Algèbre linéaire

Jean-Philippe NICOLAS
Département de Mathématiques,
Université de Brest, 6 avenue Victor Le Gorgeu,
29200 Brest.
Bureau H109, Tel. 02 98 01 67 61,
email : Jean-Philippe.Nicolas@univ-brest.fr

Table des matières

Chapitre 1

Espaces vectoriels

1.1 Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Durant tout le cours, plutôt que d'énoncer des résultats analogues pour $\mathbb{R}$ et pour $\mathbb{C}$, on les énoncera pour $\mathbb{K}$ qui représentera indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Lorsque des propriétés seront spécifiques à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$, on utilisera alors explicitement les lettres $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1. *Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel) est un ensemble E qui est muni de deux lois de composition :*

- *une loi de composition interne notée "+" et appelée addition, qui à deux éléments x et y de E associe un élément de E noté $x + y$;*
- *une loi de composition externe, notée "." et appelée multiplication par un scalaire (on appelle vecteurs les éléments de E et scalaires les éléments de $\mathbb{K}$), qui à un élément λ de $\mathbb{K}$ et un élément x de E associe un élément de E noté $\lambda.x$;*

et qui vérifie les propriétés suivantes :

- *$(E, +)$ est un groupe commutatif, i.e. la loi + vérifie :*
  - *+ est commutative : $\forall x, y \in E$, $x + y = y + x$;*
  - *+ est associative : $\forall x, y, z \in E$, $x + (y + z) = (x + y)y + z$;*
  - *+ admet dans E un élément neutre : il existe un élément de E, noté 0 (ou encore 0_E s'il y a risque de confusion avec le zéro de $\mathbb{K}$ que l'on notera alors $0_{\mathbb{K}}$), tel que pour tout $x \in E$ on ait $0 + x = x + 0 = x$;*
  - *tout élément de E admet un unique opposé : pour tout $x \in E$, il existe un unique élément de E noté $-x$ tel que $x + (-x) = -x + x = 0$;*

  la loi . vérifie : pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

  - *$\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$;*
  - *$(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$;*

- $1.x = x$;
- $\lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$.

Remarque 1.1. Souvent, on notera λx au lieu de $\lambda.x$.

Exemples.

- $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ (munis de l'addition et de la multiplication par un nombre réel) sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
- $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour tout $n \in \mathbb{N}$, en particulier $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, ainsi que $\{0_\mathbb{R}\}$.
- $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel pour tout $n \in \mathbb{N}$, en particulier $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, ainsi que $\{0_\mathbb{C}\}$.
- L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. De même l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Par contre l'ensemble des polynômes de degré égal à n à coefficients dans $\mathbb{K}$ n'est pas un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Soit X un ensemble, l'ensemble $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ des fonctions de X dans $\mathbb{K}$ muni des deux lois + et . définies par :

$$f+g \; : \; \begin{array}{rcl} X & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & f(t)+g(t) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \lambda.f \; : \; \begin{array}{rcl} X & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \lambda.f(t) \end{array},$$

  est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Proposition 1.1. *Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, on a :*

1. $0_\mathbb{K}.x = 0_E$ *et* $\lambda.0_E = 0_E$;
2. $-(\lambda.x) = (-\lambda).x = \lambda.(-x)$.

De plus

$$\lambda.x = 0_E \Longrightarrow \{x = 0_E \text{ ou } \lambda = 0_\mathbb{K}\}.$$

Preuve.

1. On utilise le fait que $0_\mathbb{K} + 0_\mathbb{K} = 0_\mathbb{K}$, on a alors

$$(0_\mathbb{K} + 0_\mathbb{K}).x = 0_\mathbb{K}.x + 0_\mathbb{K}.x = 0_\mathbb{K}.x$$

   et en ajoutant aux deux membres de l'égalité l'opposé de $0_\mathbb{K}.x$, on trouve la première égalité voulue.

   Pour la deuxième, on procède de façon analogue avec $0_E = 0_E + 0_E$, d'où

$$\lambda.(0_E + 0_E) = \lambda.0_E + \lambda.0_E = \lambda.0_E$$

   et on conclut de la même manière.

2. On a
$$\lambda.x + (-\lambda).x = (\lambda - \lambda).x = 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$$
par la propriété *1.* Et de manière similaire
$$\lambda.x + \lambda.(-x) = \lambda.(x - x) = \lambda.0_E = 0_E$$
par la propriété *1.*

Montrons maintenant la dernière propriété. On suppose que $\lambda.x = 0_E$ et que $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, on a alors
$$\frac{1}{\lambda}.(\lambda.x) = x = \frac{1}{\lambda}.0_E = 0_E\,.$$
D'où le résultat. □

1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un sous-espace vectoriel de E est une partie F de E qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. *F est stable par la loi $+$, i.e. pour tout $x, y \in F$, $x + y \in F$;*
2. *F est stable par multiplication par un scalaire, i.e. pour tout $x \in F$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.x \in F$;*
3. *F muni des lois $+$ et $.$ (on notera $(F, +, .)$) est un espace vectoriel.*

Cette définition n'est absolument pas pratique pour vérifier effectivement qu'une partie donnée d'un espace-vectoriel est un sous-espace vectoriel, il y a tout simplement trop de choses à vérifier. En fait, elle peut être considérablement simplifiée. Commençons par la remarque suivante :

Remarque 1.2. Les propriétés 1. et 2. sont équivalentes à la propriété :

1'. F est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire
$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}\,,\ \forall x, y \in F\,,\ \lambda.x + \mu.y \in F\,.$$

Voici maintenant un critère très simple pour montrer qu'une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel.

Théorème 1.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *F est un sous-espace vectoriel de E ;*

(ii) *$0_E \in F$ et F est stable par combinaison linéaire.*

Preuve. Le fait que *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* est évident. Montrons la réciproque. La stabilité de F par combinaison linéaire est équivalente aux propriétés *1.* et *2.* de la définition 1.2 d'après la remarque ci-dessus. Montrons tout d'abord que F est un sous-groupe additif de E. On a bien la stabilité de F par $+$, $0_E \in F$ et de plus pour tout $x \in F$, son opposé $-x = (-1).x \in F$ par stabilité par multiplication par un scalaire. Donc F est bien un sous-groupe de E et donc un groupe. On a ensuite la stabilté par multiplication par un scalaire, les propriétés des opérations $+$ et $.$ restent bien sûr vraies sur F. Donc il suit que $(F, +, .)$ est un espace vectoriel. $\square$

Remarque 1.3. Attention!!! Il ne faut surtout pas oublier de montrer que $0_E \in F$, sinon on peut démontrer que l'ensemble vide est un sous-espace vectoriel de E ce qui est faux.

Remarque 1.4. Dans le théorème précédent, on peut remplacer l'hypothèse *(i)* par l'hypothèse "F est non vide", du fait que si $x \in F$, on a nécessairement $0_E = 0_{\mathbb{K}}.x \in F$ par stabilité par multiplication par un scalaire. Un énoncé équivalent du théorème est donc "un sous-espace vectoriel de E est une partie de E non vide et stable par combinaison linéaire."

Exemples.

- La droite de $\mathbb{R}^2$
$$\Delta = \{(x, y)\,;\ x + 4y = 0\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

- La droite de $\mathbb{R}^2$
$$\Delta = \{(x, y)\,;\ x + 4y = 1\}$$
n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

1.3 Opérations sur les espaces vectoriels

1.3.1 Intersection de sous-espaces

Proposition 1.2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous espaces vectoriels de E, $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Preuve. On vérifie la caractérisation d'un sous-espace vectoriel. C'est immédiat.

1.3.2 Somme de sous-espaces

Définition 1.3. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle somme de F et G et on note $F + G$ l'ensemble suivant :*

$$F + G := \{x + y\,;\ x \in F\,,\ g \in G\}\,.$$

Proposition 1.3. *La somme de deux sous-espaces vectoriels F et G de E est un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant F et G, ce qui signifie que si H est un sous-espace vectoriel de E contenant F et G, alors $F+G \subset H$, ou de façon équivalente que $F+G$ est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant F et G.*

Preuve. Comme F et G contiennent 0_E et $0_E + 0_E = 0_E$, $F+G$ contient 0_E. De plus si $u, v \in F+G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, il existe $x_1, x_2 \in F$ et $y_1, y_2 \in G$ tels que $u = x_1 + y_1$ et $v = x_2 + y_2$. Alors

$$\lambda.u + \mu.v = \lambda.x_1 + \mu.x_2 + \lambda.y_1 + \mu.y_2 \,.$$

Comme F est un sous-espace vectoriel de E, il est stable par combinaison linéaire et donc $\lambda.x_1 + \mu.x_2 \in F$, de même on a $\lambda.y_1 + \mu.y_2$. D'où $\lambda.u + \mu.v \in F+G$. $F+G$ est donc stable par combinaison linéaire, c'est donc un sous-espace vectoriel de E. Soit maintenant H un sous-espace vectoriel de E contenant F et G, alors H est stable par addition et contient donc tous les $x+y$ avec $x \in F$ et $y \in G$, i.e. $F+G \subset H$. Ceci conclut la preuve. □

1.3.3 Produit d'espaces vectoriels

Définition 1.4. *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On appelle produit de E et F et on note $E \times F$ l'ensemble suivant*

$$E \times F := \{(x, y)\,;\ x \in E\,,\ y \in F\}$$

muni de la loi interne

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

et de la loi externe

$$\lambda.(x, y) = (\lambda.x, \lambda.y)\,.$$

Proposition 1.4. *$E \times F$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Preuve. On vérifie les propriétés de la définition. Immédiat.
Exemple. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et on engendre ainsi par récurrence $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

1.4 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 1.5 (Somme directe)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. En général, pour un élément $z \in F+G$, la décomposition*

$$z = x + y\,,\ x \in F\,,\ y \in G\,,$$

n'est pas unique. Dans le cas où cette décomposition est unique pour tous les éléments de $F+G$, on dira que F et G sont en somme directe et on écrira $F+G = F \oplus G$.

Proposition 1.5. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *F et G sont en somme directe ;*

(ii) *$F \cap G = \{0_E\}$.*

Preuve.

(i) $\Leftrightarrow$ *(ii)* On suppose F et G en somme directe. Soit $z \in F \cap G$, alors z s'écrit

$$\begin{aligned} z &= 0_E + z\,,\ 0_E \in F\,,\ z \in G\,, \\ &= z + 0_E\,,\ z \in F\,,\ 0_E \in G\,. \end{aligned}$$

Mais comme la décomposition est unique, on doit avoir $z = 0_E$. Donc $F \cap G = \{0_E\}$.

