suppose que E_1, E_2, ..., E_n sont de dimension finie. Soit*

$$f\;:\;E_1 \times E_2 \times ... \times E_n \to F$$

une application n-multilinéaire, alors f est continue.

En particulier, une application bilinéaire dont l'espace de départ est de dimension finie est continue.

Preuve. C'est une conséquence directe de l'identification

$$\mathcal{L}_n(E_1 \times E_2 \times ... \times E_n\,;\;F) \simeq \mathcal{L}(E_1\,;\;\mathcal{L}(E_2\,;\;...\,;\;\mathcal{L}(E_n\,;\;F)...))$$

et du fait que lorsque l'espace de départ est de dimension finie, une application linéaire est nécessairement continue. □

2.8 Applications quadratiques continues

Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés. Une application $f\;:\;E \to F$ est dite quadratique continue si elle s'écrit sous la forme

$$f(x) = \phi(x,x)$$

où $\phi \in \mathcal{L}_2(E \times E\,;\;F)$, i.e. ϕ est bilinéaire continue de $E \times E$ dans F.

Proposition 2.15. *Une application f quadratique continue est différentiable sur E et pour tout $x, h \in E$, on a*

$$Df(x)(h) = \phi(x,h) + \phi(h,x)\,.$$

Preuve. La fonction f s'écrit sous la forme

$$f = \phi \circ \chi$$

où $\chi\ :\ E \to E \times E$ est définie par $\chi(x) = (x,x)$. Montrons que χ est linéaire continue de E dans $E \times E$. On munit $E \times E$ de la norme $\|.\|_1$, i.e. pour tout $(x,y) \in E \times E$, $\|(x,y)\|_1 = \|x\|_E + \|y\|_E$. L'application χ est clairement linéaire de E dans $E \times E$ et on a pour tout $x \in E$,

$$\|\chi(x)\|_1 = \|(x,x)\|_1 = 2\|x\|_E\,.$$

Donc $\chi \in \mathcal{L}(E\,;\ E \times E)$. Il suit que χ est différentiable de E dans $E \times E$ et pour tout $x, h \in E$, $D\chi(x)(h) = \chi(h)$.

D'autre part, ϕ étant bilinéaire continue de $E \times E$ dans F elle est différentiable sur $E \times E$ et pour tout $(x,y), (h,k) \in E \times E$, on a

$$D\phi(x,y)(h,k) = \phi(x,k) + \phi(h,y)\,.$$

L'application f est donc différentiable sur E comme composée d'applications différentiable et on a pour tout $x, h \in E$

$$\begin{aligned} Df(x)(h) &= D\phi(\chi(x))\big(D\chi(x)(h)\big) \\ &= D\phi(\chi(x))(\chi(h)) = D\phi(x,x)(h,h) = \phi(x,h) + \phi(h,x)\,. \quad \square \end{aligned}$$

2.9 Applications à valeurs dans un produit

Proposition 2.16. *Soit E, F_1, ..., F_n des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de E, $x \in \Omega$ et*

$$f\ :\ E \to F_1 \times F_2 \times ... \times F_n$$

une application. On notera f_1, f_2, ..., f_n les composantes de f, i.e. chaque f_i est une application de E dans F_i. Alors f est différentiable en x si et seulement si chacune des f_i est différentiable en x, auquel cas on a

$$Df(x)(h) = \big(Df_1(x)(h), Df_2(x)(h), ..., Df_n(x)(h)\big)\,.$$

Preuve. Pour montrer ce résultat, on prend la norme $\|.\|_1$ sur $F_1 \times F_2 \times ... \times F_n$ pour simplifier les calculs. Supposons que les f_i sont toutes différentiables en x, on pose

$$L(h) = \big(Df_1(x)(h), Df_2(x)(h), ..., Df_n(x)(h)\big)\,.$$

On a

$$\frac{\|f(x+h) - f(x) - L(h)\|_1}{\|h\|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\|f_i(x+h) - f_i(x) - Df_i(x)(h)\|_{F_i}}{\|h\|}$$

et ceci tend vers 0 quand $h \to 0$. La réciproque est tout aussi simple. On note π_i la projection de $F_1 \times F_2 \times ... \times F_n$ sur F_i, on a

$$f_i = \pi_i \circ f \,.$$

L'application π_i est linéaire continue donc différentiable et $D\pi_i(x) = \pi_i$. Si on suppose que f est différentiable en x, il suit que f_i l'est aussi et de plus

$$Df_i(x) = \big(D\pi_i(f(x))\big) \circ Df(x) = \pi_i \circ Df(x) \,.$$

On a donc bien

$$Df(x)(h) = \big(Df_1(x)(h), Df_2(x)(h), ..., Df_n(x)(h)\big) \,. \quad \square$$

2.10 Applications à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou une algèbre normée sur $\mathbb{R}$

Définition 2.8 (Algèbre normée sur $\mathbb{R}$)**.** *Un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ sur $\mathbb{R}$ est appelé une $\mathbb{R}$-algèbre normée s'il est de plus muni d'une loi interne de multiplication telle que*

$$\begin{gathered} \|xy\| \leq \|x\|\|y\| \,,\ \forall x, y \in E \,, \\ (xy)z = x(yz) \,,\ \forall x, y, z \in E \,, \\ (x+y)z = xz + yz \,,\ x(y+z) = xy + xz \,,\ \forall x, y, z \in E \,, \\ (\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha xy \,,\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \,,\ x, y \in E \,. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Une $\mathbb{R}$-algèbre normée est dite :

- *commutative si $xy = yx$ pour tout $x, y \in E$;*
- *unitaire s'il existe un élément $x \in E$ tel que $xy = yx = y$ pour tout $y \in E$.*

Exemples.

- $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont des $\mathbb{R}$-algèbre normées commutatives et unitaires.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme vérifiant la propriété d'algèbre est une $\mathbb{R}$-algèbre normée unitaire et non commutative.
- I un intervalle compact de $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}(I)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre normée unitaire et commutative.
- $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles et tendant vers 0 à l'infini est une $\mathbb{R}$-algèbre normée commutative et non unitaire.

Proposition 2.17. *Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre normée, E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de E, $x \in \Omega$ et f et g deux applications de Ω dans A. On suppose que f et g sont différentiables en x, alors fg est différentiable en x et*

$$D(fg)(x)(h) = \big(Df(x)(h)\big)g(x) + f(x)Dg(x)(h)\,.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + Df(x)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)\,, \\ g(x+h) &= g(x) + Dg(x)(h) + \|h\|\varepsilon_2(h)\,, \end{aligned}$$

où $\varepsilon_1(h)$ et $\varepsilon_2(h)$ tendent vers 0 lorsque $h \to 0$. Il suit que

$$\begin{aligned} f(x+h)g(x+h) &= \big(f(x) + Df(x)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)\big)\big(g(x) + Dg(x)(h) + \|h\|\varepsilon_2(h)\big) \\ &= f(x)g(x) + \big(Df(x)(h)\big)g(x) + f(x)Df(x)(h) \\ &\quad + Df(x)(h)Dg(x)(h) + \|h\|f(x)\varepsilon_2(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)g(x) \\ &\quad + \|h\|^2\varepsilon_1(h)\varepsilon_2(h)\,. \end{aligned}$$

La propriété d'algèbre (2.8) ainsi que le fait que $Df(x)$ et $Dg(x)$ sont linéaires continues, impliquent que

$$\begin{aligned} &\|Df(x)(h)Dg(x)(h) + \|h\|f(x)\varepsilon_2(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)g(x) + \|h\|^2\varepsilon_1(h)\varepsilon_2(h)\| \\ &\le C\|h\|^2 + \|h\|\big(\|f(x)\|\|\varepsilon_2(h)\| + \|\varepsilon_1(h)\|\|g(x)\|\big) + \|h\|^2\|\varepsilon_1(h)\|\|\varepsilon_2(h)\|\,, \end{aligned}$$

et donc que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|Df(x)(h)Dg(x)(h) + \|h\|f(x)\varepsilon_2(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)g(x) + \|h\|^2\varepsilon_1(h)\varepsilon_2(h)\|}{\|h\|} = 0\,. \quad \square$$

Proposition 2.18. *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de E, $x \in \Omega$ et f et g deux applications de Ω dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et g sont différentiables en x et que $g(x) \neq 0$. Alors il existe $U \subset \Omega$ un ouvert de E contenant x tel que $1/g$ et f/g sont définies sur U. De plus $1/g$ et f/g sont différentiables en x et*

$$D\left(\frac{1}{g}\right)(x)(h) = -\frac{Dg(x)(h)}{(g(x))^2}\,,\ D\left(\frac{f}{g}\right)(x)(h) = \frac{g(x)Df(x)(h) - f(x)Dg(x)(h)}{(g(x))^2}\,.$$

Preuve. Laissée en exercice.

2.11 Exercices

Exercice 2.1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

1. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$.

2. Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

3. Montrer que f n'admet pas de dérivées directionnelles selon les directions qui ne sont pas colinéaires aux axes de coordonnées.

Exercice 2.2. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,.$$

1. Montrer que f admet des dérivées directionnelles en $(0,0)$ selon toutes les directions.

2. Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 2.3. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^4y^3}{x^4+y^4} + x^2 + 6y \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0\,.$$

1. Montrer que f admet en $(0,0)$ des dérivées directionnelles dans toutes les directions et les calculer.

2. Etudier la différentiabilité de f en $(0,0)$.

3. Si f est différentiable en $(0,0)$, en munissant $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|.\|_2$, calculer la norme de $Df(0,0)$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2\,;\,\mathbb{R})$.

Exercice 2.4. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^2+x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0\,.$$

Etudier la différentiabilité de f en $(0,0)$.

Exercice 2.5. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^3+x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0\,.$$

1. Etudier la continuité de f en $(0,0)$.

2. Montrer que f admet en 0 des dérivées directionnelles dans toutes les directions.

3. Etudier la différentiabilité de f en $(0,0)$.

Exercice 2.6. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $B, C \in E$. On considère l'application $f : E \to E$ définie par

$$f(A) = ABA + A + C\,.$$

Montrer que f est différentiable sur E et calculer $Df(A)(H)$ pour tout $A, H \in E$.

Exercice 2.7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \langle Ax, x\rangle$$

et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$g(x) = \langle Ax, x\rangle x\,.$$

1. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et calculer $Df(x)(h)$.
2. Montrer que g est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et calculer $Dg(x)(h)$.

Exercice 2.8. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $B \in E$ et $f : E \to E$ définie par

$$f(A) = ABA + BAB\,.$$

Montrer que f est différentiable sur E et calculer $Df(A)(H)$.

Exercice 2.9. Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, on note $\|.\|$ la norme sur E. On considère l'application $f : E \to E$ définie par $f(x) = \|x\|x$.

1. f admet-elle des dérivées directionnelles en 0 dans toutes les directions?
2. f est-elle différentiable en 0? Si oui déterminer $Df(0)(h)$.
3. Mêmes questions avec la fonction $g : E \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \|x\|$.

Exercice 2.10. On considère une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, non identiquement nulle, telle que $f(0) = 0$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on suppose que f est positivement homogène de degré α, i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\,,\ \forall t > 0\,,\ f(tx) = t^\alpha f(x)\,.$$

1. Montrer que si $\alpha \leq 0$, f n'est pas continue en 0.
2. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
$$|f(x)| \leq C\|x\|^\alpha\,.$$
3. Montrer que si $\alpha > 1$, f admet en 0 des dérivées directionnelles selon toutes les directions.
4. Montrer que si $\alpha > 1$, f est différentiable en 0 et calculer $Df(0)(h)$ pour tout $h \in \mathbb{R}$.

5. Donner une condition suffisante pour que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, puis pour que f soit $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^n$. La fonction f peut-elle être $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$?

