Intégration

Jean-Philippe NICOLAS
Département de Mathématiques,
Université de Brest, 6 avenue Victor Le Gorgeu,
29200 Brest.
Bureau H109, Tel. 02 98 01 67 61,
email : Jean-Philippe.Nicolas@univ-brest.fr

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Ce cours est consacré à la théorie de l'intégration de Lebesgue. C'est une théorie du tout début du XXe siècle et qui a largement supplanté la théorie de Riemann qui datait du millieu du XIXe siècle. La théorie de Riemann est relativement simple à définir et à comprendre, mais son cadre d'application est très étroit, en particulier en ce qui concerne le calcul des intégrales de volume qui nécessite des fonctions continues. Les passages à la limite sous les signe d'intégration sont aussi très malaisés.

La théorie de Lebesgue est basée sur une théorie abstraite de la mesure, un peu plus longue et difficile à définir, mais qui donne une théorie de l'intégration extrèmement puissante et très aisée à manipuler. D'une certaine manière, la différence entre l'intégrale de Riemann et celle de Lebesgue est juste que Riemann a choisi de découper le domaine de la variable alors que Lebesgue découpe l'ensemble des valeurs de la fonction, mais cette "petite" différence a des conséquences très profondes.

Chapitre 2

Quelques rappels

2.1 Intégrale de Riemann des fonctions en escalier

Soit $-\infty < a < b < +\infty$, une fonction en escalier est une fonction f qui est constante sur les intervalles d'une subdivision de $[a, b]$: $a = a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_n = b$,

$$f(x) = \alpha_k \text{ pour } x \in]a_k, a_{k+1}[\,,$$

où $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$ sont des constantes fixées dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A noter que la fonction f n'est pas définie aux points a_k, $k = 0, ..., n$. On peut ou non lui donner des valeurs en ces points, cela n'a pas d'importance.

L'intégrale de f entre a et b est définie par

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (a_{k+1} - a_k)\,.$$

2.2 Intégrale de Riemann des fonctions continues

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors l'intégrale de Riemann de f sur $[a, b]$ est définie comme limite des sommes de Riemann : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la subdivision de $[a, b]$

$$a_k := a + k\frac{b-a}{n}\,,\ k = 0, 1, ..., n\,;$$

et les deux suites

$$u_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{b-a}{n} \min_{[a_k, a_{k+1}]} f(x)\,,\ v_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{b-a}{n} \max_{[a_k, a_{k+1}]} f(x)\,;$$

la suite u_n est croissante, la suite v_n décroissante, $u_n \leq v_n$, donc les deux suites convergent, de plus leurs limites sont égales et définissent l'intégrale de f entre a et b notée

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Cette définition s'étend naturellement aux fonctions continues à valeurs complexes en décomposant en partie réelle et partie imaginaire.

Le résultat essentiel permettant de calculer une telle intégrale est que si f est continue sur $[a, b]$ et si F est une primitive de f sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,.$$

2.3 Intégrales généralisées type

On rappelle que les intégrales généralisées sont définies par passage à la limite de l'intégrale, par exemple

$$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x := \lim_{R\to+\infty} \int_1^R f(x)\mathrm{d}x \text{ si la limite existe.}$$

Les exemples fondamentaux sont les suivants : soit $a > 0$ donné,

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \quad &\text{converge} \Leftrightarrow \quad \alpha < 1\,, \\ \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \quad &\text{converge} \Leftrightarrow \quad \alpha > 1\,. \end{aligned}$$

En particulier, pour $\alpha = 1$, les deux intégrales sont divergentes.

On peut résumer ces résultats de la façon suivante :

- $1/x^\alpha$ est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $\alpha < 1$;
- $1/x^\alpha$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$;
- $1/x$ n'est intégrable ni au voisinage de 0 ni au voisinage de $+\infty$.

2.4 Formules ensemblistes

Soit X un ensemble, on note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de toutes les parties de X. Soit A et B deux éléments de $\mathcal{P}(X)$, on définit :

- la différence de A et B
$$A \setminus B := \{x \in A\,;\ x \notin B\}\,;$$
- la différence symmétrique de A et B
$$A\Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)\,;$$
- le complémentaire de A
$$A^c := \{x \in X\,;\ x \notin A\} = X \setminus A\,.$$

Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{P}(X)$ on définit sa limite inférieure

$$\liminf_{n\to+\infty} A_n := \bigcup_{n\in N}\bigcap_{k\geq n} A_k$$

et sa limite supérieure

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n := \bigcap_{n\in N}\bigcup_{k\geq n} A_k\,.$$

On a clairement

$$\liminf_{n\to+\infty} A_n \subset \limsup_{n\to+\infty} A_n$$

et on parlera de

$$\lim_{n\to+\infty} A_n$$

lorsque

$$\liminf_{n\to+\infty} A_n = \limsup_{n\to+\infty} A_n\,.$$

Définition 2.1 (Fonction indicatrice d'une partie)**.** *Soit $A \in \mathcal{P}(X)$ (c'est-à-dire soit $A \subset X$), on appelle fonction indicatrice de A et on note $\mathbf{1}_A$ la fonction à valeurs dans $\{0,1\}$ définie sur X par*

$$f(x) = \left|\begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in A\,, \\ 0 \text{ si } x \notin A\,. \end{array}\right.$$

On a les propriétés évidentes suivantes :

Proposition 2.1. *Soit $A, B \in \mathcal{P}(X)$,*

$$\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A.\mathbf{1}_B$$

et

$$\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_{A\Delta B} + \mathbf{1}_{A\cap B}\,.$$

Définition 2.2. *Un ensemble X est dit dénombrable si on peut compter ses éléments par des entiers, c'est-à-dire s'il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur X. Cela ne signifie pas que X soit infini. Dans le cas où X est infini et dénombrable, alors on peut toujours trouver une bijection de $\mathbb{N}$ sur X.*

Proposition 2.2. *$\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. En revanche $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

Soit X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application. Soit $A \subset X$ et $B \subset Y$, on définit

- l'image réciproque de B par f qui est la partie de X

$$f^{-1}(B) := \{x \in X\,;\; f(x) \in B\}\,,$$

- l'image directe de A par f qui est la partie de Y

$$f(A) := \{f(x)\,;\ x \in X\}\,.$$

Si on considère une famille de parties de X : $\{A_i\}_{i\in I}$ et une famille de parties de Y : $\{B_j\}_{j\in J}$, où I et J sont des ensembles quelconques, on a les formules dites de Hausdorff :

$$f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)\,,$$
$$f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)\,,\ \text{avec égalité si } f \text{ est injective,}$$
$$f^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)\,,$$
$$f^{-1}(\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)\,,$$

et pour $B \subset Y$ on a

$$f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c\,.$$

Lorsque f est bijective, on a bien sûr

$$f^{-1}(B) = \{f^{-1}(y)\,;\ y \in B\}\,.$$

Chapitre 3

Mesures

3.1 Tribus, tribu Borélienne

3.1.1 Définitions

On considère un ensemble X, on va définir des sous-ensembles particuliers de $\mathcal{P}(X)$ appelés algèbres et σ-algèbres (ou tribus).

Définition 3.1 (Algèbre de parties de X)**.** *Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(X)$ (c'est-à-dire un ensemble de parties de X mais qui ne contient pas nécessairement toutes les parties de X). On dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre si :*

1. *$\mathcal{A}$ admet au moins un élément ;*
2. *quels que soient $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cup B \in \mathcal{A}$ (stabilité par réunion) ;*
3. *quel que soit $A \in \mathcal{A}$, $A^c \in \mathcal{A}$ (stabilité par passage au complémentaire).*

Remarque 3.1. La définition d'une algèbre de parties de X a des conséquences utiles qui peuvent notamment permettre de vérifier plus facilement si un ensemble de parties de X est ou non une algèbre. La démonstration des propriétés suivantes est laissée en exercice pour les travaux dirigés.

- Si $\mathcal{A}$ est une algèbre, alors $\emptyset \in \mathcal{A}$ et $X \in \mathcal{A}$. Lorsqu'on veut vérifier qu'un ensemble de parties de X est une algèbre, pour vérifier la première propriété de la définition on cherchera à montrer que $\emptyset \in \mathcal{A}$ ou que $X \in \mathcal{A}$.
- Si $\mathcal{A}$ est une algèbre alors $\mathcal{A}$ est stable par réunion finie et par intersection finie, c'est-à-dire que quels que soient $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}$, on a

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \in \mathcal{A} \text{ et } A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n \in \mathcal{A}\,.$$

- Si $\mathcal{A}$ est une algèbre et si $A, B \in \mathcal{A}$, alors $A \setminus B \in \mathcal{A}$ et $A \Delta B \in \mathcal{A}$.

Donnons quelques exemples d'algèbres de parties d'un ensemble X.

1. $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$;
2. $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$:
3. Dans $X = [0,1]$, l'ensemble des réunions finies d'intervalles ouverts, fermés et semi-ouverts forme une algèbre, de même dans $X = [0,1[$ ou encore $X =]0,1[$ ou $X =]0,1]$.
4. Dans $X = [0,1]^n$, ou $[0,1[^n$ ou $]0,1]^n$ ou $]0,1[^n$, l'ensemble des réunions finies de pavés
$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n)\,,$$
(où le fait de noter les intervalles avec des parenthèses signifie qu'on autorise les cas d'intervalles ouverts, fermés ou semi-ouverts) est une algèbre.