(ii) $\Leftrightarrow$ *(i)* On suppose que $F \cap G = \{0_E\}$. Soit $z \in F + G$, on suppose que z admet deux décompositions distinctes

$$z = x_1 + y_1 = x_2 + y_2\,,\ x_1, x_2 \in F\,,\ y_1, y_2 \in G$$

(dire que les décompositions sont distinctes signifie que $x_1 \neq x_2$ ou $y_1 \neq y_2$). Alors $0_E = x_2 - x_1 + y_2 - y_1$, i.e. $y_2 - y_1 = -(x_2 - x_1)$ Il suit que $y_2 - y_1$ qui est un élément de G appartient aussi à F. Donc $y_2 - y_1 \in F \cap G$ et est donc nul. D'où $y_2 = y_1$ et $x_2 = x_1$ ce qui contredit l'hypothèse. $\square$

Définition 1.6 (Sous-espaces supplémentaires)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dira que F et G sont supplémentaires si $F + G = E$ et si de plus F et G sont en somme directe. On résume en écrivant $E = F \oplus G$.*

On a une caractérisation simple des sous-espaces supplémentaires qui suit directement de la proposition précédente :

Proposition 1.6. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *F et G sont supplémentaires ;*

(ii) *$F + G = E$ et $F \cap G = \{0_E\}$.*

Exemples.

1.5 familles libres, familles génératrices, bases

On va considérer simplement le cas de familles finies de vecteurs. Commençons par définir la notion de famille de n vecteurs et celle de combinaison linéaire. Ceci va nous amener à définir la notion de sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.

Définition 1.7. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille de n vecteurs de E (où n est un entier naturel donné) est un ensemble constitué de n éléments de E*

$$\mathcal{F} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}\,.$$

On dit que la famille est finie du fait qu'elle contient un nombre fini d'éléments, en l'occurence n.

Définition 1.8 (Sur et sous-famille)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux familles finies de vecteurs de E. On dit que :*

- *$\mathcal{F}$ est une sous-famille de $\mathcal{G}$ si $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.*
- *$\mathcal{F}$ est une sur-famille de $\mathcal{G}$ si $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.*

1.5.1 Familles génératrices finies

Une combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$ est un vecteur de la forme

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n\,,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Définition 1.9 (Sous-espace engendré par une famille)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ une famille de n vecteurs de E. On appelle sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{F}$ l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de $\mathcal{F}$, noté* $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$*.*

Proposition 1.7. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ une famille de n vecteurs de E, l'ensemble* $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ *est un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\mathcal{F}$.*

Preuve. Tout d'abord, $\mathcal{F}$ contient 0_E car

$$0_E = 0_{\mathbb{K}}.v_1 + 0_{\mathbb{K}} v_2 + ... + 0_{\mathbb{K}} v_n\,.$$

De plus, par définition, $\mathcal{F}$ est stable par combinaison linéaire. Soit maintenant H un sous-espace vectoriel de E contenant $\mathcal{F}$. Comme H est stable par combinaison linéaire, il contient $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. □

Exemples.

Définition 1.10. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ une famille de n vecteurs de E. On dit que la famille $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E si $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$, c'est-à-dire si tout élément de E peut s'écrire comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$.*

Exemples.

Proposition 1.8. *Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.*

Preuve. Il suffit de bien noter les vecteurs en mettant d'abord ceux de la plus petite famille génératrice et les autres ensuite.

1.5.2 Familles libres finies

Définition 1.11. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit qu'une famille $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de n éléments de E est une famille libre de E si*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0\,,$$

c'est-à-dire que la seule combinaison linéaire nulle des v_i, $i = 1, 2, ..., n$ est celle dont tous les coefficients sont nuls.

Définition 1.12. *Une famille qui n'est pas libre est dite liée.*

Exemples.
On a les propriétés importantes suivantes :

Proposition 1.9. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E.*

1. *Si $\mathcal{F}$ contient exactement deux vecteurs, alors $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si ses deux vecteurs ne sont pas colinéaires (autrement dit parallèles, ou encore proportionnels).*

2. *Si $0_E \in \mathcal{F}$ alors $\mathcal{F}$ est liée.*

Preuve.

1. On suppose que $\mathcal{F}$ contient exactement deux vecteurs, i.e. $\mathcal{F} = \{u, v\}$, $u, v \in E$. On va montrer que $\mathcal{F}$ est liée si et seulement si u et v sont parallèles.

   Supposons que $\mathcal{F}$ est liée, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ non tous les deux nuls tels que
   $$\lambda u + \mu v = 0_E\,.$$
   Si $\lambda \neq 0$ alors on a
   $$u = -\frac{\mu}{\lambda} v$$
   et donc $u \parallel v$. Si $\lambda = 0$ alors $\mu \neq 0$ et
   $$v = -\frac{\lambda}{\mu} u\,,$$

d'où $u \parallel v$.

Réciproquement, supposons que u et v sont colinéaires. Si $u \neq 0$, il suit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v = \lambda u$, autrement dit $\lambda u - v = 0_E$, la famille $\mathcal{F}$ est donc liée. Si $u = 0_E$ alors $1.u + 0.v = 0_E$ et donc la famille $\mathcal{F}$ est liée.

2. Si $0_E \in \mathcal{F}$, on considère la combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$ avec le coefficient $0_{\mathbb{K}}$ pour tous les vecteurs sauf pour le vecteur nul pour lequel on prend par exemple 1. La combinaison linéaire est nulle mais tous ses coefficients ne le sont pas, donc la famille $\mathcal{F}$ est liée. □

Proposition 1.10. *Toute sous-famille d'une famille libre est libre. Toute sur-famille d'une famille liée est liée.*

Preuve. Encore une histoire de numérotation de vecteurs.

Proposition 1.11. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ une famille de E. Alors $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si, pour $\{\lambda_1\,,\ \lambda_2\,,\ \dots\,,\ \lambda_n\}$ et $\{\mu_1\,,\ \mu_2\,,\ \dots\,,\ \mu_n\}$ dans $\mathbb{K}$,*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + ... + \mu_n v_n\,,$$

implique $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 = \mu_2$, ..., $\lambda_n = \mu_n$.

Preuve. C'est une application de la définition. L'égalité des deux combinaisons linéaires s'écrit

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) v_i = 0 \tag{1.1}$$

et la famille est libre si et seulement si (1.1) implique que tous les coefficients $\lambda_i - \mu_i$ sont nuls. □

1.5.3 Bases et dimension

Définition 1.13. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit qu'une famille $\mathcal{F} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de n éléments de E est une base de E si $\mathcal{F}$ est une famille libre et génératrice de E.*

Exemples.

1. Dans $\mathbb{R}$:
   (a) $\mathcal{F}_1 = \{1\}$ est une base de $\mathbb{R}$;
   (b) $\mathcal{F}_2 = \{0\}$ n'est ni libre ni génératrice, ce n'est pas une base de $\mathbb{R}$;
   (c) $\mathcal{F}_3 = \{x_0\}$ pour $x_0 \in \mathbb{R}$ donné, $x_0 \neq 0$, est une base de $\mathbb{R}$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$:
   (a) $\mathcal{F}_4 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$;

(b) $\mathcal{F}_5 = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\}$ également.

3. Dans $\mathbb{R}_n[X]$:

   (a) $\mathcal{F}_6 = \{1, X, ..., X^n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$;

   (b) $\mathcal{F}_7 = \{1, (X-1), ..., (X-1)^n\}$ également.

Proposition 1.12. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E. Soit $x \in E$, alors x s'écrit de manière unique sous la forme*

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n\,,$$

c'est-à-dire que les scalaires λ_1, λ_2, ..., λ_n existent et sont uniques.

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la proposition 1.11. □

Mais en fait on a équivalence.

Théorème 1.2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une famille de n vecteurs de E, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathcal{F}$ est une base de E ;*

(ii) *pour tout $x \in E$, il existe d'uniques scalaires λ_1, λ_2, ..., λ_n dans $\mathbb{K}$ tels que*

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n\,.$$

Preuve.

(i) $\Rightarrow$ *(ii)* C'est la proposition précédente.

(ii) $\Rightarrow$ *(i)* L'existence des scalaires montre que $\mathcal{F}$ est génératrice. L'unicité est équivalente au fait que $\mathcal{F}$ est libre. □

Théorème 1.3. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une base $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ ayant n éléments. Alors :*

- *une famille libre dans E contient au plus n éléments ;*
- *une famille génératrice de E contient au moins n éléments.*
- *Il suit que toutes les bases de E admettent exactement n éléments.*

Preuve. Nous allons établir un résultat intermédiaire dont le théorème sera une conséquence immédiate.

Lemme 1.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $\mathcal{F}$ une famille libre finie et soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie. Alors $\sharp(\mathcal{G}) \geq \sharp(\mathcal{F})$.*

Preuve du lemme. On note $\mathcal{F} = \{v_1, ..., v_n\}$ et $\mathcal{G} = \{w_1, ..., w_p\}$. On suppose que $n > p$. Comme la famille $\mathcal{G}$ est génératrice, il suit que v_1, ..., v_n peuvent tous s'écrire comme combinaisons linéaires de e_1, ..., e_n, i.e. sous la forme

$$\begin{aligned} v_1 &= \lambda_{1,1}w_1 + \lambda_{1,2}w_2 + ... + \lambda_{1,p}w_n \, , \\ v_2 &= \lambda_{2,1}w_1 + \lambda_{2,2}w_2 + ... + \lambda_{2,n}w_n \, , \\ & \quad ... \\ v_n &= \lambda_{n,1}w_1 + \lambda_{n,2}w_2 + ... + \lambda_{n,p}w_p \, . \end{aligned}$$

On veut montrer que la famille $\mathcal{F}$ est nécessairement liée. Pour cela, on cherche μ_1, μ_2, ..., μ_n non tous nuls tels que

$$\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + ... + \mu_k v_k = 0 \, , \tag{1.2}$$

ce qui contredira le fait que la famille des v_i est libre. L'équation (1.2) s'écrit

$$\begin{aligned} (\lambda_{1,1}\mu_1 + \lambda_{2,1}\mu_2 + ... + \lambda_{n,1}\mu_n)w_1 & \\ +(\lambda_{1,2}\mu_1 + \lambda_{2,2}\mu_2 + ... + \lambda_{n,2}\mu_n)w_2 & \\ .... & \\ +(\lambda_{1,p}\mu_1 + \lambda_{2,p}\mu_2 + ... + \lambda_{n,p}\mu_n)w_p &= 0_E \, . \end{aligned}$$

On cherche une solution telle que tous les coefficients devant les w_i soient nuls. On obtient un système de n équations linéaires à k inconnues,

$$\begin{aligned} \lambda_{1,1}\mu_1 + \lambda_{2,1}\mu_2 + ... + \lambda_{n,1}\mu_n &= 0_{\mathbb{K}} \\ \lambda_{1,2}\mu_1 + \lambda_{2,2}\mu_2 + ... + \lambda_{n,2}\mu_n &= 0_{\mathbb{K}} \\ .... & \;...\; ... \\ \lambda_{1,p}\mu_1 + \lambda_{2,p}\mu_2 + ... + \lambda_{n,p}\mu_n &= 0_{\mathbb{K}} \, . \end{aligned}$$

qui admet nécessairement une infinité de solutions non nulles du fait que $k > n$. On en déduit donc que $\mathcal{F}$ est liée, ce qui est contraire à l'hypothèse. □

Revenons à la preuve du théorème.

- Soit $\mathcal{F}$ une famille libre, alors $\sharp(\mathcal{F}) \leq \sharp(\mathcal{B})$ car $\mathcal{B}$ est génératrice.
- Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice, alors $\sharp(\mathcal{F}) \geq \sharp(\mathcal{B})$ car $\mathcal{B}$ est libre. □

Nous pouvons maintenant définir la notion de dimension.