Exercice 2.11. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, $\phi \in \mathcal{L}(E\,;E)$ et $\psi \in \mathcal{L}_2(E \times E\,;E)$. On considère les applications suivantes :

$$\begin{aligned} f \,:\, E \to E\,,\ & f(x) = \psi\big(x, \psi(\phi(x), \phi(x))\big)\,, \\ g \,:\, E \times E \to E\,,\ & g(x,y) = \psi(\psi(x,y), \psi(x,y))\,. \end{aligned}$$

Montrer que f et g sont différentiables et calculer leurs différentielles. Plutôt que de développer $f(x+h)$ et $g(x+h, y+k)$, on pourra écrire f et g comme des composées de fonctions simples dont on sait qu'elles sont différentiables et dont on connait la différentielle.

Chapitre 3

Théorème des accroissements finis

3.1 Le théorème

Commençons par énoncer un premier théorème avec des fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 3.1. *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. Soit $[a, b]$ $(a < b)$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Soit $f : [a, b] \to E$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux applications continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$, telles que pour tout $x \in]a, b[$, $\|f'(x)\| \leq g'(x)$. Alors,*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)\,.$$

Preuve. On va montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a) + \varepsilon(b - a) + \varepsilon\,,$$

ce qui établira le théorème car ε est aussi petit qu'on veut. Pour cela on considère pour $\varepsilon > 0$ donné l'ensemble A des $x \in [a, b]$ tels que

$$\|f(x) - f(a)\| > g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon\,.$$

Si A est vide, la preuve est terminée. Supposons donc que $A \neq \emptyset$. Comme ε est donné et strictement positif, on voit que $a \notin A$ et par continuité de f et g il existe $\eta > 0$ tel que $[a, a+\eta] \cap A = \emptyset$. Donc A est minoré par $a+\eta$ et A est non vide par hypothèse. Il admet donc une borne inférieure notée c. On a $a < c$ d'après ce qui précède. De plus $c \notin A$. En effet, A est défini par une inégalité stricte entre fonctions continues, donc A est ouvert. Il suit que si $c \in A$ alors tout un voisinage de c sera dans A, ce qui contredit le fait que c soit la borne inférieure de A. De même $c < b$ car sinon on aurait $A = \{b\}$ et $c = b$ serait dans A. On a donc $c \in]a, b[$ et comme $c \notin A$ on a

$$\|f(c) - f(a)\| \leq g(c) - g(a) + \varepsilon(c - a) + \varepsilon\,.$$

De plus

$$\|f'(c)\| \leq g'(c)\,.$$

Ecrivons que f et g sont dérivables en c :

$$\begin{aligned} f(c+h) &= f(c) + hf'(c) + |h|\varepsilon_1(h)\,, \\ g(c+h) &= g(c) + hg'(c) + |h|\varepsilon_2(h)\,, \end{aligned}$$

où $\varepsilon_1(h)$ et $\varepsilon_2(h)$ tendent vers 0 lorsque $h \to 0$. Nous allons montrer que pour $h > 0$ assez petit, $c + h \notin A$, ce qui contredira le fait que $c = \inf A$ (on rappelle qu'on a montré que $c \notin A$). Pour $h > 0$, on a

$$\begin{aligned} \|f(c+h) - f(a)\| &\leq \|f(c+h) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\| \\ &\leq h(\|f'(c)\| + \|\varepsilon_1(h)\|) + g(c) - g(a) + \varepsilon(c-a) + \varepsilon \\ &\leq h(g'(c) + \|\varepsilon_1(h)\|) + g(c) - g(a) + \varepsilon(c-a) + \varepsilon \\ &\leq h(\|\varepsilon_1(h)\| - \varepsilon_2(h)) + g(c+h) - g(a) + \varepsilon(c-a) + \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Et comme $\varepsilon_1(h)$ et $\varepsilon_2(h)$ tendent vers 0 lorsque $h \to 0$, on peut choisir h_0 assez petit pour que pour tout $h \in]0, h_0]$ on ait

$$\|\varepsilon_1(h)\| - \varepsilon_2(h) \leq \varepsilon\,.$$

Il suit qu'il existe $h_0 > 0$ tel que pour tout $h \in]0, h_0]$,

$$\|f(c+h) - f(a)\| \leq g(c+h) - g(a) + \varepsilon(c+h-a) + \varepsilon\,,$$

i.e. $]c, c+h_0] \cap A = \emptyset$. On a une contradiction. Donc $A = \emptyset$. □

Le théorème des accroissements finis est maintenant un résultat à peu près immédiat.

Théorème 3.2 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de E et f une application différentiable de Ω dans F. Soit $x, y \in \Omega$ tels que le segment $[x, y]$ soit inclus dans Ω. Alors*

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \|y - x\| \sup_{z \in [x,y]} \|Df(z)\|_{\mathcal{L}(E,F)}\,.$$

Preuve. On paramètre le segment $[x, y]$ de la façon usuelle

$$[x, y] = \{x + t(y - x)\,,\ t \in [0, 1]\}\,.$$

On note

$$k = \sup_{z \in [x,y]} \|Df(z)\|_{\mathcal{L}(E,F)}\,.$$

Si $k = +\infty$, le théorème est trivial. On suppose donc que $k < \infty$. On définit les deux fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \phi\ :\ [0,1] \to F\,,\ \phi(t) = f(x + t(y - x))\,, \\ \psi\ :\ [0,1] \to \mathbb{R}^+\,,\ \psi(t) = k\|y - x\|t\,. \end{aligned}$$

Elles vérifient bien les hypothèses du théorème 3.1. En effet

$$\begin{aligned}\|\phi'(t)\|_F &= \|Df(x+t(y-x))(y-x)\|_F \\ &\leq \|Df(x+t(y-x))\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|(y-x)\|_E \\ &\leq k\|y-x\| = \psi'(t)\,.\end{aligned}$$

On a donc

$$\|\phi(1)-\phi(0)\| \leq \psi(1)-\psi(0)$$

et le théorème est démontré. □

A noter que dans le cas des fonctions définies sur un ouvert d'un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on peut montrer une **égalité** des accroissements finis qui est une conséquence directe de l'égalité des accroissements finis usuelle.

Théorème 3.3 (Une égalité des accroissements finis)**.** *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de E, f une application de Ω dans $\mathbb{R}$ différentiable dans Ω. Soit $x, y \in \Omega$ tels que le segment $[x, y]$ soit inclus dans Ω. Alors il existe $z \in]x, y[$ tel que*

$$f(y) - f(x) = Df(z)(y-x)\,.$$

Preuve. On considère l'application

$$\phi\,:\,[0,1] \to \mathbb{R}\,,\ \phi(t) = f(x+t(y-x))\,.$$

Elle est dérivable sur $[0, 1]$, donc par l'égalité des accroissements finis usuelle, il existe $c \in]0, 1[$ tel que

$$\phi(1)-\phi(0) = \phi'(c)\,.$$

On pose $z = x + c(y - x)$ et on a le résultat. □

3.2 Applications

3.2.1 Classe $\mathcal{C}^1$ et dérivées partielles

Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, l'égalité (2.1) donne une caractérisation simple de la classe $\mathcal{C}^1$ en fonction des dérivées partielles, que l'inégalité des accroissements finis va nous permettre de démontrer.

Proposition 3.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, F un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et $f : \Omega \to F$ une application. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω si et seulement si les dérivées partielles de f par rapport à toutes les variables existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω.*

Preuve. On note $\{e_1\,,\ \dots\,,\ e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω alors les dérivées partielles de f par rapport à toutes les variables existent en tout point de Ω et sont données par

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = Df(x)(e_i)\,.$$

Pour $x, y \in \Omega$ assez proches pour que $[x, y] \subset \Omega$, on a

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right\| = \|Df(y)(e_i) - Df(x)(e_i)\| \leq \|Df(y) - Df(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, F)} .$$

Donc la continuité de Df sur Ω entraine celle des dérivées partielles.

Supposons maintenant que les dérivées partielles de f par rapport à toutes les variables existent en tout point de Ω et soient continues sur Ω. Alors l'application

$$L_x(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

est linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans F, et donc aussi continue car $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie. De plus l'application $x \mapsto L_x$ est continue de Ω dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, F)$. En effet pour $x, y \in \Omega$ assez proches pour que $[x, y] \subset \Omega$, on a

$$\begin{aligned} \|L_y - L_x\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, F)} &= \sup_{\|h\|=1} \left\| \sum_{i=1}^{n} h_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right) \right\|_F \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right\|_F \to 0 \text{ lorsque } y \to x . \end{aligned}$$

Il reste donc simplement à montrer que f est différentiable en tout point x de Ω et que $Df(x) = L_x$. Pour $x \in \Omega$ et $\rho > 0$ tel que $B(x, \rho) \subset \Omega$, pour $h \in B(0, \rho)$, on a

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \sum_{k=2}^{n} \Big(f(x_1 + h_1, ..., x_k + h_k, x_{k+1}, ..., x_n) \\ &\qquad - f(x_1 + h_1, ..., x_{k-1} + h_{k-1}, x_k, ..., x_n) \Big) \\ &\quad + f(x_1 + h_1, x_2, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n) . \end{aligned}$$

Pour simplifier, on notera cela

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \sum_{k=1}^{n} \Big(f(x_1 + h_1, ..., x_k + h_k, x_{k+1}, ..., x_n) \\ &\qquad - f(x_1 + h_1, ..., x_{k-1} + h_{k-1}, x_k, ..., x_n) \Big) . \end{aligned}$$

Il suit donc que

$$f(x+h) - f(x) - \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^{n} (\phi_k(h_k) - \phi_k(0)) ,$$

où

$$\phi_k(t) = f(x_1 + h_1, ..., x_{k-1} + h_{k-1}, x_k + t, x_{k+1}, ..., x_n) - t \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) .$$

Par l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\|\phi_k(h_k) - \phi_k(0)\| \leq M_k|h_k|\,,$$

où

$$\begin{aligned} M_k &= \sup_{t\in[0,h_k]} \|\phi_k'(t)\| \\ &= \sup_{t\in[0,h_k]} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1+h_1,...,x_{k-1}+h_{k-1},x_k+t,x_{k+1},...,x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \right\|\,. \end{aligned}$$

On en déduit que (en prenant la norme $\|.\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$ et en utilisant Cauchy-Schwarz)

$$\left\| f(x+h) - f(x) - \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right\|_F \leq \|h\| \left(\sum_{k=1}^n M_k^2 \right)^{1/2}\,.$$

Comme par continuité des dérivées partielles de f sur Ω les M_k tendent vers 0 quand $h \to 0$, on obtient bien que f est différentiable en tout point x de Ω et que $Df(x) = L_x$. $\square$

3.2.2 Un théorème de point fixe

Théorème 3.4. *Soit E un espace de Banach et $f : E \to E$ une application. On suppose qu'il existe $k \in [0,1[$ tel que pour tout $x \in E$,*

$$\|Df(x)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq k\,.$$

Alors f admet un unique point fixe dans E, i.e. il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = x$.

Preuve. Commençons par montrer l'unicité. Supposons qu'il existe deux points fixes distincts x et y de f. C'est-à-dire qu'on a

$$f(x) = x\,,\ f(y) = y\,,\ x \neq y\,.$$

Ceci est impossible car l'inégalité des accroissements finis nous donne

$$\|f(y) - f(x)\| \leq k\|y - x\| < \|y - x\| = \|f(y) - f(x)\|\,.$$

C'est absurde.

Pour montrer l'existence, considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E définie par

$$u_0 = 0\,,\ u_{n+1} = f(u_n)\,.$$

Cette suite converge si et seulement si la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n\,,\ v_n = u_n - u_{n-1}\,,$$

est convergente. Or d'après le Théorème des accroissements finis, on a

$$\|u_n - u_{n-1}\| = \|f(u_{n-1}) - f(u_{n-2}\| \leq k\|u_{n-1} - u_{n-2}\| \leq ... \leq k^{n-1}\|u_1 - u_0\|\,.$$

Comme $k \in [0,1[$, la série est absolument convergente et donc convergente du fait qu'on est dans un espace de Banach. $\square$

Remarque 3.1. On peut énoncer un théorème analogue pour $f : \Omega \to \Omega$ où Ω est un ouvert convexe de E.