Définition 3.2 (Tribu ou σ-algèbre)**.** *Une σ-algèbre, ou tribu, est une algèbre stable par réunion dénombrable.*

Remarque 3.2. Par passage au complémentaire, il est clair qu'une tribu est également stable par intersection dénombrable. D'autre part, si $\mathcal{T}$ est une tribu et si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable de parties de $\mathcal{T}$, alors
$$\liminf_{n\to+\infty} A_n \in \mathcal{T} \text{ et } \limsup_{n\to+\infty} A_n \in \mathcal{T}\,.$$

Théorème 3.1 (Tribu engendrée par un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$)**.** *Soit $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$, il existe une plus petite tribu contenant $\mathcal{M}$ (appelée tribu engendrée par $\mathcal{M}$ et notée $\sigma(\mathcal{M})$), c'est l'intersection de toutes le tribus contenant $\mathcal{M}$.*

Preuve. Soit $\sigma(\mathcal{M})$ l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{M}$. Pour toute tribu $\mathcal{T}$ contenant $\mathcal{M}$, on a $\emptyset \in \mathcal{T}$ et donc $\emptyset \in \sigma(\mathcal{M})$. Les autres propriétés d'une tribu sont vérifiées par toutes les tribus contenant $\mathcal{M}$ et donc par $\sigma(\mathcal{M})$. $\square$

Exemples de tribus :

- $\mathcal{P}(X)$ est une tribu, c'est bien sûr la plus grande tribu dans $\mathcal{P}(X)$;
- $\{\emptyset, X\}$ est une tribu, c'est la plus petite tribu dans $\mathcal{P}(X)$;
- soit $A \subset X$, $\{\emptyset, A, A^c, X\}$ est une tribu, c'est la tribu engendrée par A, notée $\sigma(\{A\})$.

3.1.2 Tribu borélienne

Une tribu essentielle dans la théorie de l'intégation de Lebesgue est celle des Boréliens sur un espace topologique. Le nom vient d'Emile Borel, mathématicien français 1871-1956, très engagé et actif politiquement, il a fondé l'Institut Henri Poincaré, a participé à la création de l'Organisation d'Etat de la Recherche qui est devenue le CNRS, et il a fait adopter par le parlement le “sou des laboratoires”, prélevé sur les bénéfices industriels dans le but d'équiper les laboratoires! Commençons par rappeler la notion d'espace topologique.

Définition 3.3 (Espace topologique)**.** *On appelle espace topologique un ensemble E muni d'une famille $\mathcal{O}$ de sous-ensembles de E, appelés les ouverts de E, et qui a les propriétés suivantes :*

1. *$\mathcal{O}$ est stable par intersection finie ;*
2. *$\mathcal{O}$ est stable par réunion quelconque ;*
3. *$\mathcal{O}$ contient $\emptyset$ et E.*

Définition 3.4 (Tribu des boréliens)**.** *Soit X un espace topologique, la tribu borélienne de X, aussi appelée tribu des boréliens de X, est la tribu engendrée par les ouverts de X. On la note $\mathcal{B}(X)$. Une partie de X qui appartient à $\mathcal{B}(X)$ est appelée une partie borélienne de X ou simplement un borélien de X.*

Remarque 3.3. A noter que la tribu $\mathcal{B}(X)$ est de façon évidente aussi la tribu engendrée par les fermés de X.

Dans le cas de $X = \mathbb{R}^n$, on a des caractérisations plus simples de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 3.1. *La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ est la tribu engendrée par les pavés de $\mathbb{R}^n$. En particulier pour $n = 1$, on a*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{M}_1) = \sigma(\mathcal{M}_2) = \sigma(\mathcal{M}_3) = \sigma(\mathcal{M}_4)$$

où

- *$\mathcal{M}_1$ est l'ensemble des intervalles $]a, b[$ où $-\infty < a < b < +\infty$;*
- *$\mathcal{M}_4$ est l'ensemble des intervalles $[a, b[$ où $-\infty < a < b < +\infty$;*
- *$\mathcal{M}_2$ est l'ensemble des intervalles $]-\infty, a[$ où $a \in \mathbb{R}$;*
- *$\mathcal{M}_3$ est l'ensemble des intervalles $]-\infty, a]$ où $a \in \mathbb{R}$.*

Preuve. Le cas plus détaillé de $\mathbb{R}$ est une conséquence claire du cas général. On sait que tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est réunion de pavés ouverts et tout pavé ouvert est réunion dénombrable de pavés dont les extrémités des intervalles sont des rationnels. Donc tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est réunion de pavés rationnels et comme les pavés rationnels sont en quantité dénombrable, on en déduit que tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est réunion dénombrable de pavés et donc appartient à la tribu engendrée par les pavés. □

3.1.3 Construction de tribus

Intersection

Si $\{\mathcal{T}_i\}_{i\in I}$ est une famille tribus sur X, avec I un ensemble quelconque non vide, alors

$$\mathcal{T} := \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$$

est une tribu sur X.

Attention! La réunion de deux tribus n'est en général pas une tribu. Par exemple si on considère deux parties A et B,

$$\sigma(\{A\}) \cup \sigma(\{B\}) \subsetneq \sigma(\{A, B\}) = \sigma\left(\sigma(\{A\}) \cup \sigma(\{B\})\right) .$$

Image directe et réciproque

Soit X et Y deux ensembles, soit $\mathcal{S}$ une tribu sur X et $\mathcal{T}$ une tribu sur Y. On considère $f : X \to Y$ une application. Alors

- $f^{-1}(\mathcal{T}) := \{f^{-1}(B) ; B \in \mathcal{T}\}$ est une tribu sur X appelée image réciproque de $\mathcal{T}$,
- $f(\mathcal{S}) := \{B \in \mathcal{P}(Y) ; f^{-1}(B) \in \mathcal{S}\}$ est une tribu sur Y appelée image directe de $\mathcal{S}$,
- **attention!** en général $\{f(A) ; A \in \mathcal{S}\}$ n'est pas une tribu.

Proposition 3.2 (Lemme de transport)**.** *Soit X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application. Soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$, alors*

$$\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{E})\right) = f^{-1}\left(\sigma(\mathcal{E})\right) .$$

Preuve. Par les remarques précédentes, $f^{-1}\left(\sigma(\mathcal{E})\right)$ est une tribu et de plus elle contient $f^{-1}(\mathcal{E})$. Il suit que

$$\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{E})\right) \subset f^{-1}\left(\sigma(\mathcal{E})\right) .$$

Soit maintenant $\mathcal{T}$ la tribu image directe de $\sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$ par f, c'est-à-dire

$$\mathcal{T} := \left\{A \in \mathcal{P}(Y) ; f^{-1}(A) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))\right\} .$$

Alors $\mathcal{T}$ est une tribu contenant $\mathcal{E}$ et donc contenant $\sigma(\mathcal{E})$. Il suit que $f^{-1}(\mathcal{T})$ contient $f^{-1}\left(\sigma(\mathcal{E})\right)$. Et de plus

$$f^{-1}(\mathcal{T}) = \left\{f^{-1}(A) ; A \in \mathcal{T}\right\} \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) . \quad \square$$

Remarque 3.4. Une réflexion naive peut mener à penser que

$$f^{-1}(\mathcal{T}) = \left\{f^{-1}(A) ; A \in \mathcal{T}\right\} = \left\{f^{-1}(A) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))\right\} = \sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) .$$

Mais il ne faut pas oublier que tous les éléments de $\sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$ ne sont pas nécessairement des images inverses par f de parties dans Y. La dernière égalité est donc fausse dans le cas général et on n'a que l'inclusion

$$\left\{f^{-1}(A) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))\right\} \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) .$$

Exemples. On pourra traiter les Exercices 3.1, 3.2 et 3.3.

Tribu produit

Soi t X et Y deux ensembles, soit $\mathcal{S}$ une tribu sur X et $\mathcal{T}$ une tribu sur Y. On appelle tribu produit de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ et on note $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ la tribu sur $X \times Y$

$$\mathcal{S} \times \mathcal{T} := \sigma\left(\{A \times B\,;\ A \in \mathcal{S}\,,\ B \in \mathcal{T}\}\right) .$$

Un exemple typique est

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

et de façon plus générale

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \underbrace{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times ... \times \mathcal{B}(\mathbb{R})}_{n\,fois} .$$

3.1.4 Classes monotones

Définition 3.5. *Soit X un ensemble, une classe monotone sur X est une famille $\mathcal{M}$ de parties de X qui est stable par réunion dénombrable croissante et par intersection dénombrable décroissante, c'est-à-dire que si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites d'éléments de $\mathcal{M}$ telles que*

- $A_{n+1} \subset A_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *(i.e. la suite* $\{A_n\}_n$ *est décroissante),*
- $B_n \subset B_{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *(i.e. la suite* $\{B_n\}_n$ *est croissante),*

alors

$$A := \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{M} \text{ et } B := \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n \in \mathcal{M} .$$

Proposition 3.3. *Une tribu est une algèbre qui est une classe monotone.*

Preuve. C'est évident en réorganisant une réunion dénombrable quelconque en une réunion dénombrable croissante. □

Remarque 3.5. A noter qu'une classe monotone n'est pas nécessairement un ensemble de parties stables par réunion dénombrable et intersection dénombrable. Par exemple, lorsqu'on réorganise une intersection dénombrable en intersection décroissantes, rien ne dit qu'on se retrouve avec des éléments de la classe monotone.

Théorème 3.2 (des classes monotones)**.** *Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ une algèbre et $\mathcal{M}$ une classe monotone contenant A, alors $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$.*

Preuve. On note $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ l'intersection de toutes les classes monotones contenant $\mathcal{A}$ et on va montrer que c'est une tribu.

1. Tout d'abord, c'est évidemment une classe monotone.
2. $\emptyset \in \mathcal{A}$ et donc $\emptyset \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

3. **Stabilité par passage au complémentaire.** On considère

$$\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{P}(X)\,;\ A^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}\,.$$

C'est une classe monotone et elle contient $\mathcal{A}$, donc $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{G}$, c'est-à-dire que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est stable par passage au complémentaire.

4. **Stabilité par union finie.** On considère

$$\mathcal{G}' = \{A \in \mathcal{P}(X)\,;\ A \cup B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \text{ pour tout } B \in \mathcal{A}\}\,.$$

C'est une classe monotone contenant $\mathcal{A}$, elle contient donc $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ donc $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est stable par union avec tout élément de $\mathcal{A}$. Soit maintenant

$$\mathcal{G}'' = \{A \in \mathcal{P}(X)\,;\ A \cup B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \text{ pour tout } B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}\,.$$

C'est une classe monotone et d'après ce qu'on vient de démontrer, elle contient $\mathcal{A}$, donc elle contient $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Il suit que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est stable par réunion et donc par réunion finie.