Définition 1.14 (Espace vectoriel de dimension finie, infinie)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

- *On dit que E est de dimension finie s'il existe une famille finie $\mathcal{B}$ de vecteurs de E qui est une base de E.*

- *Si ce n'est pas le cas, on dit que E est de dimension infinie.*

Définition 1.15 (Dimension)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

- *Si E est de dimension finie, soit $\mathcal{B}$ une base de E, alors on appelle dimension de E, et on note* $\dim E$*, le nombre d'éléments de $\mathcal{B}$, i.e.*

$$\dim E = \sharp(\mathcal{B})\,.$$

  Autrement dit, pour $n \in \mathbb{N}$ donné, on a $\dim E = n$ *si E admet une base ayant n éléments.*

- *Si E est de dimension infinie, on pose* $\dim E = +\infty$*.*

Exemples.

- $\{0_{\mathbb{K}}\}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 0.
- $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1.
- $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension 2.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n ; $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n$.
- L'ensemble
$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\; x+y+2z=0\}$$
  est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.
- L'ensemble
$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\; x+y+2z=0 \,\mathrm{et}\; x+3y=z\}$$
  est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1.
- $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n+1$.
- $\mathbb{R}[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie.
- L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie.
- Résultats analogues sur $\mathbb{C}$.

Théorème 1.4. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on suppose que E admet une famille génératrice finie, alors on peut en extraire une base.*

Preuve. D'une famille génératrice non libre, on peut enlever un vecteur pour obtenir une autre famille génératrice. On répète le processus jusqu'à obtenir une famille qui est toujours génératrice mais qui est aussi libre (i.e. une base). C'est forcément le cas à un moment, sinon on descend jusqu'à l'ensemble vide qui ne peut pas être une famille génératrice. □

Corollaire 1.1. *Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de dimension finie si et seulement si il admet une famille génératrice finie.*

Preuve. L'implication E de dimension finie $\Rightarrow$ il existe une famille génératrice finie est claire. La réciproque est une conséquence directe du théorème 1.4. □

Théorème 1.5 (de la base incomplète)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toute famille libre de E peut-être complétée en une base de E.*

Preuve. On considère une famille génératrice de E contenant $\mathcal{F}$, on en extrait une base en enlevant des vecteurs et en prenant soin à chaque étape de n'enlever aucun vecteur de $\mathcal{F}$. □

Ce théorème permet de démontrer une caractérisation utile d'un espace de dimension infinie.

Théorème 1.6. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, il est de dimension infinie si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, E admet une famille libre ayant n éléments.*

Preuve. Supposons que E soit de dimension infinie. Soit n_0 dans $\mathbb{N}^*$ tel que E admette une famille libre ayant n_0 éléments. Pour $n_0 = 1$ on sait que c'est vrai, il suffit de prendre une famille contenant un vecteur non nul de E. Soit

$$\mathcal{F} = \{e_1, ..., e_{n_0}\}$$

une telle famille. Elle ne peut pas être génératrice, sinon ce serait une base et E serait de dimension finie. Alors il existe $x \in E$ qui n'est pas combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$. En conséquence, $\mathcal{F} \cup \{x\}$ est une famille libre de $n_0 + 1$ éléments dans E. Il suit par récurrence que E admet pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une famille libre ayant n éléments.

Réciproquement, supposons que E admette pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une famille libre ayant n éléments. Si E était de dimension finie $k \in \mathbb{N}$, toute famille libre de E aurait au plus k éléments, ce qui est contraire à l'hypothèse. D'où E est de dimension infinie. □

Théorème 1.7. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathcal{F}$ est une base de E ;*
2. *$\mathcal{F}$ est une famille libre de n éléments ;*
3. *$\mathcal{F}$ est une famille génératrice de n éléments.*

Preuve. Par définition d'une base, on a *1.* $\Rightarrow$ *2.* et *1.* $\Rightarrow$ *3.* Supposons *2.*, si la famille n'est pas génératrice, il existe $x \in E$ qui n'est pas combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{F} \cup \{x\}$ est une famille libre de $n+1$ éléments dans E ce qui est absurde. Donc *2.* $\Rightarrow$ *3.* et il suit donc aussi *2.* $\Rightarrow$ *1.* Supposons maintenant *3.*, si la famille n'est pas libre on peut en enlever un vecteur et conserver une famille génératrice, on obtient ainsi une famille génératrice de $n-1$ éléments dont on peut extraire une base. On trouve donc une base ayant strictement moins de n éléments ce qui est absurde. Donc *3.* $\Rightarrow$ *2.* et il suit donc aussi *3.* $\Rightarrow$ *1.* □

On remarque que les sous-espaces vectoriels d'un espace-vectoriel de dimension finie sont nécessairement eux-mêmes de dimension finie. On peut être plus précis :

Proposition 1.13. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et soit F un sous-espace-vectoriel de E. Alors :*

1. *F est de dimension finie $m \leq n$;*
2. *$\dim F = n$ si et seulement si $F = E$.*

Preuve.

1. Supposons que F soit de dimension infinie, alors F admet pour tout k une famille libre de k éléments. En particulier, pour $k = n+1$, soit $\mathcal{F}$ une telle famille. Elle peut être complétée en une base de E qui contient strictement plus de n vecteurs. C'est absurde. F est donc de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ une base de F, c'est une famille libre de E, elle admet donc au plus n éléments, d'où le résultat.

2. Supposons $\dim F = n$ et $F \neq E$. Soit $x \in E \setminus F$ alors x n'est pas combinaison linéaire des éléments d'une base $\mathcal{B}$ quelconque de F, donc $\mathcal{B} \cup \{x\}$ est un système libre de $n+1$ éléments, ce qui est impossible car $\dim E = n$. Il suit que $F = E$. Et bien sûr si $F = E$, on a bien $\dim F = n$. □

Proposition 1.14. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E, alors*

$$\dim(F+G) \leq \dim F + \dim G\,.$$

Preuve. On prend la réunion d'une base de F et d'une base de G. On a au plus $\dim F + \dim G$ éléments et c'est une famille génératrice. D'où le résultat. □

Plus précisément, on a

Théorème 1.8. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E, alors*

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)\,.$$

Preuve. On prend une base $\mathcal{B}$ de $F \cap G$, on la complète en une base $\mathcal{B}_1$ de F en rajoutant $\dim F - \dim(F \cap G)$ éléments et on la complète également en une base $\mathcal{B}_2$ de G en rajoutant $\dim G - \dim(F \cap G)$ éléments. Alors $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une famille génératrice de $F + G$ est c'est aussi une famille libre par construction. C'est donc une base de $F + G$. Le nombre d'éléments qu'elle contient est

$$\dim(F \cap G) + \dim F - \dim(F \cap G) + \dim G - \dim(F \cap G) = \dim F - \dim G - \dim(F \cap G)\,.$$

Ceci démontre le résultat. □

Corollaire 1.2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E, alors $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$ si et seulement si $F + G = F \oplus G$.*

On peut aussi caractériser aisément la dimension d'un produit d'espaces vectoriels de dimension finie.

Proposition 1.15. *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, alors $E \times F$ est de dimension finie et*

$$\dim(E \times F) = \dim E \times \dim F\,.$$

Preuve. On en donne simplement l'idée principale. Si $\mathcal{B}_E = \{e_1, ..., e_n\}$ est une base de E et $\mathcal{B}_F = \{f_1, ..., f_p\}$ est une base de F, alors

$$\{(e_i, f_j)\}_{1 \leq i \leq n\,,\ 1 \leq j \leq p}$$

est une base de $E \times F$ et elle contient $n \times p$ éléments. □

On termine ce paragraphe avec une notion importante qui sera utilisée dans les chapitres suivants : celle du rang d'une famille finie.

Définition 1.16. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs dans E. On appelle rang de $\mathcal{F}$ la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.*

Remarque 1.5. Bien sûr, le rang d'une famille de n vecteurs est inférieur ou égal à n.

1.6 Exercices

Exercice 1.1. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les trois sous-espaces vectoriels suivants :

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x + y = 0\}\,, \\ F_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x + y + z = 0\,,\ x + y - z = 0\}\,, \\ F_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x + y + z = 0\,,\ x - y = 0\}\,. \end{aligned}$$

1. F_1 et F_2 sont-ils supplémentaires?

2. F_1 et F_3 sont-ils supplémentaires?

Exercice 1.2. Les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres? Sont-elles génératrices? :

1. $\mathcal{F}_1 = \{(1,0,2),(0,3,0),(2,0,1),(2,2,1)\}$,
2. $\mathcal{F}_2 = \{(1,0,2),(2,1,4)\}$,
3. $\mathcal{F}_3 = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$.

Exercice 1.3. Dans $\mathbb{R}[X]$ on considère les sous-ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
F_1 &= \{p \in \mathbb{R}[X]\,;\ p(0) = 0\,,\ p'(0) = 0\,,\ \mathrm{d}^{\mathrm{o}}(p) \leq 2\}\,,\\
F_2 &= \{p \in \mathbb{R}[X]\,;\ p(0) = 1\,,\ p'(0) = 1\,,\ \mathrm{d}^{\mathrm{o}}(p) \leq 2\}\,,\\
F_3 &= \{p \in \mathbb{R}[X]\,;\ p(1) = 0\,,\ p'(1) = 0\,,\ \mathrm{d}^{\mathrm{o}}(p) \leq 2\}\,,\\
F_4 &= \{p \in \mathbb{R}[X]\,;\ (p''(2))^2 = 0\,,\ \ ,\ \mathrm{d}^{\mathrm{o}}(p) \leq 2\}\,,\\
F_5 &= \{p \in \mathbb{R}[X]\,;\ p(0) = p'(0) = p''(0) = 0\,,\ \mathrm{d}^{\mathrm{o}}(p) \leq 3\}\,.
\end{aligned}$$

1. Parmi ces sous-ensembles de $\mathbb{R}[X]$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$?
2. Parmi ceux qui sont des sous-espaces de $\mathbb{R}[X]$, lesquels sont en somme directe?
3. Déterminer $F_1 + F_4$, $F_3 + F_4$, $F_1 + F_4 + F_5$.

Exercice 1.4. Dans un espace vectoriel de dimension 4, on considère une famille $\mathcal{F}$ de 5 vecteurs. La famille $\mathcal{F}$ peut-elle être libre? Peut-elle être génératrice?

Exercice 1.5. On considère les sous ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$\begin{aligned}
F_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x = y = z\}\,,\\
F_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x + z = 0\}\,,\\
F_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2 = y^2\}\,.
\end{aligned}$$

1. F_1, F_2, F_3 sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?
2. Trouver une base de ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1.6. Soit les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$\begin{aligned}
F_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x + y + z = 0\}\,,\\
F_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ y = |x|\}\,,\\
F_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x = y\,,\ z = 1\}\,,\\
F_4 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x = y\,,\ z = -x\}\,.
\end{aligned}$$

1. F_1 est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Si oui donner une base de F_1.

2. F_2 est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Si oui donner une base de F_2.
3. F_3 est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Si oui donner une base de F_3.
4. F_4 est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Si oui donner une base de F_4.