3.3 Exercices

Exercice 3.1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = \left(\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\, y, \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\, x\right)$. Montrer que f admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}^2$ puis le déterminer.

Exercice 3.2. Soit la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{\sin(x)}{1+y^2}\,.$$

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne.

1. f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, calculer
$$\|Df(x,y)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})}\,.$$

3. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a
$$|f(x,y)| \le \sqrt{2}\|(x,y)\|\,.$$

Exercice 3.3. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, différentiable sur $\mathbb{R}^2$, telle que $f(0,0) = 0$ et en tout point p de $\mathbb{R}^2$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(p)\right| \le \frac{1}{2}\,, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(p)\right| \le \frac{1}{2}\,.$$

1. Montrer que la norme de $Df(p)$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2\,;\,\mathbb{R})$ est strictement inférieure à 1 pour tout $p \in \mathbb{R}^2$.

2. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{R}^2$, on a $|f(p)| \le \|p\|$.

Exercice 3.4. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne et $\mathbb{R}$ de la valeur absolue. Soit l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par (on note $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$)

$$f(x) = \log\left(1 + x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right)\,.$$

1. Déterminer $Df(x)(h)$ pour $x \neq 0$.

2. Calculer $\|Df(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n\,;\,\mathbb{R})}$ pour $x \neq 0$.

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a $|f(x)| \le \|x\|$.

Exercice 3.5. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne et $\mathbb{R}$ de la valeur absolue. Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2+y^2}\right)\,.$$

1. Déterminer $Df(x,y)(h,k)$.
2. Calculer $\|Df(x,y)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2\,;\,\mathbb{R})}$.
3. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a
$$\left| f(x,y) - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|(x,y)\| \, .$$
Indication : on pourra utiliser une identité remarquable classique.

Chapitre 4

Différentielles secondes et supérieures

4.1 Différentielles secondes

Notation. Etant donnés E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, on notera $\mathcal{L}_k(E^k; F)$ l'espace des applications k-multilinéaires continues de $E \times E \times ... \times E$ (k fois) dans F.

Définition 4.1. *Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de E, $x \in \Omega$ et $f : \Omega \to F$ une application. On dira que f est deux fois différentiable en x si elle est différentiable au voisinage de x et si l'application $x \mapsto Df(x)$, définie au voisinage de x et à valeurs dans $\mathcal{L}(E; F)$, est différentiable en x. On notera $D^2 f(x)$ la différentielle de Df au point x. De façon analogue, on dira que f est deux fois différentiable sur Ω si f est différentiable sur Ω et l'application $x \mapsto Df(x)$, définie sur Ω et à valeurs dans $\mathcal{L}(E; F)$, est différentiable sur Ω. On notera $D^2 f$ la différentielle seconde de f, i.e. la différentielle de Df.*

En chaque point x où elle est définie, la différentielle seconde de f est une application linéaire continue de E dans $\mathcal{L}(E; F)$. On a une identification canonique entre $\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F))$ et $\mathcal{L}_2(E \times E; F)$, espace des applications bilinéaires continues de $E \times E$ dans F. Plutôt que de considérer

$$D^2 f(x) \, : \, h \mapsto \big(k \mapsto Df(x)(h)(k)\big) \, ,$$

on notera $D^2 f(x)(h, k)$. Evidemment on pourrait craindre que l'isomorphisme canonique ci-dessus ne le soit en fait pas : on aurait en effet pu poser $D^2 f(x)(h, k) := D^2 f(x)(k)(h)$ au lieu de $D^2 f(x)(h)(k)$. Cela n'a en fait aucune importance comme le montre le théorème de Schwarz.

Théorème 4.1 (de Schwarz)**.** *Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de E, $x \in \Omega$, $f : \Omega \to F$ une application 2 fois différentiable en x. Alors*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)\,,\ (h,k)\in E\times E} \frac{f(x+h+k) - f(x+h) - f(x+k) + f(x) - D^2 f(x)(h,k)}{(\|h\| + \|k\|)^2} = 0 \, .$$

Il suit en particulier que $D^2 f(x)$ est une application bilinéaire continue **symétrique**, *i.e.*

$$D^2 f(x)(h,k) = D^2 f(x)(k,h) \ \forall (h,k) \in E \times E\,.$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Comme Df est différentiable en x, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $\|h\| < 2\delta$ on ait

$$\left\| Df(x+h) - Df(x) - D^2 f(x)(h) \right\|_{\mathcal{L}(E;F)} \leq \varepsilon \|h\|\,. \tag{4.1}$$

Soit h et k de normes inférieures à δ. On pose

$$g_h(k) = f(x+h+k) - f(x+h) - f(x+k) + f(x) - D^2 f(x)(h,k)\,.$$

En utilisant ce qu'on a vu sur la différentielle d'une application linéaire continue, il vient

$$\begin{aligned} Dg_h(k) &= Df(x+h+k) - Df(x+k) - D^2 f(x)(h) \\ &= \left[Df(x+h+k) - Df(x) - D^2 f(x)(h+k) \right] \\ &\quad - \left[Df(x+k) - Df(x) - D^2 f(x)(k) \right]\,. \end{aligned}$$

En utilisant (4.1), il suit pour $\|h\| < \delta$ et $\|k\| < \delta$,

$$\|Dg_h(k)\|_{\mathcal{L}(E;F)} \leq \varepsilon(\|h+k\| + \|k\|) \leq 2\varepsilon(\|h\| + \|k\|)\,.$$

On applique alors le théorème des accroissements finis à g_h dans le segment $[0,k]$ avec $\|k\| < \delta$ et pour $\|h\| < \delta$. Comme $g_h(0) = 0$,

$$\|g_h(k)\| \leq 2\varepsilon(\|h\| + \|k\|)\|k\| \leq 2\varepsilon(\|h\| + \|k\|)^2\,.$$

On a donc établi la première partie du théorème. Fixons maintenant h et k dans E. On a

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t\to 0, t>0} \frac{f(x+th+tk) - f(x+th) - f(x+tk) + f(x) - D^2 f(x)(th,tk)}{(\|th\| + \|tk\|)^2} \\ &= \lim_{t\to 0, t>0} \frac{f(x+th+tk) - f(x+th) - f(x+tk) + f(x) - t^2 D^2 f(x)(h,k)}{t^2(\|h\| + \|k\|)^2} \\ &= \left(\lim_{t\to 0, t>0} \frac{f(x+th+tk) - f(x+th) - f(x+tk) + f(x)}{t^2(\|h\| + \|k\|)^2} \right) - \frac{D^2 f(x)(h,k)}{(\|h\| + \|k\|)^2}\,. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$D^2 f(x)(h,k) = \lim_{t\to 0, t>0} \frac{f(x+th+tk) - f(x+th) - f(x+tk) + f(x)}{t^2}$$

et comme l'expression dans la limite est symétrique en (h,k), il suit que $D^2 f(x)(h,k)$ l'est également. $\square$

4.2 Différentielles d'ordre supérieur

De proche en proche on définit les différentielles successives d'une application, si elles existent. On dira que f est k fois différentiable en x si elle est $k-1$ fois différentiable dans un voisinage de x et si l'application $D^{k-1}f$ est différentiable en x. On notera alors $D^k f(x)$ sa différentielle. On la considèrera comme une application k-multilinéaire continue de E^k dans F, i.e. un élément de $\mathcal{L}_k(E^k\,;\,F)$, plutôt que comme un élément de

$$\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; ...\mathcal{L}(E; F)))\,.$$

On a une version du théorème de Schwarz pour les différentielles d'ordre supérieur.

Théorème 4.2 (Généralisation du théorème de Schwarz)**.** *Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de E, $x \in \Omega$, $f : \Omega \to F$ une application k fois différentiable en x. Alors $D^k f(x) \in \mathcal{L}_k(E^k; F)$ est une application k-multilinéaire continue symétrique, i.e. pour toute permutation s de $\{1, 2, ..., k\}$,*

$$D^k f(x)(h_{s(1)}, h_{s(2)}, ..., h_{s(k)}) = D^k f(x)(h_1, h_2, ..., h_k)\ ,\quad \forall (h_1, h_2, ..., h_k) \in E^k\,.$$

Preuve. Par récurrence. La propriété est vraie pour $k = 2$. Supposons qu'elle le soit pour $2 \le p \le k$, $k \ge 2$ donné. On a

$$D^{k+1} f(x) = D D^k f(x)$$

et $D^k f$ est à valeurs dans $\mathcal{L}_k^{\mathrm{sym}}(E^k; F)$, espace des applications k-linéaires continues symétriques de E^k dans F. Donc si la permutation s de $\{1, 2, ..., k+1\}$ laisse 1 invariant, le résultat est vrai. Si elle ne laisse pas 1 invariant, elle est la composée de permutations laissant 1 invariant et de la permutation qui ne fait qu'échanger 1 et 2 en laissant $3, ..., k+1$ fixes. Il suffit donc de prouver que

$$D^{k+1} f(x)(h_1, h_2, h_3, ..., h_{k+1}) = D^{k+1} f(x)(h_2, h_1, h_3, ..., h_{k+1})\,.$$

Mais comme $D^{k+1} f = D^2 D^{k-1} f$, cette propriété découle du Théorème de Schwarz. □

Définition 4.2. *Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to F$ une application. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ dans Ω (ou encore que $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$) pour $k \in \mathbb{N}^*$, si elle admet des différentielles successives jusqu'à l'ordre k et si elles sont toutes continues sur Ω. On dira que f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur Ω (ou encore que $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$) si elle est continue sur Ω. On dira que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω (ou encore que $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$) si elle est de classe $\mathcal{C}^k$ sur Ω pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Remarque 4.1. Comme différentiabilité implique continuité, f est de classe $\mathcal{C}^k$ dans Ω si et seulement si elle admet des différentielles successives jusqu'à l'ordre k et si $D^k f$ est continue sur Ω. De même f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans Ω si et seulement si elle admet des différentielles successives à tous les ordres en tout point de Ω.

4.3 Cas où $E = \mathbb{R}^n$

Dans cette situation, on peut donner une expression de la différentielle k-ième en fonction des dérivées partielles d'ordre k de la fonction.

Proposition 4.1. *Soit Ω un ouvert de $E = \mathbb{R}^n$, F un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et $f : \Omega \to F$ une application. Si f est k fois différentiable en un point x de Ω, alors elle admet au voisinage de x toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre $k-1$ et en x toutes les dérivées partielles d'ordre k. De plus la différentielle k-ième de f en x s'écrit*

$$D^k f(x)(h^1, ..., h^k) = \sum_{i_1=1}^{n} ... \sum_{i_k=1}^{n} h^1_{i_1} ... h^k_{i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_k}}(x) \,. \tag{4.2}$$

Proof. C'est une conséquence directe de l'expression de la différentielle de f en fonction de ses dérivées partielles. On peut raisonner par récurrence en appliquant ce résultat à chaque étape. □

Afin d'illustrer la formule de la proposition dans des cas plus simples, donnons-la pour $E = \mathbb{R}^2$ et pour de petites valeurs de k. Nous avons dans ce cas $x = (x_1, x_2)$ (on peut aussi noter (x, y) si on préfère, mais il est alors maladroit d'appeler le vecteur x).