Donc $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est une algèbre mais c'est aussi une classe monotone, c'est donc une tribu et comme elle contient $\mathcal{A}$, elle contient aussi $\sigma(A)$.

3.2 Mesurabilité

3.2.1 Définitions

Définition 3.6 (Espace mesurable, parties mesurables)**.** *Soit X un ensemble, soit $\mathcal{T}$ une tribu d'éléments de $\mathcal{P}(X)$. Le couple $(X, \mathcal{T})$ est appelé un espace mesurable. Les parties de X qui appartiennent à $\mathcal{T}$ sont appelées les parties mesurables de X.*

Définition 3.7. *Soit $(X, \mathcal{S})$ et $(Y, \mathcal{T})$ deux espaces mesurables, on dit qu'une fonction $f : X \to Y$ est $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-mesurable, ou simplement mesurable, si pour tout $B \in \mathcal{T}$ on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{S}$.*

Lorsque X et Y sont des espaces topologiques et que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont leurs tribus Boréliennes, i.e. $\mathcal{T} = \mathcal{B}(X)$ et $\mathcal{S} = \mathcal{B}(Y)$, une fonction $f : X \to Y$ mesurable sera dite borélienne.

Exemple. On pourra traiter l'Exercice 3.4.

Proposition 3.4. *Soit X et Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue, alors f est borélienne.*

Preuve. On considère $\mathcal{M}$ l'ensemble des images réciproques des ouverts de Y par f. Comme f est continue, $\mathcal{M}$ est inclus dans l'ensemble des ouverts de X et donc la tribu $\sigma(\mathcal{M})$ est incluse dans $\mathcal{B}(X)$. Il suffit maintenant de considérer

$$\mathcal{A} := \{A \subset Y\,;\ f^{-1}(A) \in \sigma(\mathcal{M})\}\,.$$

C'est une tribu, car c'est l'image directe par f de la tribu $\sigma(\mathcal{M})$ et elle contient les ouverts de Y, donc elle contient $\mathcal{B}(Y)$. Et donc f est borélienne.

Une autre preuve peut-être plus directe est donnée par le Lemme de transport. On considère $\mathcal{O}$ l'ensemble des ouverts de Y et $\mathcal{U}$ l'ensemble des ouverts de X. Alors $\mathcal{B}(Y) = \sigma(\mathcal{O})$ et $f^{-1}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{U}$ du fait que f est continue. Par le Lemme de transport,

$$f^{-1}(\mathcal{B}(Y)) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{O})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{O}))\,.$$

Comme $f^{-1}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{U}$, $\sigma(f^{-1}(\mathcal{O})) \subset \sigma(\mathcal{U}) = \mathcal{B}(X)$, c'est-à-dire $f^{-1}(\mathcal{B}(Y)) \subset \mathcal{B}(X)$, autrement dit, f est borélienne. $\square$

Exemples. Voir l'Exercice 3.5.

Dans le cas où l'espace mesurable d'arrivée est muni d'une tribu engendrée par une partie, on peut montrer plus simplement qu'une fonction est mesurable.

Proposition 3.5. *Soit $(X, \mathcal{S})$ et $(Y, \mathcal{T})$ deux espaces mesurables, où $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{E})$, $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$. Soit $f : X \to Y$, alors f est mesurable si et seulement si*

$$\forall A \in \mathcal{E}\,,\ f^{-1}(A) \in \mathcal{S}\,.$$

Preuve. C'est une conséquence directe du lemme de transport. En effet, si pour tout $A \in \mathcal{E}$ on a $f^{-1}(A) \in \mathcal{S}$, alors $\mathcal{S}$ est une tribu contenant $f^{-1}(\mathcal{E})$ et donc contenant $\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{E})\right) = f^{-1}\left(\sigma(\mathcal{E})\right) = f^{-1}(\mathcal{T})$, ce qui implique que f est mesurable. L'implication réciproque est évidente. $\square$

Ce résultat a une conséquence importante dans le cas où l'espace d'arrivée est un espace topologique. Commençons par le cas le plus simple :

Corollaire 3.1. *Soit $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est mesurable ;*
2. *pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, a[) \in \mathcal{T}$;*
3. *pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, a]) \in \mathcal{T}$;*
4. *pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f^{-1}(]a, b[) \in \mathcal{T}$;*
5. *etc...*

Corollaire 3.2. *Soit $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est mesurable ;*
2. *pour tout pavé P de $\mathbb{R}^n$, $f^{-1}(P) \in \mathcal{T}$.*

Remarque 3.6. Le cas où f est à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathbb{C}^n$ muni de sa tribu Borélienne est inclus dans le corollaire précédent en identifiant $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$.

Et maintenant le cas général.

Corollaire 3.3. *Soit Y un espace topologique, $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{B}(Y))$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est mesurable ;*
2. *pour tout ouvert O de Y, $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}$;*
3. *pour tout fermé F de Y, $f^{-1}(F) \in \mathcal{T}$.*

Nous traitons maintenant des opérations sur les fonctions mesurables. La composition tout d'abord.

Proposition 3.6. *Soit $(X, \mathcal{S})$, $(Y, \mathcal{T})$, $(Z, \mathcal{U})$ trois espaces mesurables, $f : Y \to Z$ et $g : X \to Y$ deux applications mesurables, alors $g \circ f$ est mesurable.*

Preuve. Soit $A \in \mathcal{U}$. On a $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$. Comme g et mesurable, $g^{-1}(A) \in \mathcal{T}$ et comme f est mesurable, $f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{S}$. □

Proposition 3.7. *Soit $(X, \mathcal{S})$ un espace mesurable et soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'ensemble des fonctions mesurables de $(X, \mathcal{S})$ dans $(\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$ est une $\mathbb{K}$-algèbre (i.e. un $\mathbb{K}$ espace vectoriel pour la loi $+$ et la multiplication par un scalaire, et un anneau pour les lois $+$ et $\times$).*

Preuve. C'est une conséquence de la proposition précédente et du fait que l'addition et la multiplication sont continues et donc mesurables de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. □

3.2.2 Fonctions à valeurs positives

Les fonctions à valeurs positives (i.e. a priori à valeurs dans $\mathbb{R}^+$) jouent un rôle essentiel dans la théorie de Lebesgue. Il sera utile de les autoriser à prendre des valeurs infinies. On considèrera donc souvent des fonctions à valeurs dans $[0, +\infty]$, que l'on notera également $[0, \infty]$. Les intervalles ouverts de $[0, \infty]$ sont

$$\emptyset\,;\; [0, \infty]\,;\; [0, a[\,,\; 0 < a \leq \infty\,;\;]a, \infty]\,,\; a \in [0, \infty]\,;\;]a, b[\,,\; 0 \leq a < b \leq \infty\,.$$

Les ouverts de $[0, \infty]$ sont les réunions d'intervalles ouverts. Les Boréliens de $[0, \infty]$ sont engendrés entre autres par les familles d'intervalles suivantes :

- $[0, a]$, $a \in [0, \infty]$,
- $[a, \infty]$, $a \in [0, \infty]$,
- $]a, b[$, $0 \leq a < b \leq \infty$.

Proposition 3.8. *Soit $(X, \mathcal{S})$ un espace mesurable et $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $(X, \mathcal{S})$ dans $([0, \infty], \mathcal{B}([0, \infty]))$. Alors :*

- $\sup_n f_n$ *et* $\inf_n f_n$ *sont mesurables ;*
- $\limsup_{n\to+\infty} f_n$ *et* $\liminf_{n\to+\infty} f_n$ *sont mesurables ;*
- *si* f_n *converge simplement vers* f*, alors* f *est mesurable.*

Preuve. La première propriété entraine la seconde qui entraine à son tour la troisième. Montrons la première dans le cas du sup :

$$\begin{aligned}\left(\sup_n f_n\right)^{-1}([0,a]) &= \{x \in X\,;\ f_n(x) \le a\ \forall n\}\\ &= \bigcap_n f_n^{-1}([0,a]) \in \mathcal{S}\end{aligned}$$

car $\mathcal{S}$ est une tribu. □

Rappelons également l'arithmétique de $[0,+\infty]$. C'est l'arithmétique usuelle de $\mathbb{R}^+$ avec les conventions supplémentaires suivantes :

- $x+\infty=\infty$, $\infty+\infty=\infty$;
- $x\times\infty=\infty$ si $x\neq 0$ et $0\times\infty=0$:
- $1/0=\infty$ et $1/\infty=0$.