Exercice 1.7. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les sous-espaces vectoriels suivants :

$$\begin{array}{rcl} F_1 & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, ; \; x+y=0\} \, , \\ F_2 & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, ; \; x-y=0 \, , \; z=0\} \, , \\ F_3 & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, ; \; x+y=0 \, , \; z=0\} \, . \end{array}$$

Déterminer les sous-espaces F_1+F_2, F_1+F_3 et F_2+F_3 et en donner des bases.

Chapitre 2

Résolution de systèmes linéaires

On présente dans ce bref chapitre la méthode de Gauss qui est utile dans de nombreux exercices dès la fin du chapitre 1.

2.1 La méthode de Gauss

Un système linéaire général de n équations à k inconnues s'écrit sous la forme suivante :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = & y_1\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & = & y_2\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & ... & ... \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n & = & y_k\,, \end{array}\right.$$

où les a_{ij} et les y_i sont des coefficients fixés dans $\mathbb{K}$ et les x_i sont les inconnues que l'on cherche dans $\mathbb{K}$. La méthode de Gauss est une méthode systématique pour résoudre un tel système. L'idée est de se ramener à un système dit triangulaire supérieur qui sera très facile à résoudre. La méthode est décrite par l'algorithme suivant.
L'algorithme de Gauss On note L_1, L_2, ..., L_k les lignes du système.

Première étape : variable x_1. On cherche une ligne dans laquelle le coefficient de x_1 est non nul, c'est-à-dire qu'on cherche i_0 tel que $a_{i_0 1} \neq 0$.

- Si on n'en trouve pas, c'est que la variable x_1 n'apparaît pas dans le système, on passe alors à l'étape 2.
- Si on trouve un tel i_0, on garde la ligne L_{i_0} du système et on l'utilise pour éliminer la variable x_1 des autres lignes de la façon suivante : pour $j \neq i$, on remplace la ligne L_j par
$$L_j - \frac{a_{j1}}{a_{i_0 1}} L_{i_0}\,.$$

On se retrouve avec un système équivalent au premier, constitué de la ligne L_{i_0} et d'un sous-système de $k-1$ équations avec $n-1$ inconnues.

Deuxième étape : deuxième variable. C'est la même que l'étape 1 mais appliquée à la variable x_2 et au sous-système de $k-1$ équations avec $n-1$ inconnues.

Ainsi de suite avec les variables x_3, ..., x_n.

Résolution. Le système est alors dans une forme où, s'il y a des solutions, on peut les trouver en remontant de la dernière à la première équation.

Nous énonçons maintenant des propriétés sans les démontrer. Nous verrons la preuve de ces résultats au chapitre suivant.

Proposition 2.1 (Conditions d'existence et d'unicité des solutions)**.** *On note* $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *la famille des vecteurs de* $\mathbb{K}^n$ *des coefficients des équations, i.e.*

$$v_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})\,.$$

1. *Si* $n > k$ *et la famille* $\mathcal{F}$ *est libre, alors le système admet une infinité de solutions.*
2. *Si* $n = k$ *et la famille* $\mathcal{F}$ *est libre, alors le système admet exactement une solution.*
3. *Si la famille* $\mathcal{F}$ *n'est pas libre (par exemple si* $n < k$*), alors en général le système n'admet pas de solution, mais cela dépend des cas.*

2.2 Exercices

Exercice 2.1. Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x + y & = & 1 \\ x + 2y + z & = & -1 \\ y + 2z + t & = & 1 \\ z + 2t & = & -1 \end{array}\right.$$

Chapitre 3

Applications linéaires

3.1 Definitions

Définition 3.1. *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est dite linéaire si pour tout $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a*

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) .$$

On dira aussi que f est un homomorphisme. De même, on dira que f est un :

- *endomorphisme si $E = F$ et f est linéaire ;*
- *isomorphisme si f est linéaire et bijective ;*
- *automorphisme si $E = F$ et f est linéaire et bijective.*

Remarque 3.1. On voit en particulier que si f est linéaire, alors $f(0) = 0$.

Exemples. Applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, homotéties, rotations.

Définition 3.2. *Une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E dans $\mathbb{K}$ est appelée forme linéaire sur E.*

Définition 3.3. *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle :*

- *noyau de f et on note* $\mathrm{Ker} f$, *le sous-ensemble de E*

$$\mathrm{Ker} f := \{x \in E \,;\ f(x) = 0\} \ ;$$

- *image de f et on note* $\mathrm{Im} f$, *le sous-ensemble de F*

$$\mathrm{Im} f := \{f(x) \,;\ x \in E\} \ .$$

Notations. On notera $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans lui-même.

3.2 Propriétés

Proposition 3.1. *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire, alors :*

1. $\mathrm{Ker} f$ *est un sous-espace vectoriel de E ;*
2. $\mathrm{Im} f$ *est un sous-espace vectoriel de F ;*
3. *si G est un sous-espace vectoriel de E, alors*

$$f(G) = \{f(x) ;\ x \in G\},$$

est un sous-espace vectoriel de F.

Preuve. On montre 1. et 3. en appliquant la caractérisation des sous-espaces vectoriels. 2. est bien sûr une conséquence de 3. □

Théorème 3.1. *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire, alors f est injective si et seulement si* $\mathrm{Ker} f = \{0\}$.

Preuve. On suppose que f est injective, c'est-à-dire que $x \neq y$ entraine $f(x) \neq f(y)$, ce qui revient à dire que $f(x) = f(y)$ entraine $x = y$. En particulier, il suit que si $f(x) = 0$ alors $x = 0$ car $f(0) = 0$.

Réciproquement, supposons que $\mathrm{Ker} f = \{0\}$ et considérons x et y tels que $f(x) = f(y)$. Alors par linéarité de f, $f(x - y) = 0$, c'est-à-dire que $x - y$ appartient au noyau de f. Donc, $x = y$, et il suit que f est injective. □

Proposition 3.2. *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Preuve. On vérifie une à une toutes les propriétés, il n'y a pas de difficulté mais c'est un peu long. □

Proposition 3.3. *Soit E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*

1. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.*
2. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ un isomorphisme, alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.*

Preuve.

1. On utilise successivement la linéarité de f et de g :

$$\begin{aligned} g \circ f(\lambda x + \mu y) &= g\left(f(\lambda x + \mu y)\right) \\ &= g\left(\lambda f(x) + \mu g(y)\right) \text{ par linéarité de } f \\ &= \lambda . g(f(x)) + \mu . g(f(x)) \text{ par linéarité de } g \\ &= \lambda g \circ f(x) + \mu g \circ f(y) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

2. Soit $u, v \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Comme f est un isomorphisme, f admet une application réciproque ; on pose $x := f^{-1}(u)$ et $y := f^{-1}(v)$. On calcule alors

$$\begin{aligned} f^{-1}(\lambda u + \mu v) &= f^{-1}(\lambda f(x) + \mu f(y)) \\ &= f^{-1}(f(\lambda x + \mu y)) \\ &= \lambda x + \mu y \\ &= \lambda f^{-1}(u) + \mu f^{-1}(v)\,. \quad \square \end{aligned}$$

3.3 Bases, dimension et isomorphismes

On commence par remarquer qu'une application linéaire est entièrement caractérisée par les images des vecteurs de base.

Théorème 3.2. *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, on suppose que E est de dimension finie. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E et $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une unique application linéaire L de E dans F telle que, pour $i = 1, 2, ..., n$ on ait $L(e_i) = f_i$.*

Preuve. Commençons par supposer qu'une telle application existe. Soit $x \in E$, on le décompose sur la base $\mathcal{B}$: il existe d'uniques λ_1, λ_2, ...,λ_n dans $\mathbb{K}$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$. Alors on a par linéarité

$$L(x) = \lambda_1 L(e_1) + \lambda_2 L(e_2) + ... + \lambda_n L(e_n) = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + ... + \lambda_n f_n\,. \tag{3.1}$$

Ceci montre l'unicité de l'application L. Maintenant, si on définit L par la partie droite de la formule (3.1), c'est-à-dire

$$L(x) = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + ... + \lambda_n f_n \tag{3.2}$$

pour $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$, alors la formule (3.2) définit une application linéaire L qui vérifie $L(e_i) = f_i$ pour $i = 1, ..., n$ (la vérification de la linéarité est laissée en exercice). □

Ce théorème a des conséquences importantes pour la vérification de propriétés d'une application linéaire comme l'injectivité et la surjectivité.

Corollaire 3.1. *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E étant supposé de dimension finie n, $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E et $L \in \mathcal{L}(E, F)$. On considère la famille des vecteurs de F images des éléments de $\mathcal{B}$:*

$$\mathcal{F} := \{L(e_1), L(e_2), ..., L(e_n)\}\,.$$

Alors :

1. *$\mathcal{F}$ est une famille génératrice de* $\operatorname{Im} L$ *;*

2. *conséquemment,* $\operatorname{Im} L$ *est un sous-espace vectoriel de* F *de dimension finie et de plus* $\dim(\operatorname{Im} L) \leq n$ *;*

3. L *est injective si et seulement si* $\mathcal{F}$ *est une famille libre de* F *;*

4. L *est surjective si et seulement si* $\mathcal{F}$ *est une famille génératrice de* F *;*

5. L *est bijective si et seulement si* $\mathcal{F}$ *est une base de* F*.*

Preuve.

1. Soit $x \in E$, il se décompose de manière unique sur la base :
$$x = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n\,,$$
d'où il suit que
$$f(x) = \lambda_1 f(e_1) + ... + \lambda_n f(e_n)\,.$$
Donc tout élément de $\operatorname{Im} f$ est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$. Ceci démontre *1.*

2. suit directement de *1.*

3. Supposons que $\mathcal{F}$ soit une famille liée. Alors il existe λ_1, ..., λ_n non tous nuls tels que
$$\lambda_1 f(e_1) + ... + \lambda_n f(e_n) = 0\,,$$
c'est-à-dire
$$f\left(\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n\right) = 0\,.$$
De plus, comme les λ_i, $i = 1, 2, ..., n$ ne sont pas tous nuls et comme $\mathcal{B}$ est une base, le vecteur $\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n$ est non nul. Il suit donc que f n'est pas injective.

   Réciproquement, supposons que f n'est pas injective, alors il existe un $x \in E$ non nul tel que $f(x) = 0$. On décompose x sur la base $\mathcal{B}$:
$$x = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n$$
avec λ_1, ..., λ_n non tous nuls. Il suit que
$$\lambda_1 f(e_1) + ... + \lambda_n f(e_n) = 0$$
et la famille $\mathcal{F}$ est donc liée. Ceci démontre *3.*

4. On a vu que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$. Et de plus f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$. D'où le point 4.

5. est une conséquence des deux points précédents. $\square$

Ceci implique un résultat fondamental.

Théorème 3.3. *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie et qu'il existe un isomorphisme de E dans F. Alors F est de dimension finie et* $\dim E = \dim F$.