- $k = 1$: nous prenons un seul vecteur qui serait h^1 pour la proposition ci-dessus, nous le notons simplement $h = (h_1, h_2)$;

  $$Df(x)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) h_2 \,.$$

  Les dérivées partielles premières sont les images des vecteurs de la base canonique par la différentielle de f en x :

  $$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = Df(x)(e_1) \text{ où } e_1 = (1, 0) \,, \; \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = Df(x)(e_2) \text{ où } e_2 = (0, 1) \,.$$

- $k = 2$: nous avons cette fois-ci deux vecteurs h^1 et h^2, nous les noterons h et k pour limiter le nombre d'indices et y voir plus clair ;

  $$D^2 f(x)(h, k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) h_1 k_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) h_1 k_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) h_2 k_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) h_2 k_2 \,.$$

  Les dérivées partielles secondes s'interprêtent de la façon suivante, où comme ci-dessus, e_1 et e_2 sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

  $$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) &= D^2 f(x)(e_1, e_1) \,, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) &= D^2 f(x)(e_1, e_2) \,, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) &= D^2 f(x)(e_2, e_1) \,, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) &= D^2 f(x)(e_2, e_2) \,. \end{aligned}$$

A noter que le Théorème de Schwarz, qui assure la symétrie de la différentielle seconde de f, implique donc que l'on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x)\,.$$

On a aussi une caractérisation du fait qu'une fonction soit $\mathcal{C}^k$ en fonction de la continuité de ses dérivées partielles k-ièmes.

Proposition 4.2. *Soit Ω un ouvert de $E = \mathbb{R}^n$, F un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et $f : \Omega \to F$ une application. Alors f est $\mathcal{C}^k$ sur Ω si et seulement si elle admet en tout point de Ω des dérivées partielles par rapport à toutes les variables jusqu'à l'ordre k et ses dérivées partielles d'ordre k sont toutes continues sur Ω.*

Preuve. On applique par récurrence la caractérisation des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ en termes de continuité de leurs dérivées partielles. □

4.4 Quelques exemples

Voici quelques exemples de dérivées successives. Les vérifications sont de bonnes applications du cours et peuvent être traitées en exercices.

4.4.1 Application linéaire continue

Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ et $L : E \to F$ une application linéaire continue. Alors $L \in \mathcal{C}^\infty(E)$ et

$$\begin{aligned} DL(x)(h) &= L(h)\,, \\ D^k L &\equiv 0 \text{ pour } k \geq 2\,. \end{aligned}$$

Nous avons déjà vu le calcul de la différentielle d'une application linéaire continue. On a $DL(x) = L$ pour tout $x \in E$, c'est-à-dire que DL est constante sur E (à valeurs dans $\mathcal{L}(E; F)$). Il suit d'après la Section 2.2 que DL est différentiable sur E et que sa différentielle est identiquement nulle sur E (donc constante sur E, donc différentiable de différentielle nulle, etc...).

4.4.2 Application bilinéaire continue

Soit E, F et G trois espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ et $f : E \times F \to G$ une application bilinéaire continue. Alors $f \in \mathcal{C}^\infty(E \times F)$ et

$$\begin{aligned} Df(x,y)(h,k) &= f(x,k) + f(h,y)\,, \\ D^2 f(x,y)\big((h_1,k_1),(h_2,k_2)\big) &= f(h_2,k_1) + f(h_1,k_2)\,, \\ D^k f &\equiv 0 \text{ pour } k \geq 3\,. \end{aligned}$$

On a déjà vu le calcul de la différentielle d'une application bilinéaire continue. On remarque que l'application qui à (x,y) associe $Df(x,y)(h,k)$ est linéaire (de $E \times F$ dans G), du fait que f est bilinéaire[1]. Il suit que l'application qui à (x,y) associe $Df(x,y)$ est linéaire (de $E \times F$ dans $\mathcal{L}(E \times F\,;\ G)$). De plus elle est continue. En effet, comme f est bilinéaire continue, il existe $C > 0$ telle que pour tout $(x,y) \in E \times F$ on ait

$$\|f(x,y)\|_G \leq C\|x\|_E\|y\|_F\,.$$

On a donc (en choisissant la norme $\|.\|_1$ sur $E \times F$)

$$\begin{aligned}
\|Df(x,y)(h,k)\|_G &\leq \|f(h,y)\|_G + \|f(x,k)\|_G \\
&\leq C\left(\|h\|_E\|y\|_F + \|x\|_E\|k\|_F\right) \\
&\leq C\left(\|x\|_E + \|y\|_F\right)\left(\|h\|_E + \|k\|_F\right) = C\|(x,y)\|_1\|(h,k)\|_1\,.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|Df(x,y)\|_{\mathcal{L}(E\times F\,;\ G)} = \sup_{(h,k)\neq(0,0)} \frac{\|Df(x,y)(h,k)\|_G}{\|(h,k)\|_1} \leq C\|(x,y)\|_1\,,$$

donc $Df\ :\ (x,y) \mapsto Df(x,y)$ est une application linéaire continue de $E \times F$ dans $\mathcal{L}(E \times F\,;\ G)$. Il suit qu'elle est différentiable sur $E \times F$ et sa différentielle en tout point de $E \times F$ est Df. Autrement dit f est deux fois différentiable sur $E \times F$ et

$$D^2f(x,y)((h,k),(u,v)) = Df(u,v)(h,k) = f(h,v) + f(u,k)\,.$$

Maintenant on voit que cette expression est indépendante de (x,y), c'est-à-dire que D^2f est une application constante de $E \times F$ dans $\mathcal{L}_2((E \times F) \times (E \times F))\,;\ G)$. Elle est donc différentiable de différentielle nulle.

4.4.3 Application quadratique continue

Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, $f\ :\ E \times E \to F$ une application bilinéaire continue. On définit l'application quadratique $q\ :\ E \to F$ par $q(x) = f(x,x)$. Alors $q \in \mathcal{C}^\infty(E)$ et

$$\begin{aligned}
Dq(x)(h) &= f(x,h) + f(h,x)\,, \\
D^2q(x)(h,k) &= f(k,h) + f(h,k)\,, \\
D^kq &\equiv 0 \text{ pour } k \geq 3\,.
\end{aligned}$$

Commençons par étudier la différentielle de q. On écrit q comme la composée de deux fonctions :

$$q = f \circ \phi$$

[1] Attention!!!!! On parle bien ici de l'application qui à (x,y) associe $Df(x,y)(h,k)$. L'expression $Df(x,y)(h,k)$ est forcément linéaire en (h,k), c'est une propriété essentielle de toute application différentiable. Ce qui est remarquable ici c'est que ce soit aussi linéaire par rapport à (x,y). Ce n'est pas vrai en général ; c'est vrai ici du fait que f est bilinéaire.

où

$$\phi \,:\, E \to E \times E\,,\ \phi(x) = (x, x)\,.$$

L'application ϕ est linéaire et continue. En effet, choisissons la norme $\|.\|_1$ sur $E \times E$, i.e. pour tout $(x, y) \in E \times E$, $\|(x, y)\|_1 = \|x\|_E + \|y\|_E$. On a

$$\|\phi(x)\|_1 = 2\|x\|_E\,.$$

Donc ϕ est différentiable sur E et

$$D\phi(x)(h) = \phi(h) = (h, h)\,.$$

On sait que f est différentiable sur $E \times E$, car elle est bilinéaire continue, et que

$$Df(x, y)(h, k) = f(h, y) + f(x, k)\,.$$

On voit donc que q est différentiable sur E comme composée de fonctions différentiables et pour tous $x, h \in E$,

$$Dq(x)(h) = Df(\phi(x))(D\phi(x)(h)) = Df(x, x)(h, h) = f(h, x) + f(x, h)\,.$$

Maintenant on remarque que $x \mapsto Dq(x)(h)$ est linéaire de E dans F, donc $Dq\,:\ x \mapsto Dq(x)$ est linéaire de E dans $\mathcal{L}(E\,;\ F)$. De plus elle est continue. En effet, comme f est bilinéaire continue, il existe $C > 0$ telle que pour tout $(x, y) \in E \times E$ on ait

$$\|f(x, y)\|_F \leq C\|x\|_E\|y\|_E\,.$$

Donc

$$\begin{aligned} \|Dq(x)(h)\|_F &= \|f(h, x) + f(x, h)\|_F \\ &\leq \|f(h, x)\|_F + \|f(x, h)\|_F \\ &\leq 2C\|x\|_E\|h\|_E\,. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|Dq(x)\|_{\mathcal{L}(E\,;\ F)} = \sup_{h \neq 0} \frac{\|Dq(x)(h)\|_F}{\|h\|_E} \leq 2C\|x\|_E\,.$$

L'application Dq est donc linéaire continue de E dans $\mathcal{L}(E\,;\ F)$ et sa différentielle en tout point est donc égale à Dq. Plus précisément, q est deux fois différentiable sur E et

$$D^2q(x)(h)(k) = Dq(k)(h) = f(h, k) + f(k, h)\,.$$

On voit que l'expression est indépendante de x, c'est-à-dire que D^2q est une application constante de E dans $\mathcal{L}_2(E \times E\,;\ F)$. Elle est donc différentiable de différentielle nulle.

4.4.4 Application multilinéaire continue

Une application n-multilinéaire continue entre des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$: $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ et F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ et toutes ses différentielles d'ordre $k \geq n+1$ sont nulles. On pourra "s'amuser" à trouver l'expression de ses différentielles successives d'ordres inférieurs ou égaux à n. Faisons-le dans le cas de la différentielle seconde :

$$D^2 f(x_1, x_2, ..., x_n)\left((h_1, h_2, ..., h_n), (k_1, k_2, ..., k_n)\right)$$

se calcule en remplaçant dans $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ un x_i par le h_i correspondant et un x_j par le k_j correspondant, de toutes les façons possibles et en faisant la somme de tous ces termes. C'est-à-dire

$$\begin{aligned} & D^2 f(x_1, x_2, ..., x_n)\left((h_1, h_2, ..., h_n), (k_1, k_2, ..., k_n)\right) \\ = & \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} f(x_1, ..., x_{i-1} h_i, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, k_j, x_{j+1}, ..., x_n)\,. \end{aligned}$$

4.5 Formules de Taylor

4.5.1 Les deux formules principales

On commence par la formule de Taylor-Lagrange qui donne une majoration de l'erreur entre la fonction et son polynôme de Taylor.

Théorème 4.3 (Formule de Taylor avec reste de Lagrange)**.** *Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to F$ une application $n+1$ fois différentiable sur Ω. On suppose qu'il existe $C > 0$ telle que*

$$\|D^{n+1} f(y)\|_{\mathcal{L}_{n+1}(E^{n+1}\,;\;F)} \leq C \text{ pour tout } y \in \Omega\,.$$

Soit $x \in \Omega$ et $h \in E$ tels que le segment $[x, x+h]$ soit contenu dans Ω. Alors

$$\begin{aligned} \left\| f(x+h) - f(x) - Df(x)(h) - \frac{1}{2!} D^2 f(x)(h,h) - ... - \frac{1}{n!} D^n f(x)(h, h, ..., h) \right\| \\ \leq \frac{C \|h\|^{n+1}}{(n+1)!}\,. \end{aligned}$$

On peut également écrire la formule de la façon suivante :

$$f(x+h) = P_n(h) + R_n(h)$$

où $P_n(h)$ est le "polynôme" de Taylor de f en x à l'ordre n

$$P_n(h) = f(x) + Df(x)(h) + \frac{1}{2!} D^2 f(x)(h,h) + ... + \frac{1}{n!} D^n f(x)(h, h, ..., h)$$

et le reste $R_n(h)$ vérifie

$$\|R_n(h)\| \leq \frac{C \|h\|^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

Preuve du Théorème 4.3. On pose

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= f(x+th) + (1-t)Df(x+th)(h) + \frac{(1-t)^2}{2!}D^2f(x+th)(h,h) \\
&\quad + ... + \frac{(1-t)^n}{n!}D^n f(x+th)(h,h,...,h)\,, \\
g(t) &= -\frac{C(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}\|h\|^{n+1}\,.
\end{aligned}$$

La fonction ψ est dérivable sur $[0,1]$ et

$$\psi'(t) = \frac{(1-t)^n}{n!}D^{n+1}f(x+th)(h,h,...,h)\,. \tag{4.3}$$

Pour plus de détails, calculons cette dérivée terme à terme (le “prime” dans ce qui suit désigne une dérivée usuelle par rapport à t) :

$$\begin{aligned}
\big(f(x+th)\big)' &= Df(x+th)(h)\,, \\
\big((1-t)Df(x+th)(h)\big)' &= -Df(x+th)(h) + (1-t)D^2f(x+th)(h,h)\,, \\
\left(\frac{(1-t)^2}{2!}D^2f(x+th)(h,h)\right)' &= -(1-t)D^2f(x+th)(h,h) \\
&\quad + \frac{(1-t)^2}{2!}D^3f(x+th)(h,h,h)\,, \\
... \quad & ... \quad ... \\
\left(\frac{(1-t)^n}{n!}D^n f(x+th)(h,h,...,h)\right)' &= -\frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}D^n f(x+th)(h,h,...,h) \\
&\quad + \frac{(1-t)^n}{n!}D^{n+1}f(x+th)(h,h,...,h)\,.
\end{aligned}$$

En faisant la somme, on voit que tous les termes s'annulent deux à deux et que seul reste le dernier terme, i.e. on obtient (4.3).