Proposition 3.9. *La somme et le produit sont des fonctions Boréliennes de* $[0,\infty]^2$ *dans* $[0,\infty]$*. L'application* $x\mapsto 1/x$ *est Borélienne de* $[0,\infty]$ *dans lui-même.*

Preuve. La somme est continue de $[0,\infty]^2$ dans $[0,\infty]$ et $x\mapsto 1/x$ est continue de $[0,\infty]$ dans lui-même, elles sont donc Boréliennes. Le produit en revanche n'est pas continu au point $(0,\infty)$ et seulement en ce point. Etudions donc les images réciproques des intervalles ouverts de $[0,\infty]$ Soit, $b\in]0,\infty[$, montrons que

$$B_1 := \left\{(x,y)\in[0,\infty]^2\,;\ xy>b\right\}$$

est un Borélien de $[0,\infty]^2$. C'est un ouvert de $[0,\infty]^2$, donc un Borélien de $[0,\infty]^2$. Considérons maintenant

$$B_2 := \left\{(x,y)\in[0,\infty]^2\,;\ xy<b\right\}\ ,$$

on a

$$B_2 = \big(\{0\}\times[0,\infty]\big)\cup\big([0,\infty]\times\{0\}\big)\cup\left\{(x,y)\in[0,\infty]^2\,;\ 0<xy<b\right\}$$

qui est la réunion d'un ouvert et de deux fermés et qui est donc aussi Borélien. Enfin, si $0<a<b<\infty$,

$$B_3 := \left\{(x,y)\in[0,\infty]^2\,;\ a<xy<b\right\}\ ,$$

est un ouvert et donc un Borélien. Le produit est donc bien mesurable de $[0,\infty]^2$ dans $[0,\infty]$. □

Proposition 3.10. *Soit $(X, \mathcal{S})$ un espace mesurable et f et g des fonctions mesurables de $(X, \mathcal{S})$ dans $([0, \infty], \mathcal{B}([0, \infty]))$. Alors $f + g$, fg et $1/f$ sont mesurables.*

Preuve. Composition des fonctions mesurables plus la proposition précédente. □

Définition 3.8 (Fonction étagée à valeurs positive)**.** *Une fonction $f : (X, \mathcal{S}) \to [0, +\infty[$ est dite étagée si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs a_1, a_2, ..., a_n et si pour $i = 1, 2, ..., n$ on a : $f^{-1}(\{a_i\}) \in \mathcal{S}$.*

Proposition 3.11. *Une telle fonction est mesurable de $(X, \mathcal{S})$ dans $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$.*

Preuve évidente. □

Proposition 3.12. *Soit $(X, \mathcal{S})$ un espace mesurable et f une fonction mesurable de $(X, \mathcal{S})$ dans $([0, \infty], \mathcal{B}([0, \infty]))$. Alors f est la limite croissante d'une suite de fonctions étagées à valeurs positive.*

Preuve. On considère la suite de fonctions étagées

$$\chi_n(x) := \sum_{j=1}^{n2^n} \frac{j-1}{2^n} \mathbf{1}_{f^{-1}\left(\left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right[\right)}(x) + n\mathbf{1}_{f^{-1}([n, +\infty[)}(x)\,.$$

On a bien $0 \leq \chi_n \leq f$. De plus, du fait du choix de découpage de $[0, \infty]$, la n-ième subdivision est un raffinement de la $(n-1)$-ième, et donc la suite χ_n est croissante. Montrons maintenant que χ_n tend ponctuellement vers f. Soit $x \in X$ tel que $f(x) = \infty$. Alors $\chi_n(x) = n$ pour chaque n et on a bien $\chi_n(x) \to \infty = f(x)$. Soit maintenant $x \in X$ tel que $0 \leq f(x) < \infty$. Pour $n > f(x)$, on aura

$$\chi_n(x) = \frac{j(x)}{2^n}\,,$$

où $j(x)$ est la partie entière de $2^n f(x)$. On a donc $0 \leq f(x) - \chi_n(x) \leq 2^{-n}$ pour $n > f(x)$ et donc $\chi_n(x) \to f(x)$ lorsque $n \to \infty$. □

3.3 Mesure positive

3.3.1 Définitions et premières propriétés

Définition 3.9. *Une mesure positive sur une tribu $\mathcal{T}$ de parties de X est une fonction $\mu : \mathcal{T} \to [0, +\infty]$ telle que*

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. *μ est σ-additive, c'est-à-dire que pour toute suite $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de X deux-à-deux disjointes, on a*

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)\,,$$

la somme (comme d'ailleurs les termes de la somme) pouvant être infinie.

Définition 3.10. *On appelle espace mesuré un triplet $(X, \mathcal{T}, \mu)$ où X est un ensemble, $\mathcal{T}$ une tribu de parties de X et μ une mesure positive sur $\mathcal{T}$.*

Définition 3.11. *Une mesure positive μ sur un espace mesurable $(X, \mathcal{T})$ est dite finie si $\mu(X) < \infty$.*

Définition 3.12. *Une mesure positive μ sur un espace mesurable $(X, \mathcal{T})$ sera dite σ-finie si X est réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$ qui sont de mesure μ finie.*

Exemples de mesures positives sur $\mathcal{P}(X)$:

- la mesure de comptage définie par $\mu(A) = \sharp(A)$;
- la mesure de Dirac en un point $a \in X$, notée δ_a et définie par

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a \in A\,; \\ 0 & \text{si} \quad a \notin A\,. \end{cases}$$

Proposition 3.13 (Propriétés élémentaires des mesures)**.** *Soit μ une mesure positive sur une tribu $\mathcal{T}$ sur un ensemble X.*

1. **Croissance :** *soit $A, B \in \mathcal{T}$ avec $A \subset B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.*
2. **Additivité :** *soit $A, B \in \mathcal{T}$,*

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)\,.$$

3. **Sous-additivité dénombrable :** *pour toute suite $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$,*

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)\,.$$

4. **Continuité :** *soit $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{T}$ et $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{T}$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$ et $B_{n+1} \subset B_n$, alors*

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

et si $\mu(B_1) < \infty$, alors,

$$\mu\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n)\,.$$

Preuve. Pour la plupart, ce sont des conséquences de la définition d'une mesure positive. La preuve est laissée en exercice pour les travaux dirigés. La continuité est un peu plus délicate à démontrer que les autres propriétés, nous la détaillons. Commençons par la suite des A_n. On pose $C_0 = A_0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Les C_n sont deux-à-deux disjoints et

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} C_n \,.$$

Il suit que

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(C_n) \,.$$

Supposons tout d'abord que

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) < +\infty \,,$$

alors la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(C_n)$$

converge et donc

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(C_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(C_k) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) \,.$$

Si maintenant

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = +\infty \,,$$

alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(C_n) = +\infty$$

c'est-à-dire que

$$\mu(A_n) = \sum_{k=0}^{n} \mu(C_k) \to +\infty \text{ lorsque } n \to +\infty$$

et on a donc encore le résultat.

Traitons maintenant le cas des B_n. On va passer au complémentaire dans B_1. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = B_1 \setminus B_n$. Il s'agit d'une suite croissante de parties mesurables et on a donc

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(D_n) \,.$$

On utilise alors que $\mu(D_n) + \mu(B_n) = \mu(B_1)$ et comme $\mu(B_1) < +\infty$, on a $\mu(D_n) = \mu(B_1) - \mu(B_n)$. De même on a

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n\right) + \mu\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \mu(B_1)\,.$$

Il suit donc que

$$\mu\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n)\,. \quad \square$$

3.3.2 Mesure sur une algèbre

Définition 3.13. *Soit X un ensemble et $\mathcal{A}$ une algèbre de parties de X, on dit qu'une fonction $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ est une mesure si $\mu(\emptyset) = 0$ et si μ est σ-additive sur $\mathcal{A}$, c'est-à-dire si, pour toute suite $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de $\mathcal{A}$ deux-à-deux disjointes dont la réunion est dans $\mathcal{A}$, on a*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)\,.$$

Bien sûr, comme $\mathcal{A}$ est une algèbre et non une tribu, pour une suite de parties A_n de $\mathcal{A}$ deux-à-deux disjointes, la réunion des A_n n'est en général pas dans $\mathcal{A}$.

Dans le cas où la mesure de X est finie, on peut donner une définition alternative équivalente d'une mesure sur une algèbre de parties de X :

Définition 3.14. *Soit X un ensemble, $\mathcal{A}$ une algèbre de parties de X et μ une fonction de $\mathcal{A}$ dans $[0,\infty]$ telle que $\mu(X) < \infty$. Alors μ est une mesure sur $\mathcal{A}$ si et seulement si μ vérifie les deux conditions suivantes :*

1. Additivité. *Pour toutes parties $A, B \in \mathcal{A}$ disjointes, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$;*
2. Condition de Carathéodory. *Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{A}$ et si l'intersection des A_n est vide, alors $\mu(A_n)$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$.*

Preuve. Commençons par supposer que μ est une mesure. Alors la propriété 1. est une conséquence de la σ-additivité et du fait que $\mathcal{A}$ est une algèbre. Considérons maintenant $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{A}$ dont l'intersection est vide. On considère la suite de parties disjointes suivante :

$$B_n := A_n \setminus A_{n+1}\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ (du fait que l'intersection de tous les A_n est vide)

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k = A_n$$

et comme l'union est disjointe et que la réunion est un élément de $\mathcal{A}$,

$$\mu(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mu(B_k)\,.$$

De plus, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) < \infty$ car

$$\mu(A) = \mu(A) + \mu(A^C) = \mu(X) < \infty\,.$$

Il suit que $\mu(A_0) < \infty$ et donc la série

$$\mu(A_0) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k)\,.$$

converge dans $[0, \infty[$. Donc

$$\mu(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mu(B_k) \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty\,.$$

Réciproquement, supposons que μ vérifie 1. et 2. La condition 1. entraine que

$$\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset)$$

et comme $\mu(\emptyset) < \infty$ du fait que la mesure de toute partie est finie (conséquence de 1. établie plus haut) il suit que $\mu(\emptyset) = 0$. Soit maintenant $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux-à-deux disjoints dont la réunion A est dans $\mathcal{A}$. On considère alors la suite décroissante de parties

$$B_0 := A\,,\; B_{n+1} := B_n \setminus A_{n+1} = A \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right)\,.$$

On a bien que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = A \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = A \setminus A = \emptyset\,.$$

Il suit que

$$\mu(B_n) \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty\,.$$

Pour chaque n, on a l'union disjointe finie

$$A = B_n \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$$

et donc

$$\mu(A) = \mu(B_n) + \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)\,.$$

Le fait que la mesure de B_n tende vers 0 entraine que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

converge et vaut $\mu(A)$. $\square$

3.3.3 Mesure de Lebesgue

Nous allons maintenant définir la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ sur une algèbre de parties de $[0,1]$, nous verrons ensuite comment la prolonger à la tribu des Boréliens sur $[0,1]$ puis à celle de Lebesgue.

Définition 3.15. *Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre des réunions finies d'intervalles de $[0,1]$. On définit pour un intervalle (a,b) de $[0,1]$*

$$\lambda((a,b)) := b - a\,.$$

On étend la fonction λ sur $\mathcal{A}$ par additivité.