Preuve. C'est une conséquence directe du point *5* du corollaire précédent. □

On a aussi une autre conséquence simple mais utile :

Corollaire 3.2. *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, on note $n =$* $\dim E$ *et $p =$* $\dim F$. *Soit $L \in \mathcal{L}(E, F)$.*

1. *Si $n < p$ alors L n'est pas surjective.*
2. *Si $n > p$ alors L n'est pas injective.*

De plus, à l'aide de la caractérisation des bases donnée dans le théorème 1.7, on peut donner une caractérisation des isomorphismes.

Théorème 3.4. *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie ayant même dimension et soit $L \in \mathcal{L}(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) L est un isomorphisme de E sur F ;

(ii) L est injective ;

(iii) L est surjective.

Preuve. C'est une conséquence immédiate du théorème 1.7 et du corollaire 3.1. □

Remarque 3.2. En particulier, ce théorème s'applique aux endomorphismes sur un espace vectoriel de dimension finie. Attention toutefois, si la dimension est infinie, ce n'est plus vrai et on peut trouver des contre-exemples!

On a un théorème essentiel relatif aux dimensions et aux applications linéaires, c'est le théorème du rang.

Théorème 3.5 (du rang)**.** *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie. Soit $L \in \mathcal{L}(E, F)$, alors*

$$\dim E = \dim(\operatorname{Im} L) + \dim(\operatorname{Ker} L)\ .$$

Preuve. Le cas où $L = 0$ est immédiat et le résultat du théorème est clairement vérifié du fait que $\operatorname{Ker} L = E$ et $\operatorname{Im} L = \{0\}$. Lorsque $L \neq 0$, son noyau est différent de E et il existe alors un sous-espace supplémentaire de $\operatorname{Ker} L$ dans E. Nous allons énoncer un résultat tout aussi important que le théorème du rang et dont celui-ci sera une conséquence simple.

Lemme 3.1. *Sous les hypothèses du théorème, en supposant de plus que $L \neq 0$, on considère G un sous-espace vectoriel supplémentaire de* $\operatorname{Ker} L$. *Alors la restriction de L à G est un isomorphisme de G sur* $\operatorname{Im} L$.

Preuve du lemme. L est injective sur G. En effet, soit $x \in G$ tel que $L(x) = 0$ alors $x \in G \cap \operatorname{Ker} L = \{0\}$ et donc $x = 0$. De plus, pour tout $x \in E$, on a la décomposition unique

$$x = y + z\,,\ y \in \operatorname{Ker} L\,,\ z \in G$$

et

$$L(y + z) = L(y) + L(z) = 0 + L(z) = L(z)\,.$$

Donc tout élément de $\operatorname{Im} L$ est l'image par L d'un élément de G. L est donc bijective de G sur $\operatorname{Im} L$. □

On déduit du lemme précédent que $\dim G = \dim \operatorname{Im} L$ et de plus, comme G et $\operatorname{Ker} L$ sont supplémentaires, on a $\dim G + \dim \operatorname{Ker} L = \dim E$. D'où le Théorème du rang. □

3.4 Projections et symétries

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G. Dans cette situation, tout élément x de E s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = x_F + x_G\,,\ x_F \in F \text{ et } x_G \in G\,.$$

Dire que cette décomposition est unique signifie qu'à un x donné est associé un unique x_F et un unique x_G, que l'on peut considérer comme les "composantes" de x sur F et sur G. L'exemple typique de ce genre de décomposition est le suivant : $E = \mathbb{R}^2$, F est l'axe des abscisses et G l'axe des ordonnées, c'est-à-dire

$$F = \{(x, 0)\,;\ x \in \mathbb{R}\}\,,\ G = \{(0, y)\,;\ y \in \mathbb{R}\}\,.$$

Tout vecteur (x, y) de $\mathbb{R}^2$ se décompose de manière unique en la somme d'un élément de F et d'un élément de G et cette décomposition s'écrit

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y)\,.$$

L'unicité de la décomposition permet de définir les applications suivantes.

Définition 3.4. *On se place dans la situation générale décrite ci-dessus, avec E, F et G tels que $E = F \oplus G$ et pour $x \in E$ quelconque, on note x_F et x_G ses composantes sur F et G.*

1. *On appelle projection sur F parallèlement à G l'application qui à $x \in E$ associe x_F. On note cette application P_F.*

2. *De même, on appelle projection sur G parallèlement à F l'application qui à $x \in E$ associe x_G. On note cette application P_G.*

3. *On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'application qui à $x \in E$ associe $x_F - x_G$. On note cette application S_F.*

4. *De même, on appelle symétrie par rapport à G parallèlement à F l'application qui à $x \in E$ associe $-x_F + x_G$. On note cette application S_G.*

Proposition 3.4. *Dans la situation de la définition précédente, les applications P_F, P_G, S_F et S_G sont linéaires. De plus elles ont les propriétés suivantes :*

1. $\operatorname{Ker} P_F = G$, $\operatorname{Im} P_F = F = \{x \in E\,;\ P_F x = x\}$;
2. $\operatorname{Ker} P_G = F$, $\operatorname{Im} P_G = G = \{x \in E\,;\ P_G x = x\}$;
3. $\operatorname{Ker} S_F = \{0\}$, $\operatorname{Im} S_F = E$;
4. $\operatorname{Ker} S_G = \{0\}$, $\operatorname{Im} S_G = E$;
5. $F = \{x \in E\,;\ S_F x = x\}$, $G = \{x \in E\,;\ S_F x = -x\}$;
6. $F = \{x \in E\,;\ S_G x = -x\}$, $G = \{x \in E\,;\ S_G x = x\}$;
7. $P_F + P_G = \operatorname{Id}$;
8. $P_F - P_G = S_F$, $P_G - P_F = S_G$;
9. $P_F \circ P_G = P_G \circ P_F = 0$;
10. $S_F \circ S_G = S_G \circ S_F = -\operatorname{Id}$.

Preuve. C'est un ensemble d'exercices qui sont des applications de la définition des sous-espaces vectoriels supplémentaires. Quelques uns seront traités en cours et en TD si on le souhaite. □

Les projections et symétries ont d'autres propriétés importantes dont on va voir qu'elles les caractérisent.

Proposition 3.5. *Dans la situation de la définition précédente, on a*

1. $P_F \circ P_F = P_F$, $P_G \circ P_G = P_G$;
2. $S_F \circ S_F = \operatorname{Id}$, *on dit que S_F est une involution, de même bien sûr* $S_G \circ S_G = \operatorname{Id}$.

Preuve. La preuve est encore un exercice d'application des définitions. □

On a en fait un résultat beaucoup plus fort :

Théorème 3.6. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

1. *Soit P un endomorphisme de E, les propriétés suivantes sont équivalentes :*
   - (i) $P \circ P = P$;
   - (ii) *P est une projection, c'est la projection sur* $\operatorname{Im} P$ *et parallèlement à* $\operatorname{Ker} P$.
2. *Soit S un endomorphisme de E, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $S \circ S = \mathrm{Id}$ *;*

(ii) S *est une symétrie, si on note*

$$F = \{x \in E\,;\ Sx = x\}\,,\ G = \{x \in E\,;\ Sx = -x\}\,,$$

S *est la symétrie par rapport à* F *parallèlement à* G*.*

Preuve. Dans les deux cas, on a déjà vu que *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)*. On ne démontre donc que les implications réciproques.

1. Considérons une application linéaire P de E dans lui-même telle que $P \circ P = P$. Montrons que $E = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Ker} P$. Soit $x \in E$, on a

$$x = Px + x - Px\,, \tag{3.3}$$

et on a clairement que $Px \in \operatorname{Im} P$ et $x - Px \in \operatorname{Ker} P$. Reste à voir que $\operatorname{Im} P \cap \operatorname{Ker} P$ est réduit à $\{0\}$. Soit $x \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Ker} P$, il existe $y \in E$ tel que $x = Py$. Il suit que

$$0 = Px = P(Py) = Py = x\,.$$

D'où $E = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Ker} P$. La décomposition (3.3) est donc unique et P est bien la projection sur $\operatorname{Im} P$ parallèlement à $\operatorname{Ker} P$.

2. On considère maintenant une application linéaire S de E dans lui-même telle que $S \circ S = \mathrm{Id}$. On pose

$$F := \{x \in E\,;\ Sx = x\}\,,\ G := \{x \in E\,;\ Sx = -x\}\,.$$

Montrons que $E = F \oplus G$. Pour $x \in E$, on a

$$x = \frac{1}{2}(x + Sx) + \frac{1}{2}(x - Sx)\ , \tag{3.4}$$

et $\frac{1}{2}(x + Sx) \in F$ et $\frac{1}{2}(x - Sx) \in G$. De plus, par définition, $F \cap G = \{0\}$. La décomposition (3.4) est donc unique, il suit que

$$\frac{1}{2}(x + Sx) = P_F x \text{ et } \frac{1}{2}(x - Sx) = P_G x\,.$$

Donc, on en déduit que $S = P_F - P_G$ et c'est bien la symétrie par rapport à F parallèlement à G. $\square$

3.5 Exercices

Exercice 3.1. Parmi les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, dire lesquelles sont linéaires et lesquelles ne le sont pas :

$$L_1(x,y) = xy\,,\ L_2(x,y) = x + y\,,\ L_3(x,y) = 1 + x\,,\ L_4(x,y) = 3x\,.$$

Exercice 3.2. On considère l'application linéaire L de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$L(1,0,0) = (2,3,2)\,,\; L(0,1,0) = (1,0,1)\,,\; L(0,0,1) = (0,1,0)\,.$$

1. Déterminer l'image de L.
2. Déterminer $L(x,y,z)$ pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
3. Déterminer le noyau de L.

Exercice 3.3. Soit L l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$L(x,y) = (x+y, -x-y, x)\,.$$

1. Montrer que L est linéaire.
2. Montrer que L est injective.
3. L est-elle surjective?

Exercice 3.4. Soit L l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$L(x,y,z) = (x+z, -x+y, y+z)\,.$$

1. Déterminer les vecteurs $V_1 = L(1,0,0)$, $V_2 = L(0,1,0)$ et $V_3 = L(0,0,1)$.
2. La famille $\{V_1, V_2, V_3\}$ est-elle libre?
3. L est-elle surjective?
4. Trouver une base de $\mathrm{Im}(L)$.

Exercice 3.5. Soit l'application $L\,:\,\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$L(x,y,z) = (x+y, x+z, y+z)\,.$$

1. Montrer que L est linéaire.
2. L'application L est-elle un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3.6. Les applications linéaires suivante sont-elles surjectives? Sont-elles injectives?

- $L_1\,:\,\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $L_1(x,y) = (x+y, 2x-y, x+3y)$,
- $L_2\,:\,\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L_2(x,y,z) = (x+y, x+y+z)$,
- $L_3\,:\,\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L_3(x,y,z) = (2x+2y+2z, x+y+z)$.

Exercice 3.7. Soit L l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$L(x,y,z) = (x+y+2z, x+z, x-y)\,.$$

1. Déterminer les vecteurs $V_1 = L(1,0,0)$, $V_2 = L(0,1,0)$ et $V_3 = L(0,0,1)$.
2. La famille $\{V_1, V_2, V_3\}$ est-elle libre?
3. L est-elle surjective?
4. Trouver une base de $\mathrm{Im}(L)$

Exercice 3.8. Soit l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par

$$L(x,y,z) = (2x+y+z, 2x+y-z, x+y)\ .$$

1. Montrer que L est linéaire.
2. Déterminer le noyau de L et en déduire la dimension de l'image de L.
3. Trouver une base de $\mathrm{Im}\, L$.