De même, g est dérivable sur $[0,1]$ et

$$g'(t) = \frac{C(1-t)^n}{n!}\|h\|^{n+1}\,.$$

D'après l'hypothèse sur la différentielle $(n+1)$-ième de f, on a pour tout $t \in [0,1]$

$$\|\psi'(t)\| \leq g'(t)$$

et par le Théorème 3.1, il suit

$$\|\psi(1) - \psi(0)\| \leq g(1) - g(0)$$

ce qui donne le résultat. □

On peut affaiblir les hypothèses si on accepte de perdre un peu de contrôle sur le reste. La formule qui suit donne un développement limité de f en x à l'ordre n avec un minimum de contrôle sur le reste.

Théorème 4.4 (Développement limité ou formule de Taylor-Young)**.** *Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de E et $f\,:\,\Omega \to F$ une application n fois différentiable sur Ω, admettant en x une différentielle $(n+1)$-ième. Alors*

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + Df(x)(h) + \frac{1}{2!}D^2f(x)(h,h) + ... + \frac{1}{(n+1)!}D^{n+1}f(x)(h,h,...,h) \\ &\quad + \|h\|^{n+1}\varepsilon(h)\,, \end{aligned}$$

où $\varepsilon(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$.

Preuve du Théorème 4.4. On sait que le résultat est vrai pour $n = 0$ d'après la définition de la différentiabilité de f en x. On procède maintenant par récurrence. Supposons que le théorème soit vrai pour n, i.e. avec une dernière dérivée d'ordre n et un reste de la forme $\|h\|^n\varepsilon(h)$. On pose

$$\phi(h) = f(x+h) - f(x) - Df(x)(h) - \frac{1}{2!}D^2f(x)(h,h) - ... - \frac{1}{(n+1)!}D^{n+1}f(x)(h,h,...,h)\,.$$

On va calculer la différentielle de ϕ :

$$D\phi(h)(k) = Df(x+h)(k) - Df(x)(k) - D^2f(x)(h,k) - ... - \frac{1}{n!}D^{n+1}f(x)(h,h,...,h,k)\,.$$

On pose alors $g = Df$, on a

$$D\phi(h) = g(x+h) - g(x) - Dg(x)(h) - ... - \frac{1}{n!}D^n g(x)(h,h,...,h)\,,$$

qui est une égalité dans $\mathcal{L}(E,F)$. On applique alors l'hypothèse de récurrence à $D\phi(h)$:

$$D\phi(h) = \|h\|^n\varepsilon(h)\,,$$

où $\varepsilon(h) \to 0$ dans $\mathcal{L}(E,F)$ lorsque $h \to 0$. C'est-à-dire que pour tout $\eta > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|h\| < \delta \Rightarrow \|D\phi(h)\| \leq \eta\|h\|^n\,.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, il suit que pour tout $h \in E$ tel que $\|h\| < \delta$, on a

$$\|\Phi(h) - \phi(0)\| \leq \eta\|h\|^{n+1}\,.$$

Et comme $\phi(0) = 0$, on a pour tout $h \in E$ tel que $\|h\| < \delta$,

$$\|\Phi(h)\| \leq \eta\|h\|^{n+1}\,.$$

Le résultat est donc démontré. $\square$

4.5.2 Cas où $E = \mathbb{R}^n$

Dans ce cas on a une expression explicite du polynôme de Taylor en fonction des dérivées partielles successives de la fonction. La formule (4.2) donnait l'expression détaillée de $D^k f(x)(h^1, h^2, ..., h^k)$. Dans les formules de Taylor, c'est $D^k f(x)(h, h, ..., h)$ qui intervient et on va avoir des simplifications dues à la symétrie de $D^k f(x)$:

$$D^k f(x)(h, h, ..., h) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}(x)\, h^\alpha \,, \tag{4.4}$$

où α est un multi-indice entier, i.e. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, ..., n$ et

$$\begin{aligned} \alpha! &= \Pi_{i=1}^n \alpha_i! \,, \\ |\alpha| &= \sum_{i=1}^n \alpha_i. \text{ est la longueur de } \alpha \,, \\ h^\alpha &= \Pi_{i=1}^n h_i^{\alpha_i} \,. \end{aligned}$$

Ainsi le polynôme de Taylor à l'ordre k en x d'une fonction f définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé F (et qui vérifie les hypothèses d'une des formules de Taylor à l'ordre k) s'écrit

$$\begin{aligned} P_k(h) &= f(x) + \sum_{|\alpha|=1}^{k} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}(x)\, h^\alpha \,, \qquad (4.5) \\ &\quad \text{que l'on peut aussi écrire} \\ &= \sum_{|\alpha|=0}^{k} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}(x)\, h^\alpha \,. \end{aligned}$$

On note aussi plus synthétiquement

$$P_k(h) = \sum_{|\alpha|=0}^{k} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(x)\, h^\alpha \,.$$

Prenons l'exemple de $n = 3$ et $k = 3$ en un point $x = (x_1, x_2, x_3)$:

$$\begin{aligned}
P_3(h) &= f(x) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)h_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(x)h_3 \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x)h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x)h_2^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(x)h_3^2\right. \\
&\qquad \left. + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x)h_1h_2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(x)h_1h_3 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(x)h_2h_3\right) \\
&\quad + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}(x)h_1^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}(x)h_2^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial x_3^3}(x)h_3^3\right. \\
&\qquad + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}(x)h_1^2h_2 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_3}(x)h_1^2h_3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x_2^2 \partial x_3}(x)h_2^2h_3 \\
&\qquad + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2}(x)h_1h_2^2 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_3^2}(x)h_1h_3^2 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_3^2}(x)h_2h_3^2 \\
&\qquad \left. + 6\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}(x)h_1h_2h_3\right)
\end{aligned}$$

et aussi celui de $n = 2$ et $k = 3$ en un point (x_1, x_2) :

$$\begin{aligned}
P_3(h) &= f(x) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)h_2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x)h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x)h_2^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x)h_1h_2\right) \\
&\quad + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}(x)h_1^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}(x)h_2^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}(x)h_1^2h_2 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2}(x)h_1h_2^2\right).
\end{aligned}$$

Pour éclairer la formule générale (4.5), prenons dans le cas $n = 2$ et $k = 3$ l'avant-dernier terme et écrivons-le avec un multi-indice : il correspond à $\alpha = (2, 1)$, i.e. $\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = 1$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3!}3\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}(x)h_1^2h_2 &= \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}(x)h_1^2h_2 \\
&= \frac{1}{2!1!}\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}(x)h_1^2h_2 \\
&= \frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!}\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}(x)h_1^{\alpha_1}h_2^{\alpha_2} \\
&= \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}h^{\alpha}.
\end{aligned}$$

4.5.3 Formule de Taylor avec reste intégral

On a également une formule de Taylor avec reste intégral. Elle est conceptuellement beaucoup plus délicate. En effet on va devoir intégrer des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé. Pour que l'intégrale soit raisonnablement définie, on a besoin que l'espace d'arrivée soit un espace de Banach. Il n'en reste pas moins que l'intégrale des fonctions à valeurs dans les espaces de Banach n'est pas une notion facile et que nous ne l'avons pas vue jusqu'alors. En admettant le Théorème fondamental du calcul intégral pour de telles fonction (c'est-à-dire en trichant sérieusement), la formule est facile à démontrer. Bien sûr, si l'espace d'arrivée est de dimension finie, il est isométrique à $\mathbb{R}^n$ et tout cela est alors dans le cadre du cours d'intégration de Lebesgue.

Théorème 4.5 (Théorème fondamental du calcul intégral)**.** *Soit F un espace de Banach, $\phi : [a,b] \to F$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors*

$$\phi(b) = \phi(a) + \int_a^b \phi'(t)\mathrm{d}t\,.$$

Théorème 4.6 (Formule de Taylor avec reste intégral)**.** *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et F un espace de Banach sur $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to F$ une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur Ω. Soit $x \in \Omega$ et $h \in E$ tels que le segment $[x, x+h]$ soit contenu dans Ω. Alors*

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + Df(x)(h) + \frac{1}{2!}D^2f(x)(h,h) + ... + \frac{1}{n!}D^nf(x)\underbrace{(h,h,...,h)}_{n\text{ fois}} \\ &\quad + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n D^{n+1}f(x+th)\underbrace{(h,h,...,h)}_{n+1\text{ fois}}\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Preuve du Théorème 4.6. On pose

$$\begin{aligned} \psi(t) &= f(x+th) + (1-t)Df(x+th)(h) + \frac{(1-t)^2}{2!}D^2f(x+th)(h,h) \\ &\quad + ... + \frac{(1-t)^n}{n!}D^nf(x+th)(h,h,...,h)\,. \end{aligned}$$

Alors Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et (voir la preuve de (4.3) dans la démonstration du Théorème 4.3)

$$\psi'(t) = \frac{(1-t)^n}{n!}D^{n+1}f(x+th)(h,h,...,h)\,.$$

La formule de Taylor avec reste intégral se réduit alors à l'application du Théorème fondamental du calcul intégral pour ψ :

$$\psi(1) - \psi(0) = \int_0^1 \psi'(t)\mathrm{d}t\,. \quad \square$$

4.6 Extrema locaux

Définition 4.3. *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On dit que f admet en $x \in \Omega$ un minimum local s'il existe un voisinage ouvert U de x tel* *que pour tout $y \in U$ on ait $f(y) \geq f(x)$. On dit que f admet en $x \in \Omega$ un maximum local s'il existe un voisinage ouvert U de x tel que pour tout $y \in U$ on ait $f(y) \leq f(x)$. Dans les deux cas on parle d'extremum local. L'extremum local est dit strict si on peut trouver un voisinage ouvert de x dans lequel les inégalités ci-dessus soient strictes pour $y \neq x$.*

Définition 4.4. *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f admet en $x \in \Omega$ un point critique si f est différentiable en x et si $Df(x) = 0$.*

Proposition 4.3 (Condition nécessaire d'extremum local : premier ordre)**.** *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application. Si f admet en $x \in \Omega$ un extremum local et si f est différentiable en x, alors x est un point critique de f.*

Preuve. On donne la preuve dans le cas d'un minimum local. Remarquons tout d'abord que $Df(x) = 0$ si et seulement si pour tout $v \in E$, $v \neq 0$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = 0\,.$$

C'est clair du fait que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = Df(x)(v)\,.$$

Soit donc $v \in E$, $v \neq 0$. On sait que la dérivée directionnelle de f en x dans la direction de v existe, du fait que f est différentiable en x. C'est-à-dire que

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \text{ existe dans } \mathbb{R}\,.$$