Théorème 3.3. *La fonction longueur λ définit une mesure sur l'algèbre $\mathcal{A}$ des réunions finies d'intervalles de $[0,1]$. On l'appelle la mesure de Lebesgue.*

Preuve. On utilise la définition équivalente lorsque la mesure de l'ensemble est finie. C'est bien le cas ici puisque $\lambda([0,1]) = 1$. La propriété 1. est très simple à montrer :

$$\lambda(\emptyset) = \lambda(]0,0[) = 0\,.$$

Considérons maintenant $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{A}$ dont l'intersection est vide. Montrons que $\lambda(A_n) \to 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour chaque $n \geq 1$, soit K_n un compact inclus dans A_n, réunion finie d'intervalles fermés, tel que $\lambda(A_n \setminus K_n) < \varepsilon/2^n$. On définit alors une suite décroissante de compacts de la façon suivante

$$C_1 := K_1\,,\ \ldots,\ C_n := K_n \cap C_{n-1} \ldots$$

Comme $C_n \subset A_n$, il suit que l'intersection des C_n est vide. On sait qu'une suite de compacts dont l'intersection est vide contient nécessairement l'ensemble vide. C'est-à-dire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $C_{n_0} = \emptyset$ et donc $C_n = \emptyset$ pour tout $n \geq n_0$ du fait que la suite C_n est décroissante. Si on veut estimer $\lambda(A_n \setminus C_n)$, on a

$$\lambda(A_n \setminus C_n) = \lambda(A_n \setminus K_n) + \lambda(K_n \setminus C_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n} + \lambda(K_n \setminus C_n)$$

et il nous faut estimer $\lambda(K_n \setminus C_n)$. On peut écrire

$$K_n \setminus C_n = K_n \setminus (K_n \cap C_{n-1}) \subset A_n \setminus C_{n-1} \subset A_{n-1} \setminus C_{n-1}\,.$$

On en déduit que

$$\lambda(A_n \setminus C_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n} + \lambda(A_{n-1} \setminus C_{n-1})\,.$$

Par récurrence, il suit que

$$\lambda(A_n \setminus C_n) \leq \varepsilon \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{2^k} \leq \varepsilon\,.$$

Pour $n \geq n_0$, on en déduit $\lambda(A_n) \leq \varepsilon$ et ceci prouve la condition de Carathéodory. □

La même construction peut être faite sur $[0,1]^n$. On définit la mesure de Lebesgue sur les pavés par le volume des pavés :

$$\lambda(\Pi_{k=1}^n (a_k, b_k)) = \Pi_{k=1}^n (b_k - a_k)\,,$$

on l'étend par additivité à l'algèbre des réunions finies de pavés sur $[0,1]^n$. On l'appelle aussi la mesure de volume.

3.3.4 MesuresBoréliennes

Définition 3.16. *Soit X un espace topologique, on appelle mesure Borélienne sur X une mesure sur la tribu Borélienne de X.*

Proposition 3.14 ("Fonction de répartition")**.** *Soit μ une mesure Borélienne sur $\mathbb{R}$ finie sur les compacts. On pose $F(x) = \mu([0,x[)$ si $x > 0$ et $F(x) = -\mu([x,0[)$ si $x \leq 0$. Alors F est monotone croissante, continue à gauche. De plus, F est continue à droite en $\{x_0\}$ si et seulement si $\mu(\{x_0\}) = 0$.*

Preuve. La croissance est une conséquence directe de la croissance de la mesure. Soit $x' \geq x$, on a trois cas :

1. si $0 < x \leq x'$, alors $[0,x[\subset [0,x'[$ et donc $\mu([0,x[) \leq \mu([0,x'[)$;
2. si $x \leq x' \leq 0$, alors $[x',0[\subset [x,0[$ et donc $\mu([x',0[) \leq \mu([x,0[)$ ce qui implique $F(x) \leq F(x')$;
3. si $x \leq 0 < x'$ alors $F(x) \leq 0 \leq F(x')$.

Montrons la continuité à gauche. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on montre que $F(x-h) \to F(x)$ lorsque $h \to 0$, $h > 0$. Pour cela, nous allons raisonner en termes de suites. On considère une suite $\{h_n\}_n$ dans $]0,\infty[$ qui tend vers 0 en décroissant. On traite deux cas :

1. $x_0 \leq 0$: alors

   $$F(x_0 - h_n) - F(x_0) = \mu([x_0 - h_n, 0[) - \mu([x_0, 0[) = \mu([x_0 - h_n, x_0[)$$

   et $[x_0 - h_n, x_0[$ est une suite décroissante de Boréliens dont l'intersection est vide, d'où par continuité de la mesure,

   $$\lim_{n\to\infty} \mu([x_0 - h_n, x_0[) = 0\,;$$

2. $x_0 > 0$: pour n assez grand on a $x_0 - h_n > 0$ et

   $$F(x_0) - F(x_0 - h_n) = \mu([0, x_0[) - \mu([0, x_0 - h_n[) = \mu([x_0 - h_n, x_0[)$$

   et le même raisonnement permet de conclure de la même façon.

Pour la continuité à droite, traitons le cas de $x_0 > 0$. On considère comme précédemment une suite $\{h_n\}_n$ dans $]0, \infty[$ qui tend vers 0 en décroissant. Alors

$$F(x_0 + h_n) - F(x_0) = \mu([x_0, x_0 + h_n[)$$

et les intervalles $[x_0, x_0 + h_n[$ sont décroissants d'intersection $\{x_0\}$. Par continuité de la mesure, il suit que

$$\lim_{n\to\infty} F(x_0 + h_n) - F(x_0) = \mu(\{x_0\})$$

et F est continue à droite en x_0 si et seulement si $\mu(\{x_0\}) = 0$. Les cas $x_0 = 0$ et $x_0 < 0$ sont laissés en exercice. □

Exemple. On pourra traiter l'Exercice 3.6.

A noter que ce résultat a une réciproque.

Théorème 3.4. *Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction monotone croissante, continue à gauche. Alors il existe une mesure Borélienne μ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\mu([a, b[) = F(b) - F(a)$.*

Définition 3.17. *Soit μ une mesure Borélienne sur un espace topologique X, on dit que μ est régulière si pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un fermé F et un ouvert O tels que $F \subset A \subset O$ et $\mu(O \setminus F) < \varepsilon$.*

Proposition 3.15. *Toute mesure Borélienne finie sur un espace métrique est régulière.*

Preuve. On note μ une telle mesure et X l'espace métrique. On considère $\mathcal{G}$ la famille des parties Boréliennes A telles que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert U contenant A avec $\mu(U \setminus A) < \varepsilon$. On montre trois propriétés de $\mathcal{G}$.

1. $\mathcal{G}$ est stable par intersection finie. Pour $i = 1, 2$, soit $A_i \in \mathcal{G}$, soit $\varepsilon > 0$ et soit U_i un ouvert contenant A_i tel que $\mu(U_i \setminus A_i) < \varepsilon/2$. Alors

   $$(U_1 \cap U_2) \setminus (A_1 \cap A_2) = [U_1 \cap (U_2 \setminus A_2)] \cup [U_2 \cap (U_1 \setminus A_1)] \subset (U_1 \setminus A_1) \cap (U_2 \setminus A_2)\,.$$

   Il suit que $\mu\left((U_1 \cap U_2) \setminus (A_1 \cap A_2)\right) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

2. $\mathcal{G}$ est stable par intersection dénombrable décroissante. Soit $\{A_n\}_n$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{G}$ et A l'intersection des A_n. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\mu(A_n \setminus A) \leq \varepsilon/2$ du fait que la mesure est finie. Soit alors U_{n_0} un ouvert contenant A_{n_0} tel que $\mu(U_{n_0} \setminus A_{n_0}) \leq \varepsilon/2$, on a $A_{n_0} \subset U_{n_0}$ et $\mu(U_{n_0} \setminus A) \leq \varepsilon$.

3. $\mathcal{G}$ est stable par réunion dénombrable. Soit $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathcal{G}$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour chaque n, on considère U_n un ouvert contenant A_n tel que $\mu(U_n \setminus A_n) < \varepsilon/2^n$. Comme

   $$\left(\bigcup_n U_n\right) \setminus \left(\bigcup_n A_n\right) \subset \bigcup_n (U_n \setminus A_n)\,,$$

   on a

   $$\mu\left(\left(\bigcup_n U_n\right) \setminus \left(\bigcup_n A_n\right)\right) \leq \varepsilon\,.$$

Les propriétés 1. et 2. entrainent que $\mathcal{G}$ est stable par intersection dénombrable. De plus $\mathcal{G}$ contient les ouverts. Et comme tout fermé est intersection dénombrable d'ouverts

$$F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} F_n \,,\ F_n = \bigcup_{x\in F} B(x, 1/n)\,,$$

$\mathcal{G}$ contient les fermés. Soit maintenant

$$\mathcal{G}_0 := \{A \in \mathcal{G}\,;\ A^C \in \mathcal{G}\}\,,$$

$\mathcal{G}_0$ est une tribu et elle contient les ouverts car $\mathcal{G}$ contient les fermés. De plus elle est incluse dans $\mathcal{G}$ qui est incluse dans la tribu des Boréliens. Donc c'est la tribu Borélienne (et donc $\mathcal{G}$ aussi). Mais dire que $A^C \in \mathcal{G}$ signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe F fermé contenu dans A tel que $\mu(A \setminus F) < \varepsilon$. Donc pour tout Borélien A, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe U ouvert contenant A et F fermé contenu dans A tels que $\mu(U \setminus A) < \varepsilon$ et $\mu(A \setminus F) < \varepsilon$. □

Théorème 3.5. *La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ est régulière.*

Preuve. Par la proposition précédente, la mesure de Lebesgue est régulière sur les pavés finis. On peut touver une suite de pavés finis $\{P_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$, deux à deux disjoints, tels que leur réunion soit $\mathbb{R}^n$. Soit A un Borélien et soit $\varepsilon > 0$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, on considère U_k un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant $A \cap P_k$ et F_k un fermé de $\mathbb{R}^n$ inclus dans $A \cap P_k$ tels que

$$\mu(U_k \setminus (A \cap P_k)) \leq \frac{\varepsilon}{2^k}\,,\ \mu((A \cap P_k) \setminus F_k) \leq \frac{\varepsilon}{2^k}\,.$$