Exercice 3.9. On considère l'application linéaire L de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par

$$L(x,y,z) = (x+y, y+2z, x+2y+2z)\,.$$

1. Déterminer le noyau de L.
2. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}\,(L)$.
3. Trouver une base de $\mathrm{Im}\,(L)$.

Exercice 3.10. Soit l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par

$$L(x,y) = (0, y-x)\ .$$

1. Montrer que L est linéaire.
2. Déterminer $L \circ L$.
3. En déduire que L est une projection sur une droite que l'on déterminera, parallèlement à une autre droite que l'on déterminera.

Exercice 3.11. Soit l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par

$$L(x,y) = (2x-3y, x-2y)\ .$$

1. Montrer que L est linéaire.
2. Déterminer $L \circ L$.

3. En déduire que L est une symétrie sur une droite que l'on déterminera, parallèlement à une autre droite que l'on déterminera.

Exercice 3.12. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 muni d'une base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Soit f une application linéaire de E dans lui-même telle que

$$f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4\,,\ f(e_2) = e_1 - e_2 + e_3 - e_4\,,$$
$$f(e_3) = -e_1 + e_2 + e_3 - e_4\,,\ f(e_4) = e_1 - e_2 - e_3 + e_4\,.$$

L'application f est-elle un isomorphisme de E?

Exercice 3.13. Soit $E = P_n[\mathbb{R}]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n. On considère l'application L qui à $p \in E$ associe le polynôme $L(p)$ défini par $L(p)(x) = xp'(x)$.

1. Montrer que L est une application linéaire de E dans lui-même.
2. Déterminer le noyau de L.
3. En déduire la dimension de l'image de L.
4. Déterminer l'image de L.

Exercice 3.14. Soit $E = P[\mathbb{R}]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. On considère l'application Φ qui à $p \in E$ associe le polynôme $\Phi(p) = p'$. On admettra que Φ est linéaire de E dans lui-même.

1. Φ est-elle injective?
2. Φ est-elle surjective?

Chapitre 4

Matrices

4.1 Matrice d'une application linéaire

On considère E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\dim E = n$, $\dim F = p$. On considère une base de E

$$\mathcal{B}_E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

et une base de F

$$\mathcal{B}_F = \{f_1, f_2, ..., f_p\}\,.$$

On considère $L \in \mathcal{L}(E, F)$. L'image par L du i-éme vecteur de base e_j est un élément de F et peut donc se décomposer sur la base $\mathcal{B}_F$. On écrit la décomposition de la façon suivante :

$$L(e_j) = a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + ... + a_{pj} f_p\,.$$

On remarque que l'application L est entièrement déterminée par la collection des coefficients $\{a_{ij}\}_{1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq n}$. En effet, si $x \in E$, il se décompose de manière unique sur la base $\mathcal{B}$ sous la forme

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$$

et $L(x)$ s'écrit alors sous la forme

$$L(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j L(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} a_{ij} \lambda_j f_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{p} a_{ij} \lambda_j \right) f_i\,. \tag{4.1}$$

Définition 4.1. *On appelle matrice de L dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, le tableau A de p lignes et n colonnes dans lequel la collection des coefficients a_{ij} est organisée de la façon suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{p1} & a_{p2} & . & . & . & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

On a rangé les coefficients de telle sorte que la j-ème colonne représente les composantes de $L(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.

Exemples. On prendra notamment les exemples les plus simples de projections et de symétries dans $\mathbb{R}^2$ avec les bases canoniques.

4.2 Matrices, produit de matrices

Définition 4.2. *Une matrice A à n lignes et k colonnes (on parlera de matrice $n \times k$) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau de la forme suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2k} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nk} \end{pmatrix},$$

où les coefficients $\{a_{ij}\}$ sont dans $\mathbb{K}$.

Définition 4.3. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on notera $\mathcal{M}_{nk}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à $n \times k$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Cet ensemble est muni d'une addition et d'une multiplication par un scalaire définies comme suit : soit*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2k} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nk} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & . & . & . & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & . & . & . & b_{2k} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ b_{n1} & b_{n2} & . & . & . & b_{nk} \end{pmatrix}$$

deux éléments de $\mathcal{M}_{nk}(\mathbb{K})$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & . & . & . & a_{1k}+b_{1k} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & . & . & . & a_{2k}+b_{2k} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & . & . & . & a_{nk}+b_{nk} \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire qu'on fait la somme coefficients par coefficient, et

$$\lambda.A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & . & . & . & \lambda a_{1k} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & . & . & . & \lambda a_{2k} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & . & . & . & \lambda a_{nk} \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire qu'on multiplie tous les coefficients par λ.

Proposition 4.1. *L'ensemble $\mathcal{M}_{nk}(\mathbb{K})$ muni des deux lois ci-dessus est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \times k$.*

Preuve. Elle est immédiate. On l'admettra. □

On peut définir une autre opération entre matrices : le produit.

Définition 4.4. *On considère $n, k, p \in \mathbb{N}^*$ et deux matrices*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2k} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nk} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nk}(\mathbb{K}), \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & . & . & . & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & . & . & . & b_{2p} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ b_{k1} & b_{k2} & . & . & . & b_{kp} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{kp}(\mathbb{K}).$$

On définit le produit de A et de B comme la matrice $C \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & . & . & . & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & . & . & . & c_{2p} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ c_{n1} & c_{n2} & . & . & . & c_{np} \end{pmatrix},$$

où les coefficients de C sont donnés par

$$c_{ij} = \sum_{m=1}^{k} a_{ik} b_{kj},$$

c'est-à-dire que c_{ij} est donné par le "produit scalaire" de la i-ème ligne de A et de la j-ème colonne de B.

4.3 Lien avec les applications linéaires

Tout d'abord, à toute matrice $n \times k$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, on peut associer une application linéaire dont elle est la matrice.

Proposition 4.2. *Soit $A \in \mathcal{M}_{kn}(\mathbb{K})$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, on considère $\mathcal{B}_E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E, soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension k, $\mathcal{B}_F = \{f_1, f_2, ..., f_k\}$ une base de F. Il existe une unique application linéaire $L \in \mathcal{L}(E, F)$ ayant A pour matrice relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Elle est définie par*

$$Le_j = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} f_i.$$

Preuve. La démonstration est évidente, elle suit de la définition de la matrice d'une application linéaire relativement à un choix de base et du théorème 3.2. □

On effectue maintenant le lien entre une combinaison linéaire d'applications linéaires et la combinaison linéaire des matrices associées.

Proposition 4.3. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}_E$ une base de E, soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension k, $\mathcal{B}_F$ une base de F, soit L_1, L_2 deux applications linéaires de E dans F, soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, soit $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_{kn}(\mathbb{K})$ les matrices de L_1 et L_2 relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Alors la matrice de $\lambda L_1 + \mu L_2$ relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ est $\lambda A_1 + \mu A_2$.*

Preuve. Evidente. □

On va voir que dans le cadre des applications linéaires entre espaces vectoriels de dimension finie, lorsqu'on choisit des bases dans l'espace de départ et dans l'espace d'arrivée, le produit matriciel intervient naturellement pour exprimer l'image d'un vecteur quelconque. De même la matrice de la composée d'applications linéaires sera obtenue en effectuant le produit des matrices de chaque application linéaire.

Proposition 4.4. *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, on note n la dimension de E et p la dimension de F. On considère $\mathcal{B}_E = \{e_1, ..., e_n\}$ une base de E et $\mathcal{B}_F = \{f_1, ..., f_p\}$ une base de F. Soit $L \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in E$. On peut écrire le vecteur v dans la base $\mathcal{B}_F$ comme le vecteur colonne*

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ . \\ v_n \end{pmatrix},$$

ce qui signifie que V s'écrit

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + ... + v_n e_n\,.$$

On note A la matrice de L dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{p1} & a_{p2} & . & . & . & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

On appelle $w = L(v)$ l'image par L de v. Son expression dans la base $\mathcal{B}_F$ sera notée

$$w = w_1 e_1 + w_2 e_2 + ... + w_n e_n$$

et représentée par le vecteur colonne

$$W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ . \\ . \\ . \\ w_n \end{pmatrix} .$$

Alors W est donné par le produit matriciel de A par V, c'est-à-dire $W = AV$.

Preuve. On rappelle la signification de la matrice de L : la j-ème colonne de A est le vecteur des composantes de $L(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$, c'est-à-dire

$$L(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i \,.$$

On écrit maintenant $L(v)$:

$$\begin{aligned} L(v) &= \sum_{j=1}^{n} v_j L(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \right) f_i \end{aligned}$$

et on vérifie que AV est une matrice $p \times 1$, c'est-à-dire un vecteur colonne à p composantes, et que la i-ème composante est bien $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$. $\square$

Proposition 4.5. *On considère E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $n = \dim E$, $k = \dim F$, $p = \dim G$, $\mathcal{B}_E$ une base de E, $\mathcal{B}_F$ une base de F, $\mathcal{B}_G$ une base de G. Soit $L_1 \in \mathcal{L}(E, F)$, $L_2 \in \mathcal{L}(F, G)$, on note $A \in \mathcal{M}_{kn}(\mathbb{K})$ la matrice de L_1 dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ et $B \in \mathcal{M}_{pk}(\mathbb{K})$ la matrice de L_2 dans les bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$. Alors la matrice $C \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$ de $L_2 \circ L_1$ dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_G$ est donnée par le produit matriciel $C = BA$.*

Preuve. On note $\{e_1, ..., e_n\}$ les vecteurs de la base $\mathcal{B}_E$, $\{f_1, ..., f_k\}$ les vecteurs de la base $\mathcal{B}_F$ et $\{g_1, ..., g_p\}$ les vecteurs de la base $\mathcal{B}_G$. Si on note C la matrice de $L_2 \circ L_1$ dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_G$, le coefficient C_{ij} est le coefficient selon g_i de la décomposition sur la base $\mathcal{B}_g$ du vecteur $L_2 \circ L_1(e_j)$. Ecrivons ce vecteur en détails :

$$\begin{aligned}
L_2 \circ L_1(e_j) &= L_2\left(L_1(e_j)\right) \\
&= L_2\left(\sum_{l=1}^{k} a_{lj} f_l\right) \\
&= \sum_{l=1}^{k} a_{lj} L_2(f_l) \\
&= \sum_{l=1}^{k} a_{lj} \sum_{i=1}^{p} b_{il} g_i \\
&= \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{l=1}^{k} b_{il} a_{lj}\right) g_i
\end{aligned}$$

et on voit que le coefficient devant g_i est bien le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne de la matrice BA. □

4.4 Changement de base

On considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et deux bases de E

$$\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2, ..., e_n\}\,,\ \mathcal{B}_2 = \{f_1, f_2, ..., f_n\}\,.$$