Pour $t > 0$, on a

$$\frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \geq 0$$

et pour $t < 0$,

$$\frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \leq 0\,.$$

Il suit que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = 0\,.$$

Le résultat est démontré. □

Proposition 4.4 (Condition nécessaire d'extremum local : deuxième ordre)**.** *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application différentiable.*

- *Si f admet en $x \in \Omega$ un minimum local et si f est deux fois différentiable en x, alors x est un point critique de f et la forme quadratique $D^2f(x)(h,h)$ est positive, i.e. $D^2f(x)(h,h) \geq 0$ pour tout $h \in E$.*

- *Si f admet en $x \in \Omega$ un maximum local et si f est deux fois différentiable en x, alors x est un point critique de f et la forme quadratique $D^2 f(x)(h,h)$ est négative, i.e. $D^2 f(x)(h,h) \leq 0$ pour tout $h \in E$.*

Preuve. On suppose que f admet en x un extremum local. On écrit la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 :

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)(h) + \frac{1}{2} D^2 f(x)(h,h) + \|h\|^2 \varepsilon(h)\,,$$

où $\varepsilon(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$. On sait de plus par la Proposition 4.3 que x est un point critique, donc

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{2} D^2 f(x)(h,h) + \|h\|^2 \varepsilon(h)\,.$$

Supposons que f admette en x un minimum local, i.e. $f(x+h) - f(x) \geq 0$ pour tout $h \in E$ assez petit. Soit un vecteur v non nul donné, si $D^2 f(x)(v,v) \neq 0$, alors pour t assez petit

$$0 \leq f(x+tv) - f(x) = t^2 \left(\frac{1}{2} D^2 f(x)(v,v) + \|v\|^2 \varepsilon(tv) \right)$$

et on doit donc avoir $D^2 f(x)(v,v) > 0$. La preuve est similaire dans le cas d'un maximum local. □

Afin de pouvoir énoncer et surtout démontrer une condition suffisante d'extremum local strict, nous aurons besoin du théorème qui suit.

Commençons par donner une définition.

Définition 4.5 (Forme bilinéaire non dégénérée)**.** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et $\phi\,:\, E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique et continue. Si l'on fixe $h \in E$, on obtient $\tilde{\phi}_h\,:\, E \to \mathbb{R}$ linéaire continue, donnée par $\tilde{\phi}_h(k) = \phi(h,k)$. On a ainsi défini une application linéaire $\tilde{\phi}\,:\, h \to \tilde{\phi}_h$ de E vers $E' = \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$. On dit que ϕ est non dégénérée si $\tilde{\phi}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels normés, c'est à dire : $\tilde{\phi}$ est bijective et son inverse $\tilde{\phi}^{-1}\,:\, E' \to E$ est continue.*

Remarque 4.2. Dans le cas où E est de dimension finie, ϕ non dégénérée signifie simplement que si $\phi(x,y) = 0$ pour tout y, alors $x = 0$.

Théorème 4.7. *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et $\phi\,:\, E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique, continue, positive et non dégérérée. Alors ϕ est coercive, i.e. il existe $K > 0$ tel que pour tout $h \in E$ on ait*

$$\phi(h,h) \geq K \|h\|^2\,.$$

Bien sûr, si ϕ est continue, négative et non dégérérée, alors c'est $-\phi$ qui est coercive.

Preuve. En dimension finie, on peut utiliser la compacité de la sphère unité. En effet l'application de S^1 dans $]0,+\infty[$ qui à v associe $\phi(v,v)$ est continue sur S^1 qui est compacte, donc elle admet sur S^1 un minimum. Comme ce minimum est la valeur de

$\phi(v,v)$ pour un certain $v \in S^1$, il est strictement positif, i.e. il existe $K > 0$ tel que pour tout $v \in S^1$ on ait $\phi(v,v) \geq K$. Maintenant pour $h \neq 0$ on a

$$\phi(h,h) = \|h\|^2 \phi\left(\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}\right) \geq K\|h\|^2 .$$

En dimension infinie, cette preuve n'est plus valable du fait que la sphère unité n'est plus compacte.

Par contre une autre preuve, basée sur l'identification entre formes bilinéaires et applications linéaires à valeurs dans l'espace des formes linéaires, fonctionne que la dimension soit finie ou non lorsque la forme bilinéaire ϕ est non dégénérée. Dans ce cas, l'application

$$x \mapsto \tilde{\phi}_x$$

où

$$\tilde{\phi}_x(y) = \phi(x,y) ,$$

est un isomorphisme de E sur son dual topologique $E' = \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$. Donc il existe $C_1 > 0$ tel que pour tout $x \in E$

$$\|\tilde{\phi}_x\|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})} = \sup_{\|y\|=1} \|\phi(x,y)\| \geq C_1\|x\| .$$

Soit $x \neq 0$ donné. Par définition de la borne supérieure, il existe $y \in E$ de norme 1 tel que

$$\|\phi(x,y)\| \geq \frac{C_1}{2}\|x\| .$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\frac{C_1^2}{4}\|x\|^2 \leq \|\phi(x,x)\|\|\phi(y,y)\| .$$

Par ailleurs, ϕ étant continue, on sait qu'il existe $C_2 > 0$ tel que

$$\|\phi(u,v)\| \leq C_2\|u\|\|v\| .$$

D'où

$$\frac{C_1^2}{4}\|x\|^2 \leq \|\phi(x,x)\|C_2\|y\|^2 = C_2\|\phi(x,x)\| .$$

On obtient donc

$$\|\phi(x,x)\| \geq \frac{C_1^2}{4C_2}\|x\|^2 .$$

Comme C_1 et C_2 sont indépendants de x et du choix de y, le résultat est démontré. □

Théorème 4.8 (Condition suffisante d'extremum local)**.** *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de E, $x \in \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application différentiable, deux fois différentiable en x. Si :*

1. *x est un point critique de f ;*

2. *la forme quadratique $D^2f(x)(h,h)$ est positive (resp. négative) et non dégénérée ;*

alors f admet en x un minimum (resp. maximum) local strict.

Preuve. On la fait dans le cas d'un minimum. Elle utilise le théorème précédent. Comme il existe $K > 0$ tel que $D^2f(x)(h,h) \geq K\|h\|^2$ pour tout $h \in E$, alors

$$f(x+h) - f(x) = D^2f(x)(h,h) + \|h\|^2\varepsilon(h) \geq \|h\|^2(K - \|\varepsilon(h)\|)\,.$$

Comme $\varepsilon(h) \to 0$ lorsque $h \to$, il existe $\eta > 0$ tel que pour $\|h| < \eta$ on ait $\|\varepsilon(h)\| \leq K/2$. Il suit que pour $\|h\| < \eta$ on a

$$f(x+h) - f(x) \geq \|h\|^2 \frac{K}{2} > 0\,.$$

La fonction f admet donc en x un minimum local strict. □

Remarque 4.3. En dimension finie, une forme quadratique positive (resp. négative) non dégénérée est simplement une forme quadratique définie positive (resp. définie négative).

4.7 Exercices

Exercice 4.1. On considère la fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x,y) = xy \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \text{ pour } (x,y) \neq (0,0)\,, \text{ et } g(0,0) = 0\,.$$

1. Montrer que g est différentiable au point $(0,0)$.

2. Calculer
$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(0,0) \text{ et } \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(0,0)\,.$$
Conclusion?

Exercice 4.2. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(0,0) = 0\,,\ f(x,y) = \frac{x^2y^4}{x^2+y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0)\,.$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4.3. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels. Montrer que les applications f, g et h suivantes sont différentiables sur E et calculer leurs différentielles :

$$f(A) = {}^tAA\,,\ g(A) = A^3\,,\ h(A) = \det A\,.$$

Montrer qu'elles sont deux fois différentiables et calculer leurs différentielles secondes.

Exercice 4.4. Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. Soit $f\,:\, E\times E\to E$ une application bilinéaire continue et $g\,:\, E\to E$ une application deux fois différentiable. On définit les applications $\phi\,:\, E\to E$ et $\psi\,:\, E\to E$ par

$$\phi(x)=f(x,x)+g(x)\,,\ \psi(x)=f(x,g(x))\,.$$

Justifier rapidement que ϕ et ψ sont deux fois différentiables sur E et calculer leurs différentielles secondes en un point quelconque $x\in E$.

Exercice 4.5. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, $\psi\in\mathcal{L}_2(E^2;E)$ et $\phi\in\mathcal{L}(E)$. Soit l'application $f\,:\, E\to E$ définie par

$$f(x)=\psi(\psi(x,x),\phi(x))\,.$$

Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur E et calculer ses différentielles sucessives.

Exercice 4.6. Soit L une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. On note $\langle .,.\rangle$ le produit scalaire euclidien usuel sur $\mathbb{R}^n$. On considère les applications suivantes :

$$f\,:\,\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\,,\ f(x)=\langle L(x),x\rangle\,,$$
$$g\,:\,\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n\,,\ g(x,y)=\langle L(x),L(y)\rangle y\,.$$

1. Montrer que f est indéfiniment différentiable sur $\mathbb{R}^n$ puis calculer $Df(x)(h)$ et $D^2f(x)(h,k)$.
2. Montrer que g est différentiable et calculer $Dg(x,y)(h,k)$.

Exercice 4.7. Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. Soit f une application linéaire continue de E dans lui-même et g une application bilinéaire continue de $E\times E$ dans E. Soit également $y\in E$ fixé. On considère les applications ϕ et ψ de E dans lui-même définies par :

$$\phi(x)=g(f(x),x)+g(f(x),f(x))\,,\ \psi(x)=f(g(x,x))\,.$$

1. Montrer que ϕ et ψ sont deux fois différentiables sur E.
2. Calculer $D\phi(x)(h)$ et $D\psi(x)(h)$.
3. Calculer $D^2\phi(x)(h,k)$ et $D^2\psi(x)(h,k)$.

Exercice 4.8. Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 1 en $(0,0)$ pour la fonction

$$f(x,y)=e^{ax+by}-\cos(cx+dy)\,.$$

Existe-t-il des réels a,b,c,d tels que f garde un signe constant au voisinage de $(0,0)$?

Exercice 4.9. Soit $\alpha\,,\ \beta\in\mathbb{N}^n$, calculer $\partial^\alpha x^\beta$.

Exercice 4.10. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=xy^2$. Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 3 pour f en un point (x_0,y_0). Qu'obtient-on pour $(x_0,y_0)=(0,0)$?

Exercice 4.11. Soit P un polynôme de degré k sur $\mathbb{R}^n$. Ecrire la formule de Taylor à l'ordre k pour P en 0.

Exercice 4.12. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x,y) = (e^x \cos y) - 1\,.$$

1. Montrer que f peut s'écrire sous la forme

   $$f(x,y) = T_2(x,y) + R(x,y)\,,$$

   où T_2 est un polynôme de degré 2 et il existe une constante $C > 0$ telle que, pour $\|(x,y)\| \leq 1$, on ait

   $$|R(x,y)| \leq C\|(x,y)\|^3\,.$$

2. Etudier la convergence de la série

   $$\sum_{n\geq 1} f(z_n)\,,\ z_n = \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\,.$$

Exercice 4.13. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sin(\frac{\pi}{4}xy)$. Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 2 pour f en le point $(2, 1/2)$. Quelle est l'équation du plan tangent au graphe de f au dessus de ce point?

Exercice 4.14. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2+y^2+xy+x-y+4$. Déterminer les extrema locaux de f.

Exercice 4.15. On considère l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = 2x^4 + 2y^4 + 2x^2y^2 - 6x - 6y\,.$$

Etudier les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4.16. Soit le domaine dans $\mathbb{R}^n$, $n > 2$,

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\ x_i > 0\,,\ 1 \leq i \leq n\}\,.$$

On considère la fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\,.$$

Trouver les extrema locaux de f dans $\mathcal{D}$.

Exercice 4.17. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice symétrique définie positive, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $y \in \mathbb{R}^n$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle Bx, y\rangle\,,$$

où $(.,.)$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.