On pose alors

$$U := \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} U_k\,,\ F := \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} F_k\,.$$

Alors U est un ouvert comme réunion dénombrable d'ouverts et F est un fermé comme réunion dénombrable de fermés **deux à deux disjoints.** De plus

$$\begin{aligned}
\mu\left(A \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} F_k\right) &\leq \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} (A \cap P_k) \setminus F_k\right) \leq \varepsilon\,,\\
\mu\left(\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} U_k\right) \setminus A\right) &\leq \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} U_k \setminus (A \cap P_k)\right) \leq \varepsilon\,. \quad \square
\end{aligned}$$

3.4 Théorème de prolongement

Définition 3.18. *Soit X un ensemble et $\mathcal{A}$ une algèbre de parties de X et $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$. On dit que μ est σ-finie si X est réunion disjointe dénombrable de parties $A_p \in \mathcal{A}$, $p \in \mathbb{N}$, telles que $\mu(A_p) < \infty$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.*

Exemple. Sur $X = \mathbb{R}^n$, on considère les pavés spéciaux

$$P = [a_1, b_1[\times[a_2, b_2[\times ... \times [a_n, b_n[$$

où les intervalles $[a_k, b_k[$ sont autorisés à être de la forme $[a_k, +\infty[$ avec $a_k \in \mathbb{R}$ ou de la forme $]-\infty, b_k[$ avec $b_k \in \mathbb{R}$. On considère $\mathcal{A}$ l'algèbre des réunions finies de pavés spéciaux. Le volume est une mesure σ-finie sur $\mathcal{A}$.

Nous admettrons le théorème fondamental suivant.

Théorème 3.6 (de Carathéodory). *Soit X un ensemble, $\mathcal{A}$ une algèbre de parties de X et μ une mesure σ-finie sur $\mathcal{A}$, alors μ admet un unique prolongement en une mesure sur la tribu $\sigma(\mathcal{A})$.*

3.5 Application à la mesure de Lebesgue

Le théorème suivant montre que la mesure de Lebesgue sur les pavés se prolonge de façon unique à la tribu Borélienne de $\mathbb{R}^n$. C'est un corollaire immédiat du Théorème de Carathéodory.

Théorème 3.7. *Il existe une unique mesure définie sur la tribu Borélienne de $\mathbb{R}^n$ qui à tout pavé associe son volume n-dimensionnel usuel. On la note λ et on l'appelle la mesure de Lebesgue.*

Corollaire 3.4. *La mesure de Lebesgue est finie sur les compacts et invariante par translation.*

Preuve. La finitude sur les compacts vient de la croissance de la mesure et du fait que tout compact est contenu dans un pavé. L'invariance par translation est conséquence de l'unicité : la mesure de Lebesgue translatée est une mesure définie sur la tribu Borélienne de $\mathbb{R}^n$ qui à tout pavé associe son volume n-dimensionnel usuel. □

Proposition 3.16. *Soit μ une mesure Borélienne sur $\mathbb{R}^n$, finie sur le cube unité et invariante par translation, alors μ est proportionnelle à la mesure de Lebesgue.*

3.6 Ensembles négligeables

Définition 3.19. *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, on appelle partie négligeable de X une partie N de X telle qu'il existe $A \in \mathcal{A}$, $N \subset A$ avec $\mu(A) = 0$.*

Proposition 3.17. *Toute réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.*

Preuve. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $\{N_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'ensembles négligeables dans X. On pose

$$N = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k\,.$$

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, il existe $A_k \in \mathcal{T}$ tel que $N_k \subset A_k$ et $\mu(A_k) = 0$. Soit

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \,.$$

L'ensemble A est mesurable comme réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$ et de plus on a $N \subset A$ et

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \le \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k) = 0 \,.$$

Donc N est négligeable. □

Exemples. Voir les Exercices 3.7 et 3.8.

Les parties négligeables ne sont pas nécessairement mesurables, mais il est naturel de décider que leur mesure est nulle. Ceci revient à élargir la tribu $\mathcal{T}$ en lui ajoutant les parties négligeables. On appelle cela compléter l'espace mesuré.

Définition 3.20. *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, on dit qu'il est complet si toute partie négligeable de X est dans $\mathcal{T}$.*

Théorème 3.8. *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, il existe un prolongement μ^* de μ à la tribu*

$$\mathcal{T}^* := \sigma\left(\mathcal{T} \cup \mathcal{N}\right)$$

où $\mathcal{N}$ est l'ensemble des parties négligeables de X, tel que $(X, \mathcal{T}^*, \mu^*)$ soit complet.

Remarque 3.7. En général, $\mathcal{T}^* \neq \mathcal{P}(X)$.

Définition 3.21. *On appelle tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ la complétée de la tribu Borélienne sur $\mathbb{R}^n$. On la note $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, elle est distincte de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.*

3.7 Exercices

Exercice 3.1. Soit X et Y deux ensembles, $b \in Y$ et $f : X \to Y$ l'application définie par $f(x) = b$ pour tout $x \in X$.

1. Déterminer $f^{-1}(B)$ pour toute partie B de Y.

2. Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur Y, déterminer $f^{-1}(\mathcal{T})$.

Exercice 3.2. Soit X un ensemble, $A \subset X$ et $f : X \to \mathbb{R}$ définie par $f = \mathbf{1}_A$.

1. Déterminer $f^{-1}(B)$ pour toute partie B de $\mathbb{R}$.

2. Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur $\mathbb{R}$, déterminer $f^{-1}(\mathcal{T})$.

Exercice 3.3. Soit X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application. Soit $A \subset Y$, déterminer $f^{-1}(\sigma(A))$.

Exercice 3.4. Soit $(X, \mathcal{S})$ et $(Y, \mathcal{T})$ deux espaces mesurables.

1. On suppose que $\mathcal{S} = \mathcal{P}(X)$. Quelles applications de X dans Y sont mesurables?
2. On suppose que $\mathcal{S} = \{\emptyset, X\}$. Quelles applications de X dans Y sont mesurables?
3. On suppose que $\mathcal{S} = \sigma(\{A\})$ pour une partie A de X donnée. Quelles applications de X dans Y sont mesurables?

Exercice 3.5.
- Fonction constante. Soit $(X, \mathcal{S})$ et $(Y, \mathcal{T})$ deux espaces mesurables, soit $y_0 \in Y$ et soit f la fonction définie sur X à valeurs dans Y par $f(x) = y_0$ pour tout $x \in X$. Montrer que f est mesurable.
- Fonction indicatrice. Soit $(X, \mathcal{S})$ un espace mesurable et $A \subset X$. Montrer que

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{1}_A : (X, \mathcal{S}) & \longrightarrow & (\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\})) \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si}\, x \in A \\ 0 & \text{si}\, x \notin A \end{cases} \end{array}$$

  est mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{S}$.

Exercice 3.6. On considère sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ la mesure

$$\mu = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n \,.$$

Déterminer sa fonction de répartition (définie dans la Proposition 3.14) et tracer son graphe.

Exercice 3.7. Soit X un ensemble muni de la tribu $\mathcal{P}(X)$.

- Soit $a \in X$, quelles sont les parties négligeables pour la mesure δ_a?
- Quelles sont les parties négligeables pour la mesure de comptage?

Exercice 3.8. Soit sur $\mathbb{R}$ une tribu $\mathcal{T}$ et soit

$$\mu = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \delta_n$$

où $a_n \in \mathbb{R}^+$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que μ est une mesure sur $\mathcal{T}$
2. Dans le cas où $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, quelles sont les parties négligeables pour μ? Existe-t-il des parties négligeables non mesurables?
3. L'ensemble des parties négligeables de $\mathbb{R}$ dépend-il de la tribu $\mathcal{T}$?

Exercice 3.9. On munit $\mathbb{R}$ de sa tribu Borélienne et de la mesure de Lebesgue.

1. Montrer que tout sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$ est négligeable.
2. Existe-t-il des parties dénombrables de $\mathbb{R}$ non mesurables?

Chapitre 4

Intégration

4.1 Intégrale des fonctions positives

On commence par définir de façon naturelle l'intégrale des fonctions étagées positives.

Définition 4.1. *Soit* $(X, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré et*

$$\chi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}$$

une fonction étagée positive (c'est-à-dire que les A_i *sont dans* $\mathcal{T}$ *et les* a_i *sont dans* $[0, \infty]$*). On définit*

$$\int_X \chi(x) \mathrm{d}\mu(x) := \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) \, .$$

Maintenant, nous pouvons définir l'intégrale de toute fonction mesurable positive.

Définition 4.2. *Soit* $(X, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré et soit* f *une fonction mesurable positive sur* X*, c'est-à-dire mesurable pour* $(X, \mathcal{T})$ *et* $([0, \infty], \mathcal{B}([0, \infty]))$*. On définit l'intégrale de* f *sur* X *par*

$$\int_X f(x) \mathrm{d}\mu(x) := \sup \left\{ \int_X \chi(x) \mathrm{d}\mu(x) \, , \; \chi \textit{ étagée positive} \, , \; \chi \leq f \right\} \, .$$

On peut aussi intégrer des fonctions mesurables positives sur des parties de X à condition qu'elles soient mesurables.

Définition 4.3. *Soit* $(X, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré,* f *une fonction mesurable positive sur* X *et* $A \in \mathcal{T}$*. On définit l'intégrale de* f *sur* A *par*

$$\int_A f(x) \mathrm{d}\mu(x) := \int_X f(x) \mathbf{1}_A(x) \mathrm{d}\mu(x) \, .$$

La définition de l'intégrale implique certaines propriétés utiles.