On peut décomposer les vecteurs de la base $\mathcal{B}_2$ sur la base $\mathcal{B}_1$: on note

$$\begin{aligned}
f_1 &= p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + ... + p_{n1}e_n\,, \\
f_2 &= p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + ... + p_{n2}e_n\,, \\
&\quad ... \qquad (4.2) \\
f_n &= p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + ... + p_{nn}e_n\,. \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Considérons maintenant un vecteur $v \in E$ et sa décomposition dans la base $\mathcal{B}_2$:

$$v = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + ... + \lambda_n f_n\,.$$

En utilisant (4.3), on peut en déduire la décomposition de v sur la base $\mathcal{B}_1$:

$$\begin{aligned}
v &= \lambda_1\left(p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + ... + p_{n1}e_n\right) \\
&\quad +\lambda_2\left(p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + ... + p_{n2}e_n\right) \\
&\quad +... + \lambda_n\left(p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + ... + p_{nn}e_n\right) \\
&= \left(p_{11}\lambda_1 + p_{12}\lambda_2 + ... + p_{1n}\lambda_n\right)e_1 \\
&\quad +\left(p_{21}\lambda_1 + p_{22}\lambda_2 + ... + p_{2n}\lambda_n\right)e_2 \\
&\quad +... + \left(p_{n1}\lambda_1 + p_{n2}\lambda_2 + ... + p_{nn}\lambda_n\right)e_n\,. \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Si maintenant on définit la matrice

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & . & . & . & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & . & . & . & p_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ p_{n1} & p_{n2} & . & . & . & p_{nn} \end{pmatrix}$$

et les vecteurs colonne

$$W = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ . \\ . \\ . \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

et

$$V = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ . \\ . \\ . \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

où

$$v = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + ... + \mu_n e_n \,,$$

alors (4.4) peut s'exprimer sous forme de produit de matrice de la façon suivante :

$$V = PW \,.$$

On énonce ce résultat sous forme d'un théorème avec des notations plus explicites :

Théorème 4.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n sur lequel on considère deux bases*

$$\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2, ..., e_n\} \text{ et } \mathcal{B}_2 = \{f_1, f_2, ..., f_n\} \,.$$

On définit la matrice $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ contenant les composantes des vecteurs de la base $\mathcal{B}_2$ dans la base $\mathcal{B}_1$ rangées en colonne :

$$P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & . & . & . & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & . & . & . & p_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ p_{n1} & p_{n2} & . & . & . & p_{nn} \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} f_1 &= p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + ... + p_{n1}e_n \,, \\ f_2 &= p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + ... + p_{n2}e_n \,, \\ & ... \\ f_n &= p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + ... + p_{nn}e_n \,. \end{aligned}$$

Soit $v \in E$, le vecteur colonne $V_{\mathcal{B}_1}$ de ses composantes dans la base $\mathcal{B}_1$ s'obtient en fonction du vecteur colonne $V_{\mathcal{B}_2}$ de ses composantes dans la base $\mathcal{B}_2$ par le produit matriciel :

$$V_{\mathcal{B}_1} = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} V_{\mathcal{B}_2} \,.$$

Définition 4.5. *La matrice $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ ci-dessus s'appelle la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_2$ à la base $\mathcal{B}_1$.*

Remarque 4.1. Noter que l'ordre des bases dans la notation est naturel.

La proposition suivante est une conséquence de la définition d'une matrice de passage.

Proposition 4.6. *Si on dispose de trois bases $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ sur E, on a les identités*

$$P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3} = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3} \,.$$

En particulier, il suit que

$$P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} = I_n \text{ et } P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = I_n$$

où I_n est la "matrice identité" d'ordre n

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{pmatrix} .$$

Lorsqu'on applique la matrice identité à un vecteur (par produit matriciel avec le vecteur colonne) le vecteur reste inchangé.

Ce qui précède a une application directe au calcul de la matrice d'une application linéaire lorsqu'on change les bases dans les espaces de départ et d'arrivée.

Théorème 4.2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension k. On considère deux bases de E*

$$\mathcal{B}_E^1 = \{e_1, e_2, ..., e_n\} \,, \; \mathcal{B}_E^2 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$$

et deux bases de F

$$\mathcal{B}_F^1 = \{f_1, f_2, ..., f_k\}\,,\ \mathcal{B}_F^2 = \{w_1, w_2, ..., w_k\}\,.$$

Soit $L \in \mathcal{L}(E,F)$, on considère $A \in \mathcal{M}_{kn}(\mathbb{K})$ la matrice de L relativement aux bases $\mathcal{B}_{E1}$ et $\mathcal{B}_{F1}$ et $B \in \mathcal{M}_{kn}(\mathbb{K})$ la matrice de L relativement aux bases $\mathcal{B}_{E2}$ et $\mathcal{B}_{F2}$. Alors on a la relation suivante

$$B = P_{\mathcal{B}_F^2,\mathcal{B}_F^1} A P_{\mathcal{B}_E^1,\mathcal{B}_E^2}\,.$$

Remarque 4.2. Une façon plus lourde d'écrire cette relation mais qui a un avantage du point de vue mnémotechnique est la suivante : on écrit

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F^1,\mathcal{B}_E^1}(L)\,,\ B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F^2,\mathcal{B}_E^2}(L)\,,$$

pour "matrice de L relativement aux bases etc...". On a alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F^2,\mathcal{B}_E^2}(L) = P_{\mathcal{B}_F^2,\mathcal{B}_F^1}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F^1,\mathcal{B}_E^1}(L)\right) P_{\mathcal{B}_E^1,\mathcal{B}_E^2}$$

et on voit que les bases se suivent dans l'écriture dans un ordre logique.

On a un résultat évident mais important.

Proposition 4.7. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $n \in \mathbb{N}^*$ et $L \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et A la matrice de L dans la base $\mathcal{B}$, i.e. $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L)$. Alors $A = I_n$ si et seulement si $L = \mathrm{Id}_E$.*

4.5 Exercices

Exercice 4.1. On considère les applications suivantes :

$$\begin{array}{rl} L_1\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & ,\quad L_1(x,y) = (0, y-x)\,; \\ L_2\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & ,\quad L_2(x,y) = (2x-3y, x-2y)\,; \\ L_3\ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n & ,\quad L_3 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}\,; \\ L_4\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 & ,\quad L_4(x,y) = (x-y, y-x, 2x-4y)\,. \end{array}$$

Déterminer leurs matrices dans les bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée.

Exercice 4.2. Soit $A \in \mathcal{M}_{23}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{32}(\mathbb{R})$ données par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\,,\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Calculer AB et BA.

Exercice 4.3. On considère l'application linéaire L_1 de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ et l'application linéaire L_2 de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définies par :

$$L_1(x,y,z) = (x-2y+z, -x+2y-z, x-2y+z)\,,\ L_2(x,y,z) = (x+y, x-z, y+z)\,.$$

On munit $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ de leurs bases canoniques.

1. Déterminer la matrice de L_1.
2. Déterminer la matrice de L_2.
3. Déterminer la matrice de $L_2 \circ L_1$.
4. Déterminer la matrice de $L_1 \circ L_2$.

Exercice 4.4. On considère $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (c'est-à-dire que $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$) et $\tilde{\mathcal{B}}_1 = \{f_1, f_2, f_3\}$ la base de $\mathbb{R}^3$ définie par $f_1 = (1,2,1)$, $f_2 = (1,-1,0)$, $f_3 = (1,0,0)$.

1. Ecrire la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_1,\tilde{\mathcal{B}}_1}$.
2. Exprimer e_1 en fonction de f_3, puis exprimer e_2 en fonction de f_3 et f_2. Enfin, exprimer e_1 en fonction de f_1, f_2 et f_3.
3. En déduire la matrices de passage $P_{\tilde{\mathcal{B}}_1,\mathcal{B}_1}$.
4. Soit le vecteur $V = (1,2,3)$. Déterminer ses composantes dans la base $\tilde{\mathcal{B}}_1$.
5. Soit l'application linéaire L de $\mathbb{R}^3$ dans R^2 définie par

$$L(x,y,z) = (x-y, x+y+z)\,.$$

   On note $\mathcal{B}_2 = \{g_1, g_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire $g_1 = (1,0)$, $g_2 = (0,1)$.

   (a) Déterminer la matrice de L de la base $\mathcal{B}_1$ dans la base $\mathcal{B}_2$.
   (b) Déterminer la matrice de L de la base $\tilde{\mathcal{B}}_1$ dans la base $\mathcal{B}_2$.

Exercice 4.5. On considère l'application linéaire L_1 de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et l'application linéaire L_2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définies par :

$$L_1(x,y,z) = (x-2y, 3x-y+z)\,,\ L_2(x,y) = (x+y, x+2y, 3y)\,.$$

1. Déterminer la matrice de L_1 dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer la matrice de L_2 dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice de $L_2 \circ L_1$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. Calculer $L_2 \circ L_1(x,y,z)$.

Exercice 4.6. On considère $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$) et $\mathcal{B}_2 = \{f_1, f_2\}$ la base de $\mathbb{R}^2$ définie par $f_1 = (1,2)$, $f_2 = (1,-1)$.

1. Déterminer les matrices de passage $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ et $P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}$.
2. Soit le vecteur $V = (2,3)$. Déterminer ses composantes dans la base $\mathcal{B}_2$.
3. Soit l'application linéaire L de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par
$$L(x,y) = (x+y, x-y)\,.$$
   (a) Déterminer la matrice de L dans la base $\mathcal{B}_1$.
   (b) Déterminer la matrice de L dans la base $\mathcal{B}_2$.

Exercice 4.7. Soit l'application $L\,:\,\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par
$$L(x,y,z) = (x+3z, 2x+2y+z, 4x+y+2z)\,.$$
On admettra que L est linéaire.

1. Déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L)$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. L'application L est-elle un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
3. On considère la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$
$$\mathcal{F} = \{(1,2,4),(0,2,1),(3,1,2)\}\,.$$
En utilisant la question précédente, déterminer si $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4.8. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = \{e_1\,,\ e_2\,,\ e_3\}$ une base de E. Soit F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et $\mathcal{B}' = \{f_1\,,\ f_2\}$ une base de F. Soit $L_1 \in \mathcal{L}(E,F)$ définie par $L_1(xe_1+ye_2+ze_3) = (x+y+z)f_1 + (x+z)f_2$ et soit $L_2 \in \mathcal{L}(F,E)$ définie par $L_2(af_1+bf_2) = (a+2b)e_1 + (a-b)e_2 + be_3$.

1. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(L_1)$.
2. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(L_2)$.
3. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L_2 \circ L_1)$.

Chapitre 5

Déterminant et valeurs propres

Dans tout ce dernier chapitre, on se place dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ et on va étudier certaines propriétés des applications linéaires de E dans lui-même (les endomorphismes de E).