2. Etudier les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4.18. On considère l'espace vectoriel E des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, nulles en dehors de $[-1,1]$, muni de la norme L^2. Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$, uniformément minorée par 1 sur $\mathbb{R}$ et h une fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $[-1,1]$. On considère la fonction Φ, définie sur E et à valeurs réelles :

$$\Phi(f) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \big(g(x)(f(x))^2 - h(x)f(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

1. Montrer que Φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur E.

2. Soit $f \in E$, donner une condition suffisante pour que f soit un point critique de Φ. Cette condition est-elle nécessaire?

3. Si Φ admet un point critique f, quelle est sa nature?

Exercice 4.19. On considère l'espace vectoriel E des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, nulles en dehors de $[-1,1]$, muni de la norme

$$\|f\|_E = \sum_{k=0}^{2} \max_{x\in\mathbb{R}} \left|f^{(k)}(x)\right|\,.$$

Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $[-1,1]$. On considère l'application Φ, définie sur E et à valeurs réelles :

$$\Phi(f) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \big(|\nabla f(x)|^2 + (f(x))^2 - g(x)f(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

1. Montrer que Φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur E.

2. Soit $f \in E$, donner une condition suffisante pour que f soit un point critique de Φ. Cette condition est-elle nécessaire?

3. Si Φ admet un point critique f, quelle est sa nature?

Exercice 4.20. Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction trois fois différentiable sur E. Soit $x_0 \in E$ tel que

$$Df(x_0) = 0\,,\ D^2f(x_0) = 0 \text{ et } D^3f(x_0) \neq 0\,.$$

La fonction f admet-elle en x_0 un extremum local?

Exercice 4.21. Soit sur $\mathbb{R}^n$ une forme quadratique q définie positive et $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire associé, i.e.

$$q(x) = \langle x, x\rangle\,.$$

Soit $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = q(x) + \langle x, b\rangle + c\,.$$

1. (a) Montrer que f est indéfiniment différentiable sur $\mathbb{R}^n$.
   (b) Déterminer les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^n$ et préciser leur nature.
2. Ecrire une formule de Taylor pour f à l'ordre 2 en 0.

Chapitre 5

Inversion locale, fonctions implicites

5.1 Difféomorphismes, inversion locale, inversion globale

Définition 5.1. *Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, U un ouvert de E et V un ouvert de F. On dit qu'une application $\phi : U \to V$ est un $\mathcal{C}^k$–difféomorphisme de U sur V si :*

1. *ϕ est une bijection de U sur V ;*
2. *ϕ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U ;*
3. *ϕ^{-1} est $\mathcal{C}^k$ sur V.*

Théorème 5.1 (Inversion locale)**.** *Soit E et F deux espaces de Banach, Ω un ouvert de E et ϕ une application de Ω dans F de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$ donné. Soit $x \in \Omega$, on suppose que $Df(x)$ est un isomorphisme de E sur F (i.e. une application linéaire continue et d'inverse continu). Alors il existe U un voisinage ouvert de x dans Ω et V un voisinage ouvert de $f(x)$ dans F tels que ϕ soit un $\mathcal{C}^k$–difféomorphisme de U sur V.*

Preuve. Quitte à composer f avec des translations, on peut supposer que $x = 0_E$ et $f(x) = 0_F$. On a donc $f(0) = 0$ et la différentielle de f au point 0 est un isomorphisme de E dans F ; une telle application est un $\mathcal{C}^\infty$–difféomorphisme de E dans F. Il est donc équivalent de trouver un voisinage U de 0_E et un voisinage V de 0_F tels que f soit un $\mathcal{C}^k$–difféomorphisme de U dans V, et de trouver deux voisinages U et W de 0_E tels que $(Df(0))^{-1} \circ f$ soit un $\mathcal{C}^k$–difféomorphisme de U dans W. A noter que le lien entre V et W est donné par

$$W = (Df(0))^{-1}(V)\,.$$

On observe de plus que la différentielle en 0 de $(Df(0))^{-1} \circ f$ est l'identité. On peut donc sans perte de généralité supposer que $E = F$ et que $Df(0) = \mathrm{Id}_E$.

Soit $\varphi = \mathrm{Id} - f$. La différentielle de φ est nulle en 0 et, comme cette différentielle est continue, il existe un réel strictement positif r tel que la boule fermée $\bar{B}(0, r)$ de centre

0 et de rayon r soit incluse dans Ω et que la norme de la différentielle de φ soit toujours inférieure à 1/2 sur cette boule. Définissons deux voisinages ouverts U et W de 0 par $W = B(0, r/2)$, $U = B(0, r) \cap f^{-1}(W)$ (rappelons que f étant continue, $f^{-1}(W)$ est ouvert) et démontrons que de U dans W, f est bijective.

Pour prouver la surjectivité, considérons, pour tout point y de W, la fonction φ_y définie sur $B(0, r)$ par $\varphi_y(x) = y + \varphi(x)$.

L'inégalité des accroissements finis montre que φ est 1/2-lipschitzienne sur $\bar{B}(0, r)$, i.e.

$$\forall x_1, x_2 \in \bar{B}(0, r)\,,\ \|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)\| \leq \frac{1}{2}\|x_2 - x_1\|\,.$$

On en déduit d'une part que sa translatée φ_y l'est aussi et d'autre part, que φ_y envoie $\bar{B}(0, r)$ dans elle-même, et même dans $B(0, r)$, car pour tout x dans $\bar{B}(0, r)$ la norme de $\varphi(x)$ est inférieure ou égale à $r/2$ et celle de y strictement inférieure à $r/2$. Le théorème du point fixe montre l'existence d'un point z appartenant à $\bar{B}(0, r)$ tel que $\varphi_y(z) = z$, donc envoyé par f sur y. Et comme $\varphi_y(z) = z$, on a $z \in B(0, r)$ et de plus $f(z) = y \in W$ donc $z \in f^{-1}(W)$. On a donc trouvé $z \in U$ tel que $f(z) = y$.

L'injectivité s'obtient en utilisant à nouveau que φ est 1/2 lipschitzienne. Pour tous x_1 et x_2 dans V, si l'on note y_1 et y_2 leurs images par f, on a

$$\|x_1 - x_2\| = \|\varphi(x_1) + f(x_1) - \varphi(x_2) - f(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|\,,$$

ce qui se réécrit

$$\|x_1 - x_2\| \leq 2\|y_1 - y_2\|$$

et permet de conclure.

Il reste maintenant à montrer que la fonction réciproque de f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur W. Remarquons d'abord que pour tout x dans U, l'application linéaire $Df(x)$ est inversible et d'inverse continu. En effet, $Df(x) = \mathrm{Id}_E - D\varphi(x)$ et $D\varphi(x)$ est de norme inférieure à 1/2, donc la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (D\varphi(x))^n$$

est convergente et sa somme est inverse de $Df(x)$, de norme inférieure à 2.

Soit y dans W et x son antécédent dans U par f, démontrons qu'au point y, f^{-1} est différentiable et que sa différentielle n'est autre que l'inverse de $Df(x)$. Pour tout vecteur k de E tel que $y + k$ soit encore dans W, notons $x + h$ l'antécédent dans U de $y + k$ par f. Comme

$$k = f(x + h) - f(x) = Df(x)(h) + \|h\|\varepsilon(h)\,,$$

on en déduit

$$f^{-1}(y + k) - f^{-1}(y) = h = (Df(x))^{-1}(k - \|h\|\varepsilon(h)) = (Df(x))^{-1}(k) + \|k\|\varepsilon(k)\,,$$

la dernière égalité venant du fait (démontré plus haut dans la preuve d'injectivité) que $\|h\| \leq 2\|k\|$. On a donc montré que f^{-1} est différentiable dans W et que pour tout $y \in W$,

$$D(f^{-1})(y) = (Df(f^{-1}(y))^{-1}\,.$$

C'est-à-dire que
$$D(f^{-1}) = (Df)^{-1} \circ f^{-1} .$$

Il reste encore à montrer que la fonction réciproque de f est de classe $\mathcal{C}^k$. On vient de prouver l'existence de la différentielle de la réciproque de f en montrant qu'elle était la composée de trois fonctions : la fonction f^{-1}, la différentielle de f, et la "fonction inverse" qui à tout isomorphisme bicontinu de E associe son inverse. La fonction inverse est infiniment différentiable, f est de classe $\mathcal{C}^k$ et la réciproque de f est continue (car différentiable), on en déduit que la réciproque de f est de classe $\mathcal{C}^1$. De proche en proche, on vérifie que la réciproque de f est de classe $\mathcal{C}^k$. □

Théorème 5.2 (Inversion globale)**.** *Soit E et F deux espaces de Banach, Ω un ouvert de E et ϕ une application de Ω dans F de classe $\mathcal{C}^k$. Si f est injective et si pour tout $x \in \Omega$, $Df(x)$ est un isomorphisme de E sur F, alors $f(\Omega)$ est un ouvert de F et ϕ est un $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme de Ω sur $f(\Omega)$.*

Preuve. C'est une conséquence directe du théorème d'inversion locale. □

5.2 Théorème des fonctions implicites

Nous aurons besoin de deux théorèmes fondamentaux de l'analyse fonctionnelle, le Théorème de l'application ouverte et sa conséquence immédiate : le Théorème des isomorphismes de Banach.

Théorème 5.3 (de Banach-Schauder ou de l'application ouverte)**.** *Soit E et F deux espaces de Banach. Soit $f : E \to F$ une application linéaire continue surjective. Alors f est ouverte, i.e. l'image directe par f de tout ouvert de E est un ouvert de F.*

Théorème 5.4 (des isomorphismes de Banach)**.** *Soit E et F deux espaces de Banach. Soit $f : E \to F$ une application linéaire continue bijective. Alors f^{-1} est continue.*

Enonçons maintenant le théorème principal de cette section.

Théorème 5.5 (des fonctions implicites)**.** *Soit E, F et G trois espaces de Banach et f une application de classe C^k définie sur un ouvert Ω de $E \times F$ et à valeurs dans G. Soit (x_0, y_0) un point de Ω tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et tel que la différentielle partielle $D_y f(x_0, y_0)$ (i.e. la différentielle en y_0 de $y \mapsto f(x_0, y)$) soit un isomorphisme (i.e. une application linéaire bijective continue et d'inverse continu) de F dans G. Alors il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans E, un voisinage ouvert V de y_0 dans F et une fonction ϕ de classe $\mathcal{C}^k$ définie sur U à valeurs dans F, tels que :*

1. *$U \times V \subset \Omega$,*
2. *$\{(x, y) \in U \times V\ ;\ f(x, y) = 0\} = \{(x, \phi(x))\ ;\ x \in U\}$, autrement dit*
$$\big((x, y) \in U \times V \text{ et } f(x, y) = 0\big) \Leftrightarrow \big(x \in U \text{ et } y = \phi(x)\big) .$$

La différentielle de ϕ en un point $x \in U$ est donnée par

$$D\phi(x) = -(D_y f(x,\phi(x)))^{-1} \circ D_x f(x,\phi(x))\,.$$

Preuve. Le principe consiste à traduire la question sous une forme telle qu'il devient possible d'appliquer le théorème d'inversion locale. On considère l'application ψ_1, de Ω dans $E \times G$, définie par :

$$\psi_1(x,y) = (x, f(x,y))\,.$$

Cette application est de classe $\mathcal{C}^k$ et sa différentielle au point (x_0,y_0) est un isomorphisme de $E \times F$ sur $E \times G$. En effet, on a

$$D\psi_1(x_0,y_0)(h,k) = \big(h, D_x f(x_0,y_0)(h) + D_y f(x_0,y_0)(k)\big)\,.$$

La bijectivité de $D\psi_1(x_0,y_0)$ est simple à montrer. Soit $v \in E$, $w \in G$ et cherchons un antécédent (h,k) à (v,w) par $D\psi_1(x_0,y_0)$. Le seul choix possible de h est $h = v$, puis on utilise le fait que $D_y f(x_0,y_0)$ est un isomorphisme de F sur G : il existe un unique $k \in F$ tel que

$$D_x f(x_0,y_0)(v) + D_y f(x_0,y_0)(k) = w\,.$$

On a donc que $D\psi_1(x_0,y_0)$ est linéaire continue et bijective. Par le Théorème des isomorphismes de Banach, il suit que $D\psi_1(x_0,y_0)^{-1}$ est un isomorphisme de $E \times F$ sur $E \times G$.