Proposition 4.1 (Propriétés élémentaires de l'intégrale des fonctions mesurables positives). *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.*

1. **Monotonie.** *Soit f et g deux fonctions mesurables positives sur X avec $f \leq g$, alors*
$$\int_X f(x) \mathrm{d}\mu(x) \leq \int_X g(x) \mathrm{d}\mu(x) \,.$$

2. *Si χ_1 et χ_2 sont des fonctions étagées positives sur X, alors*
$$\int_X (\chi_1(x) + \chi_2(x)) \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \chi_1(x) \mathrm{d}\mu(x) + \int_X \chi_2(x) \mathrm{d}\mu(x) \,.$$

3. *Si A est une partie mesurable de X et si $\mu(A) = 0$, alors pour toute fonction mesurable positive f sur X on a*
$$\int_A f(x) \mathrm{d}\mu(x) = 0 \,.$$

4. *Si f est une fonction mesurable positive sur X et si $A \in \mathcal{T}$, alors*
$$\int_X f(x) \mathrm{d}\mu(x) = \int_A f(x) \mathrm{d}\mu(x) + \int_{A^C} f(x) \mathrm{d}\mu(x) \,.$$

5. *Si χ est une fonction étagée positive donnée sur X, alors*
$$A \in \mathcal{T} \mapsto \int_A \chi(x) \mathrm{d}\mu(x)$$
est une mesure sur $\mathcal{T}$.

Preuve.

1. Soit χ une fonction étagée positive inférieure ou égale à f, alors $\chi \leq g$ et par définition de l'intégrale de g sur X, on en déduit que
$$\int_X \chi \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \mathrm{d}\mu$$
et en prenant le sup du membre de gauche sur les fonctions étagées positives inférieures à f, on trouve l'inégalité voulue.

2. C'est juste une question de décomposition des parties mesurables sur lesquelles χ_1 et χ_2 sont constantes en réunions disjointes de parties mesurables sur lesquelles $\chi_1 + \chi_2$ est constante et de recomposition dans l'intégrale. On peut faire l'exercice dans le cas où χ_1 et χ_2 sont simplement proportionnelles à des fonctions indicatrices.

3. Soit
$$\chi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}$$
une fonction étagée positive inférieure ou égale à $f\mathbf{1}_A$. Si $a_i > 0$ alors $A_I \subset A$ et donc $\mu(A_i) = 0$. Il suit que
$$\int_X \chi \mathrm{d}\mu = 0$$
et en prenant le sup sur les fonctions étagées positives inférieures ou égales à $f\mathbf{1}_A$, on obtient
$$\int_X f\mathbf{1}_A \mathrm{d}\mu = \int_A f \mathrm{d}\mu = 0\,.$$

4. Soit χ une fonction étagée positive inférieure ou égale à f. Alors $\chi\mathbf{1}_A$ est une fonction étagée positive inférieure ou égale à $f\mathbf{1}_A$ et $\chi\mathbf{1}_{A^C}$ est une fonction étagée positive inférieure ou égale à $f\mathbf{1}_{A^C}$. Par le point 2. on a alors
$$\int_X \chi \mathrm{d}\mu = \int_A \chi \mathrm{d}\mu + \int_{A^C} \chi \mathrm{d}\mu \leq \int_A f \mathrm{d}\mu + \int_{A^C} f \mathrm{d}\mu\,.$$
Et en prenant le sup du membre de gauche sur les fonctions étagées positives inférieures ou égales à f, on trouve
$$\int_X f \mathrm{d}\mu \leq \int_A f \mathrm{d}\mu + \int_{A^C} f \mathrm{d}\mu\,.$$
Maintenant si χ_1 est une fonction étagée positive inférieure ou égale à $f\mathbf{1}_A$ et si χ_2 est une fonction étagée positive inférieure ou égale à $f\mathbf{1}_{A^C}$, alors $\chi = \chi_1 + \chi_2$ est une fonction étagée positive inférieure ou égale à f. En appliquant le second point on a
$$\int_A \chi_1 \mathrm{d}\mu + \int_{A^C} \chi_2 \mathrm{d}\mu = \int_X \chi \mathrm{d}\mu \leq \int_X f \mathrm{d}\mu\,,$$
puis en prenant successivement le sup du membre de gauche sur les $\chi_1 \leq f\mathbf{1}_A$ puis sur les $\chi_2 \leq f\mathbf{1}_{A^C}$ on en déduit
$$\int_A f \mathrm{d}\mu + \int_{A^C} f \mathrm{d}\mu \leq \int_X f \mathrm{d}\mu\,.$$

5. C'est une conséquence des points précédents. On pourra le traiter en TD. □

Théorème 4.1 (Inégalité de Tchebychev)**.** *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction mesurable positive sur X. Soit $a \geq 0$, on a*
$$\mu\left(\{x \in X\,;\; f(x) \geq a\}\right) \leq \frac{1}{a} \int_X f(x) \mathrm{d}\mu(x)\,.$$

Preuve. Le résultat suit directement de la monotonie de l'intégrale. En effet,

$$a\mathbf{1}_{\{x\in X\,;\ f(x)\geq a\}} \leq f\,. \quad \square$$

Définition 4.4 (Propriété vraie presque partout)**.** *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, on dira qu'une propriété est vraie μ-presque partout (ou simplement presque partout) si elle est vraie pour tout $x \in X \setminus N$ où N est une partie négligeable de X.*

Un exemple simple de propriété vraie presque partout est le suivant : sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, la fonction $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ est nulle presque partout. On écrira

$$f = 0 \text{ } p.p.$$

On pourra se reporter à l'Exercice 3.9 pour voir que $\mathbb{Q}$ est un ensemble négligeable pour la mesure de Lebesgue.

Proposition 4.2. *Soit f est g deux fonctions mesurables positives sur un espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu)$.*

1. *Si $\int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x) < \infty$ alors $f(x) < \infty$ p.p.*
2. *$\int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ p.p.*
3. *$f(x) = g(x)$ p.p. $\Rightarrow \int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X g(x)\mathrm{d}\mu(x)$.*

Preuve.

1. On pose $A = f^{-1}(\infty)$ et on suppose que $\mu(A) > 0$. On considère la suite de fonctions $g_n = n\mathbf{1}_A$. C'est une suite croissante de fonctions mesurables positives qui vérifie $g_n \leq f$ pour tout n. De plus

$$\int_X g_n \mathrm{d}\mu = n\mu(A) \to \infty\,;\ n \to \infty\,.$$

   Il suit par croissance de l'intégrale que

$$\int_X f(x)\mathrm{d}x = +\infty\,.$$

2. Supposons $f = 0$ p.p. On définit

$$A = \{x \in X\,;\ f(x) > 0\} = f^{-1}(]0, \infty])\,.$$

   Alors A est mesurable (du fait que f est mesurable et que $]0, \infty]$ est un Borélien de $[0, \infty]$) et on a $\mu(A) = 0$, donc l'intégrale de f sur A est nulle. Et

$$\int_X f\mathrm{d}\mu = \int_A f\mathrm{d}\mu + \int_{X\setminus A} f\mathrm{d}\mu = 0 + 0 \times \mu(X \setminus A) = 0\,,$$

car $X \setminus A = f^{-1}(\{0\})$.

Supposons maintenant que l'intégrale de f sur X soit nulle. Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$A_n := \{x \in X\,;\ f(x) \geq 1/n\} = f^{-1}([1/n, \infty])\,.$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_X f \mathrm{d}\mu \geq \frac{1}{n}\mu(A_n)$$

et donc A_n est de mesure nulle. Il suit que

$$A := \{x \in X\,;\ f(x) > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$$

est de mesure nulle comme réunion dénombrable de parties de mesure nulle. Donc f est nulle presque partout.

3. Soit $A = \{x \in X\,;\ f(x) = g(x)\} = (f-g)^{-1}(\{0\})$. L'ensemble A est mesurable et $\mu(A^C) = 0$. On a donc

$$\int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_A f(x)\mathrm{d}\mu(x) + \int_{A^C} f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_A f(x)\mathrm{d}\mu(x)\,,$$

et même chose pour g. Et comme $f = g$ sur A, on a le résultat. □

On pourra traiter ici l'Exercice 4.1.

Théorème 4.2 (de convergence monotone de Beppo Levi)**.** *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives. On pose*

$$f := \lim_{n \to \infty} f_n\,,$$

alors f est mesurable positive et

$$\int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

Preuve. Comme f est limite de fonctions mesurables, on a vu qu'elle est aussi mesurable. De plus, par la propriété de monotonie de l'intégrale, pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_X f_n \mathrm{d}\mu \leq \int_X f_{n+1}\mathrm{d}\mu \text{ et } \int_X f_n \mathrm{d}\mu \leq \int_X f \mathrm{d}\mu\,.$$

Il suit d'une part que la limite

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$$

existe dans $[0, \infty]$ et d'autre part qu'elle est majorée par l'intégrale de f. Il reste à montrer l'autre inégalité. On considère les fonctions étagées positives χ vérifiant la propriété

$$\text{pour tout } x \in X \text{ tel que } f(x) > 0\,, \text{ on a } 0 \leq \chi(x) < f(x)\,. \tag{4.1}$$

Si par exemple χ est une fonction étagée positive telle que $0 \leq \chi \leq f$, alors pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, la fonction $\varepsilon\chi$ vérifie la propriété (4.1). Il suit que

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \sup_{\chi \text{ étagée positive et vérifiant (4.1)}} \int_X \chi \mathrm{d}\mu\,.$$

Soit χ une fonction étagée positive vérifiant (4.1), on pose

$$E_n := \{x \in X\,;\ f_n(x) \geq \chi(x)\}\ .$$

L'ensemble E_n est mesurable du fait que les fonctions χ et f_n le sont. Par monotonie,

$$\int_X f_n \mathrm{d}\mu \geq \int_{E_n} f_n \mathrm{d}\mu \geq \int_{E_n} \chi \mathrm{d}\mu\,.$$

La suite des ensembles E_n est clairement croissante. De plus, la réunion des E_n est X. En effet, soit $x \in X$, ou bien $f(x) = 0$, alors $x \in E_n$ pour tout n, ou bien $f(x) > 0$ et alors comme par (4.1) on a $\chi(x) < f(x)$, au delà d'un certain rang, $f_n(x) \in]\chi(x), f(x)]$ c'est-à-dire $x \in E_n$.