5.1 Valeurs propres, vecteurs propres

Définition 5.1. *Soit $L \in \mathcal{L}(E)$. On dira que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de L s'il existe $v \in E$, $v \neq 0$ tel que $L(v) = \lambda v$. Un tel vecteur v est appelé vecteur propre de L associé à λ.*

Proposition 5.1. *Soit $L \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. L'ensemble des vecteurs propres de L associés à λ (union avec $\{0\}$) est* $\operatorname{Ker}(\lambda \operatorname{Id} - L)$*, c'est donc un sous-espace vectoriel de E.*

Preuve. Il suffit de voir qu'effectivement l'ensemble des vecteurs propres de L associés à λ est $\operatorname{Ker}(\lambda \operatorname{Id} - L)$: c'est évident car

$$L(v) = \lambda v \Leftrightarrow L(v) = \lambda \mathrm{Id}(v) \Leftrightarrow (\lambda \mathrm{Id} - L)(v) = 0. \quad \square$$

On en déduit une autre formulation de la définition de valeur propre :

Corollaire 5.1. *Soit $L \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors λ est valeur propre de L si et seulement si* $\operatorname{Ker}(\lambda \operatorname{Id} - L) \neq \{0\}$.

Définition 5.2. $\operatorname{Ker}(\lambda \operatorname{Id} - L)$ *est appelé le sous-espace propre associé à λ. L'ensemble des valeurs propres de L s'appelle le spectre de L.*

Remarque 5.1. Lorsqu'on considère la notion de valeur propre, alors il vaut bien mieux avoir $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut avoir des endomorphismes n'admettant pas de valeur propre réelle, comme par exemple l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $L(x, y) = (y, -x)$. Si on cherche à résoudre $L(x, y) = \lambda(x, y)$, on peut faire le petit calcul suivant :

$$L(L(x, y)) = L(\lambda(x, y)) = \lambda L(x, y) = \lambda^2 L(x, y)$$

mais d'autre part
$$L(L(x,y)) = L(y,-x) = (-x,-y)\,.$$
On se retrouve donc avec $\lambda^2 = -1$ (si (x,y) est un vecteur propre associé à λ, on rappelle que $(x,y) \neq (0,0)$). Donc L n'a pas de valeurs propres réelles, en revanche i et $-i$ sont bien valeurs propres. On aura donc toujours intérêt à considérer que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

La valeur propre $\lambda = 0$ joue un rôle particulier.

Proposition 5.2. *Soit $L \in \mathcal{L}(E)$, alors L est un isomorphisme de E si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de L.*

Preuve. On a vu dans le chapitre précédent que L est un isomorphisme si et seulement si L est injective, mais aussi que L est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} L = \{0\}$ ce qui est bien équivalent à dire que 0 n'est pas valeur propre de L. □

5.2 Déterminant

5.2.1 Calcul

Le déterminant est une opération qui s'applique aux matrices $n \times n$. On commence par le définir pour les matrices 2×2, puis on l'étend de proche en proche aux matrices $n \times n$.

Définition 5.3 (Déterminant 2×2). *Soit*
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{K})\,.$$
Le déterminant de A, noté $\det A$ *ou encore*
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
est le nombre
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,.$$

Le déterminant d'une matrice $n \times n$ est maintenant défini en se ramenant à des calculs de déterminants de matrices $(n-1) \times (n-1)$. On descend ainsi dans la taille des matrices jusqu'à ne plus avoir que des déterminants de matrices 2×2 qu'on sait calculer par la définition ci-dessus.

Définition 5.4. *Soit*
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})\,.$$

Pour $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, on notera A^{ij} la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en enlevant de A la i-ème ligne et la j-ème colonne. On a alors les deux formules suivantes pour définir $\det A$ *:*

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A^{ij} \,(\textit{développement par rapport à la } j\textit{-ème colonne})\,, \\
\det A &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A^{ij} \,(\textit{développement par rapport à la } i\textit{-ème ligne})\,.
\end{aligned}$$

A noter que pour les matrices 3×3, on a encore une formule simple similaire aux matrices 2×2, ce n'est plus le cas pour $n \geq 4$.

Proposition 5.3 (Règle de Sarrus)**.** *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{K})\,.$$

Alors le déterminant de A s'obtient en écrivant le tableau suivant, obtenu en ajoutant sous A ses deux premières lignes

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

et en faisant la somme des produits des termes sur les diagonales descendantes moins la somme des produits des termes sur les diagonales montantes :

$$\begin{aligned}
\det A &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\
&\quad - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}\,.
\end{aligned}$$

5.2.2 Propriétés

Un première propriété évidente :

Proposition 5.4. $\det I_n = 1$ *(on rappelle que I_n est la matrice identité d'ordre n).*

On constate facilement les propriétés importantes suivantes :

Proposition 5.5. *Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$:*

1. *On change le déterminant de A en son opposé si on échange deux lignes de A ou si on échange deux colonnes de A.*

2. *En conséquence, si deux vecteurs colonne de A sont colinéaires, ou si deux vecteurs ligne de A sont colinéaires, le déterminant de A est nul.*

3. *Le déterminant est linéaire par rapport à chaque vecteur colonne de A et par rapport à chaque vecteur ligne de A.*

4. *Une conséquence importante des points 1. et 3. : si on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes, on ne change pas le déterminant. Même chose si on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes.*

Le résultat suivant se déduit de la proposition précédente et de la définition du déterminant :

Théorème 5.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\det A \neq 0$ *;*

(ii) les vecteurs colonne de A forment une base de $\mathbb{K}^n$;

(iii) les vecteurs ligne de A forment une base de $\mathbb{K}^n$.

Ceci a une conséquence immédiate pour les matrices d'applications linéaires :

Théorème 5.2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, soit $L \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et A la matrice de L dans la base $\mathcal{B}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) L est un isomorphisme ;

(ii) les vecteurs colonne de A sont les composantes dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs d'une base de E ;

(ii) les vecteurs ligne de A sont les composantes dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs d'une base de E ;

(ii) $\det A \neq 0$.

5.3 Déterminant et valeurs propres

Définition 5.5 (Polynôme caractéristique)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, on appelle polynôme caractéristique de A le polynôme de degré n suivant :*

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) \ .$$

Si la matrice A s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix},$$

la matrice $\lambda I_n - A$ s'écrit

$$\lambda I_n - A = \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & . & . & . & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & . & . & . & -a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ -a_{n1} & -a_{n2} & . & . & . & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant est une conséquence des propriétés du déterminant :

Théorème 5.3. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, soit $L \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et A la matrice de L dans la base $\mathcal{B}$. Soit également $\lambda \in \mathbb{K}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) λ *est une valeur propre de L ;*

(ii) $\chi_A(\lambda) = 0$.

5.4 Inversion de matrices

Définition 5.6. *Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que A est inversible si il existe $B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ telle que*

$$AB = BA = I_n$$

où I_n est la matrice identité d'ordre n. La matrice B est alors appelée l'inverse de A et notée A^{-1}.

Proposition 5.6. *Si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ est inversible, alors son inverse est unique.*

Preuve. C'est un résultat qui a été vu au premier semestre dans un cadre très général et qui nécessite simplement que le produit soit associatif. □

Proposition 5.7. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, soit $L \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et A la matrice de L dans la base $\mathcal{B}$.*

1. *Supposons que A soit inversible. On note L_1 l'application linéaire de E dans lui-même dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A^{-1}. Alors $L_1 \circ L = L \circ L_1 = \mathrm{Id}$ et L est donc bijective.*

2. *Réciproquement, si L est bijective, alors A est inversible.*

Preuve. La matrice dans la base $\mathcal{B}$ de $L_1 \circ L$ est $A^{-1}A = I_n$ et la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de $L \circ L_1$ est $AA^{-1} = I_n$. La proposition suit alors de la Proposition 4.7.

Ceci a deux conséquences importantes.

Théorème 5.4. *Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, $n \in \mathbb{N}^*$. Alors A est inversible si et seulement si* $\det A \neq 0$.

Pour la deuxième conséquence, on commence par définir le rang d'une matrice.

Définition 5.7. *Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, on appelle rang de A et on note* $\mathrm{rg}\,(A)$, *la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par les vecteurs colonne de A (ou par les vecteurs ligne, c'est la même dimension).*

Théorème 5.5. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, soit $L \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et A la matrice de L dans la base $\mathcal{B}$. Alors :*

1. $\mathrm{rg}\,(A) = \dim(\mathrm{Im}(L))$ *;*

2. *L est bijective si et seulement si* $\mathrm{rg}\,(A) = n$.

Remarque 5.2. On a des résultats analogues pour une application linéaire entre deux espaces vectoriels ayant même dimension finie. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = \dim F = n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F. Soit $L \in \mathcal{L}(E\,;\;F)$. On considère

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(L)$$

la matrice de L dans les bases ci-dessus. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. L est bijective ;

2. A est inversible ;

3. $\det A \neq 0$;

4. $\mathrm{rg}\,(A) = n$.

Dans ce cas,

$$A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(L^{-1})$$

et

$$L \circ L^{-1} = \mathrm{Id}_F\,,\;\; L^{-1} \circ L = \mathrm{Id}_E\,.$$

Calcul de l'inverse d'une matrice inversible.

- L'inverse d'une matrice inversible peut se calculer à l'aide des déterminants par la méthode dite de Cramer.

  Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ une matrice inversible. On note C la comatrice de A définie par
  $$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$
  où la matrice A_{ij} est la matrice $(n-1)\times(n-1)$ obtenue en enlevant de A sa i-ème ligne et sa j-ème colonne. Alors
  $$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^{\mathrm{t}}C\,.$$
  Cette méthode est longue et le nombre de calculs augmente très rapidement quand la dimension de la matrice augmente.

  Cette méthode appliquée à une matrice de taille 2×2 donne la méthode bien connue pour calculer son inverse : soit
  $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{K})$$
  une matrice inversible, alors son inverse est donné par
  $$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

- Une méthode beaucoup plus légère est donnée par l'algorithme de Gauss. On commence par mettre côte à côte dans un tableau la matrice A et la matrice identité d'ordre n :
  $$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{array}\right)$$
  puis on utilise l'algorithme de Gauss pour transformer la matrice A qui est à gauche du tableau, en la matrice identité d'ordre n, en manipulant les lignes en entier. La matrice qu'on obtient dans la partie droite du tableau est alors A^{-1}. On traitera la méthode sur un exemple en cours.

5.5 Exercices

Exercice 5.1. Soit les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer leurs déterminants.

Exercice 5.2. Soit l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par

$$f(x,y,z) = (3x+z, 3y, x+3z)\,.$$

1. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés.

2. L'application f est-elle bijective?

3. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Exercice 5.3. Diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie et f un endomorphisme de E. On suppose que f n'admet aucun vecteur propre. Montrer que f est bijective. La réciproque est-elle vraie?

Exercice 5.5. Trouver un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ n'admettant aucun vecteur propre.

Exercice 5.6. Peut-on trouver un endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ n'admettant aucun vecteur propre?

Exercice 5.7. Peut-on trouver un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ n'admettant aucun vecteur propre?

Exercice 5.8. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et f et g des endomorphismes de E.

1. On suppose que E est de dimension finie et que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. Montrer que f et g sont bijectives.

2. Cette propriété reste-t-elle vraie si E est de dimension infinie?

Exercice 5.9. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même admettant pour valeurs propres 1 et -1. Déterminer $f \circ f$.

Exercice 5.10. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & a^2 & 0 \\ -1 & 0 & a^2 \end{pmatrix},\ a \neq 0\,,$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.11. Inverser la matrice suivante par la méthode de Gauss :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$