Le Théorème d'inversion locale montre que ψ_1 se restreint en un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$ entre un ouvert $W \times V$ dans $E \times F$, contenant (x_0,y_0), et un ouvert $\mathcal{O}$ dans $E \times G$ contenant $(x_0,0)$ et nécessairement inclus dans $W \times G$.

Ceci se traduit par l'existence d'une application ψ_2 de classe $\mathcal{C}^k$, de $\mathcal{O}$ dans F, vérifiant :

$$\forall (x,z) \in \mathcal{O} \quad (x,\psi_2(x,z)) \in W \times V \quad \text{et} \quad \forall (x,y) \in W \times V \quad f(x,y) = z \Leftrightarrow \psi_2(x,z) = y\,.$$

On définit alors $U = \mathcal{O} \cap \{z = 0\}$ qui est un ouvert de E car l'image de $\mathcal{O}$ ouvert de $E \times F$ par une projection, qui est une application linéaire continue surjective et donc ouverte. Par construction, $U \subset W$. L'application ϕ, de U dans V définie par $\phi(x) = \psi_2(x,0)$, vérifie alors les propriétés annoncées.

Calculons maintenant la différentielle de ϕ. On différencie simplement la relation

$$f(x,\phi(x)) = 0\,.$$

On obtient :

$$D_x f(x,\phi(x)) + D_y f(x,\phi(x)) \circ D\phi(x) = 0\,,$$

d'où le résultat. □

5.3 Exercices

Exercice 5.1. Donner le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ dans lequel les coordonnées polaires sont un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.

Exercice 5.2. Donner le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^3$ dans lequel les coordonnées sphériques sont un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.

Exercice 5.3. Soit E un espace de Banach et $f\ :\ \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$, $f(u) = u \circ u$. Montrer que f est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme d'un voisinage de l'identité sur un autre voisinage de l'indentité.

Exercice 5.4. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et la courbe

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x^2 + y^2 = 9\}\,.$$

1. A l'aide du théorème des fonctions implicites, construire un paramétrage de $\mathcal{C}$ au voisinage du point $(3, 0)$, puis donner la différentielle de ce paramétrage sur son domaine de définition.

2. Paramétrer $\mathcal{C}$ sans utiliser le théorème des fonctions implicites.

3. Quelle est l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en $(3, 0)$?

Exercice 5.5. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et la surface

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} + 9(z+1)^2 = 4\}\,.$$

1. A l'aide du théorème des fonctions implicites, construire un paramétrage de S au voisinage de son "pôle Nord", puis donner la différentielle de ce paramétrage sur son domaine de définition.

2. Paramétrer S sans utiliser le théorème des fonctions implicites.

3. Quelle est l'équation du plan tangent à S en son pôle Nord?

Exercice 5.6. Soit la fonction

$$f\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\,,\ \ f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, xyz)\,.$$

On note

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ f(x, y, z) = (1, 1)\}\,.$$

Soit (x_0, y_0, z_0) un point où f vaut $(1, 1)$.

1. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant x_0 et une application $\phi\ :\ I \to \mathbb{R}^2$ telle que $\phi(x_0) = (y_0, z_0)$ et $f(x, \phi(x)) = (1, 1)$ pour tout $x \in I$.

2. Donner la dérivée de ϕ en x_0. En déduire l'équation de la tangente à S en (x_0, y_0, z_0).

Chapitre 6

Sous-variétés régulières de $\mathbb{R}^n$, extrema liés

Dans ce chapitre, on travaille en dimension finie, sur $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. On donne les résultats essentiellement sans démonstration, le lecteur curieux de ces notions pourra consulter un ouvrage de géométrie différentielle.

6.1 Sous-variétés régulières de $\mathbb{R}^n$

Définition 6.1 (Sous-variété régulière de $\mathbb{R}^n$)**.** *Une sous-variété régulière de $\mathbb{R}^n$ est une partie S de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la propriété suivante : il existe $k \in \{1, ..., n\}$, il existe pour tout $a \in S$, un voisinage ouvert U de a dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme $\phi : U \to V$, tels que*

$$\phi(U \cap S) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})\,;$$

On dit que S est une sous-variété régulière de $\mathbb{R}^n$ de dimension k.

Remarque 6.1. Localement, les difféomorphismes de la définition ci-dessus donnent un paramétrage de S. On note $\mathcal{O} = V \cap \mathbb{R}^k$, $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^k$. On définit $\psi : \mathcal{O} \to \Omega$ de la façon suivante : pour $y = (y_1, ..., y_k, 0, ..., 0) \in V$, $\phi^{-1}(y) = \psi(y_1, ..., y_k)$. Alors

$$U \cap S = \{x = \psi(y)\,,\ y \in V \cap \mathbb{R}^k\}\,.$$

Toute sous-variété régulière de $\mathbb{R}^n$ est donc une surface localement paramétrée.

Nous allons maintenant définir la notion de surface localement paramétrée de façon rigoureuse. Pour cela, nous avons d'abord besoin de parler d'applications de rang maximal.

Définition 6.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ une application $\mathcal{C}^\infty$. On dit que f est de rang maximal en un point $p \in \Omega$ si le rang de $Df(p)$ est le minimum de n et m, i.e. elle est surjective si $m \le n$ et elle est injective si $n \le m$.*

Définition 6.3 (Surface localement paramétrée).
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $k \in \{1, ..., n\}$. On appelle surface régulière localement paramétrée dans Ω une partie S de Ω telle que pour tout point $p \in X$ il existe U un voisinage ouvert de p dans Ω, $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^k$ et $\psi : \mathcal{O} \to \Omega$ une application $\mathcal{C}^\infty$ de rang maximal en tout point de $\mathcal{O}$, tels que

$$S \cap U = \{x = \psi(y)\,,\ y \in \mathcal{O}\}\,.$$

On dit que $(\mathcal{O}, \psi)$ est un paramétrage de S au voisinage de p.

Les surfaces de niveau d'une application $\mathcal{C}^\infty$ de rang maximal sont aussi des sous-variétés régulières de $\mathbb{R}^n$. Le résultat est une conséquence du théorème des fonctions implicites.

Proposition 6.1 (Surface de niveau).
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $k \in \{1, ..., n\}$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^{n-k}$ une application $\mathcal{C}^\infty$. Soit

$$S = \{x \in \Omega\,,\ f(x) = 0\} \text{ i.e. } S = f^{-1}(\{0\})\,.$$

Si $S \neq \emptyset$ et f est de rang maximal en tout point de S alors S est une sous-variété régulière de $\mathbb{R}^n$ de dimension k.

6.2 Espace tangent, espace orthogonal

Si une sous-variété régulière S de $\mathbb{R}^n$ est définie comme une surface de niveau, on a très facilement accès à l'espace des vecteurs normaux à S en tout point $p \in S$. Si elle est définie par un paramétrage local, c'est l'espace des vecteurs tangents qui est facilement accessible.

Proposition 6.2 (Espace tangent à S en p). *Soit S une sous variété régulière de $\mathbb{R}^n$ de dimension k, $p \in S$ et $(\mathcal{O}, \psi)$ un paramétrage de S au voisinage de p. L'ensemble T_pS des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tangents à S en p est exactement l'image de $D\psi(\psi^{-1}(p))$.*

Remarque 6.2 (Presque une preuve). C'est un résultat assez intuitif. Notons $q = \psi^{-1}(p)$ et $u = (u_1, ..., u_k)$ les éléments de $\mathcal{O}$. Alors

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_i}(q)$$

est la direction dans laquelle le point $\psi(u)$ se déplace depuis p lorsqu'on fait simplement varier u_i, c'est naturellement un vecteur tangent à S en p. De plus

$$\operatorname{Im} D\psi(q) = \operatorname{Vect}\left\{\frac{\partial \psi}{\partial u_1}(q)\,,\ \dots\,,\ \frac{\partial \psi}{\partial u_k}(q)\right\}\,.$$

Comme ψ est un paramétrage de S, tous les vecteurs tangents à S en p peuvent être obtenus de cette manière.

Connaissant l'espace tangent à S en p, l'espace normal est bien sûr son supplémentaire orthogonal. Mais dans le cas où S est une surface de niveau $S = f^{-1}(0)$, l'espace normal s'obtient simplement à partir de la différentielle de f en p.

Proposition 6.3 (Espace normal à S en p)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $k \in \{1, ..., n\}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^{n-k}$ une application $\mathcal{C}^\infty$ de rang maximal en tout point de $S = f^{-1}(0)$ (supposée non vide). On note f_1, ..., f_{n-k} les composantes de f. Soit $p \in S$, alors le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ des vecteurs normaux à S en p est*

$$N_pS = \text{Vect}\left\{\vec{\nabla} f_1(p)\,,\ \dots,\ \vec{\nabla} f_{n-k}(p)\right\}\,,$$

où

$$\vec{\nabla} f_i(p) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(p)\,,\ \dots,\ \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(p)\right)\,.$$

6.3 Extrema liés

Dans ce paragraphe, on étudie les extrema locaux d'une fonction g, qui est définie sur une sous-variété S de $\mathbb{R}^n$. Il s'agit d'un problème d'optimisation sous contraintes, les contraintes ici étant décrites par l'appartenance à la sous-variété. Si on a un paramétrage local de la sous-variété S, alors trouver les extrema locaux de g sur S revient à trouver pour chaque paramétrage local $(\mathcal{O}, \psi)$ de S les extrema locaux de $g \circ \psi$, ce qui se fait de la façon usuelle en cherchant d'abord les points critiques, puis en étudiant la différentielle seconde de $g \circ \psi$. Dans le cas où S est définie comme surface de niveau et où on ne connait pas de paramétrage local de S, on peut tout de même trouver les points critiques de la restriction de g à S en utilisant la caractérisation de l'espace normal vue au paragraphe précédent.

Théorème 6.1 (des multiplicateurs de Lagrange)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $k \in \{1, ..., n\}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^{n-k}$ une application $\mathcal{C}^\infty$ de rang maximal en tout point de $S = f^{-1}(0)$ (supposée non vide). On note f_1, ..., f_{n-k} les composantes de f. Soit $p \in S$. Soit $g : \Omega \to \mathbb{R}$ une application différentiable. Si $g|_S$ admet un extremum local en p, alors il existe $\lambda_1, ..., \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$, appelés multiplicateurs de Lagrange, tels que*

$$Dg(p) = \lambda_1 Df_1(p) + \dots + \lambda_{n-k} Df_{n-k}(p)\,,$$

c'est-à-dire tels que, pour $i = 1, ..., n$

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(p) = \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)\,;$$

ceci équivaut à dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{n-k}$ tel que la fonction

$$g(x) - \langle \lambda\,,\ f(x)\rangle_{\mathbb{R}^{n-k}}$$

admette un point critique en p.

Idée de la preuve. Si $g|_S$ admet un extremum local en p, alors elle admet un point critique en p, cela veut dire que toutes les dérivées directionnelles de g en p dans des directions tangentes à S sont nulles. Autrement dit, le gradient de g en p (qui est le vecteur des dérivées partielles de g en p) est orthogonal au sous-espace tangent à S en p, i.e. il est combinaison linéaire des gradients de f_1, ..., f_{n-k} en p. On a donc la même relation entre la différentielles de g et celles des f_i. $\square$

Références

[1] H. Cartan, *Calcul Différentiel*, Hermann.

[2] F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini, 1999.