On considère maintenant la mesure

$$A \longmapsto \int_A \chi \mathrm{d}\mu\,.$$

Par la propriété de continuité,

$$\int_{E_n} \chi \mathrm{d}\mu \longrightarrow \int_X \chi \mathrm{d}\mu \text{ lorsque } n \to \infty\,.$$

On en déduit

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu \geq \int_X \chi \mathrm{d}\mu$$

et en prenant le sup du membre de droite sur les fonctions étagées positives vérifiant (4.1), on obtient l'inégalité voulue. □

Ce théorème essentiel permet entre autres de montrer enfin la linéarité de l'intégrale des fonctions mesurables positives.

Corollaire 4.1. *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.*

1. *Soit f et g deux fonctions mesurables positives et α et β deux réels positifs, alors*

$$\int_X (\alpha f(x) + \beta g(x)) \mathrm{d}\mu(x) = \alpha \int_X f(x) \mathrm{d}\mu(x) + \beta \int_X g(x) \mathrm{d}\mu(x)\,.$$

2. *Le résultat précédent est encore vrai si on prend $\alpha, \beta \in [0, \infty]$.*

3. *Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives,*

$$\int_X \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\right) \mathrm{d}\mu(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

4. *Soit f une fonction mesurable positive, l'application*

$$A \in \mathcal{T} \longmapsto \int_A f(x)\mathrm{d}\mu(x)$$

est une mesure sur $\mathcal{T}$.

Preuve. La première partie est une conséquence de la linéarité pour les fonctions étagées positives, du fait que toute fonction mesurable positive est limite croissante de fonctions étagées positives et du théorème de convergence monotone. Pour la seconde partie, on applique la linéarité à la suite des sommes partielles et on passe à la limite à l'aide du théorème de convergence monotone. □

On pourra ici traiter l'Exercice 4.2 qui illustre le fait que l'analogue du Théorème de Beppo Levi avec une suite décroissante est faux. En revanche on a le théorème suivant :

Théorème 4.3. *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives. On pose*

$$f := \lim_{n\to\infty} f_n\,.$$

Si

$$\int_X f_0(x)\mathrm{d}\mu(x) < +\infty$$

alors

$$\int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

Il s'agit en fait d'un cas particulier du théorème de convergence dominée de Lebesgue que l'on va voir dans la section suivante.

Théorème 4.4 (de Fatou)**.** *Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives sur un espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu)$, alors*

$$\int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}\mu(x) \le \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

Preuve. La limite inf de la suite $\{f_n\}_n$ est la limite croissante de la suite $\{g_k\}_k$:

$$g_k(x) := \inf_{n\ge k} f_n(x)\,.$$

Par le théorème de convergence monotone, on a donc

$$\int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{k\to+\infty} \int_X g_k(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

En utilisant la monotonie de l'intégrale, on a pour tout $n \geq k$,

$$\int_X g_k(x)\mathrm{d}\mu(x) \leq \int_X f_n(x)\mathrm{d}\mu(x)\,,$$

d'où

$$\int_X g_k(x)\mathrm{d}\mu(x) \leq \inf_{n\geq k} \int_X f_n(x)\mathrm{d}\mu(x)$$

et on en conclut

$$\begin{aligned}\int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}\mu(x) &= \lim_{k\to+\infty} \int_X g_k(x)\mathrm{d}\mu(x)\\ &\leq \lim_{k\to+\infty}\inf_{n\geq k} \int_X f_n(x)\mathrm{d}\mu(x) = \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.\end{aligned}$$

D'où le théorème. □

Avec le matériel à notre disposition, on peut donner des exemples explicites de calcul d'intégrales pour certaines mesures simples. En voici deux.

Théorème 4.5. *On munit $\mathbb{R}$ de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ sur laquelle on considère les mesures δ_a pour $a \in \mathbb{R}$ donné et*

$$\mu = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n\,.$$

Etant donné que la tribu sur $\mathbb{R}$ est la tribu de toutes les parties de $\mathbb{R}$, toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0,\infty]$ est $(\mathcal{P}(\mathbb{R}),\mathcal{B}([0,\infty])$-mesurable positive. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}\delta_a(x) = f(a)\,,$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\,.$$

Preuve. La démonstration est dans l'esprit de la résolution détaillée de l'Exercice 4.3 présentée en Section 4.8.

- Commençons par la première intégrale. On distingue deux cas.

  1. Premier cas : $f(a) < \infty$. On considère alors la fonction

  $$\chi(x) = f(a)\mathbf{1}_{\{a\}}(x)\,.$$

  C'est une fonction étagée positive sur $\mathbb{R}$ et elle est δ_a-presque partout égale à f, car les négligeables pour δ_a sont les parties de $\mathbb{R}$ ne contenant pas $\{a\}$ et χ coincide avec f sur $\{a\}$. On a donc

  $$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}\delta_a(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi(x)\delta_a(x)$$

  et par définition de l'intégrale des fonctions étagées positives

  $$\int_{\mathbb{R}} \chi(x)\delta_a(x) = f(a)\delta_a(\{a\}) = f(a)\,.$$

2. Second cas : $f(a) = \infty$. On considère alors la suite $(\chi_n)_n$ de fonctions étagées positives définies par
$$\chi_n = n\mathbf{1}_{\{a\}}\,.$$
Chaque χ_n est étagée positive et inférieure à f, donc
$$\int_{\mathbb{R}} \chi_n(x)\mathrm{d}\delta_a(x) = n\delta_a(\{a\}) = n\,.$$
Il suit que
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}\delta_a(x) \geq n \ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$
On en déduit que
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}\delta_a(x) = \infty = f(a)\,.$$
Ceci conclut le calcul de la première intégrale.

- Pour la seconde intégrale, on adopte une approche similaire. On distingue deux cas.

1. Premier cas : f est finie sur les entiers relatifs, i.e. $f(n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On considère alors la suite de fonctions étagées positives $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définies par
$$\phi_k = \sum_{n=-k}^{k} f(n)\mathbf{1}_{\{n\}}\,.$$
Il s'agit d'une suite de fonctions étagées positives qui tend en croissant vers la fonction
$$\chi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\mathbf{1}_{\{n\}}\,.$$
Comme la fonction χ coincide avec f sur tous les entiers, elle est égale à f μ-presque partout, car les négligeables pour la mesure μ sont les parties de $\mathbb{R}$ ne contenant aucun entier. On a donc d'une part
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi(x)\mathrm{d}\mu(x)$$
et d'autre part, par le Théorème de Beppo Levi,
$$\int_{\mathbb{R}} \chi(x)\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_k(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$
L'intégrale des ϕ_k se calcule en appliquant la définition de l'intégrale des fonctions étagées positives. On a
$$\int_{\mathbb{R}} \phi_k(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{n=-k}^{k} f(n)\mu(\{n\}) = \sum_{n=-k}^{k} f(n)\,.$$

On conclut que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_k(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\,.$$

2. Second cas : il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $f(n_0) = \infty$. On considère alors la suite $(\chi_n)_n$ de fonctions étagées positives définies par

$$\chi_n = n\mathbf{1}_{\{n_0\}}\,.$$

Chaque χ_n est étagée positive et inférieure à f, donc

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_n(x)\mathrm{d}\mu(x) = n\mu(\{n_0\}) = n\,.$$

Il suit que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}\mu(x) \geq n \;\forall n \in \mathbb{N}\,.$$

On en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \infty = f(n_0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\,.$$

Ceci conclut la preuve du théorème. □

4.2 Intégrale des fonctions réelles ou complexes

Définition 4.5. *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{C}$ une application.*

- *On dira que f est intégrable si :*

  1. *f est mesurable pour les tribus $\mathcal{T}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{C})$;*
  2. *$\int_X |f(x)|\mathrm{d}\mu(x) < \infty$.*

- *Si f est intégrable à valeurs réelles, on définit alors l'intégrale de f sur X par*

$$\int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X f^+(x)\mathrm{d}\mu(x) - \int_X f^-(x)\mathrm{d}\mu(x)\,,$$

où f^+ et f^- sont respectivement la partie positive et la partie négative de f, définies par

$$f^+ = \max(0, f)\,,\ \ f^- = -\min(f, 0)\,.$$

- *Si f est intégrable à valeurs complexes, on définit alors l'intégrale de f sur X par*

$$\int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X (Re\ f)(x)\mathrm{d}\mu(x) + i\int_X (Im\ f)(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

Définition 4.6. *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. L'ensemble des fonctions complexes intégrables sur X sera noté $\mathcal{L}^1(X\,;\ \mathrm{d}\mu)$.*

Remarque 4.1.

- Une fonction $f\ :\ (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ est mesurable si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont mesurables de $(X, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
- Une fonction $f\ :\ (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable si et seulement si les fonctions positives $f^+ = \max(0, f)$, $f^- = -\min(f, 0)$ sont mesurables.
- On voit en particulier que si f à valeurs réelles est mesurable, alors $|f| = f^+ + f^-$ est mesurable. Et si f à valeurs complexes est mesurable, alors $|f|$ est mesurable. Bien sûr la réciproque de ces deux implications est fausse.

La proposition suivante est une conséquence de la linéarité de l'intégrale des fonctions mesurables positives et de la définition de l'intégrale des fonctions intégrables à partir des intégrales des parties positives et négatives de leurs parties réelle et imaginaire.

Proposition 4.3. *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $\mathcal{L}^1(X\,;\ \mathrm{d}\mu)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. L'application*

$$f \longmapsto \int_X f \mathrm{d}\mu$$

est une forme $\mathbb{C}$-linéaire sur $\mathcal{L}^1(X\,;\ \mathrm{d}\mu)$ et vérifie

$$\left| \int_X f \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f| \mathrm{d}\mu\,.$$

Remarque 4.2. On a vu que l'intégrale sur une partie mesurable et de mesure nulle d'une fonction mesurable positive est toujours nulle. Il suit que toute fonction mesurable est intégrable sur toute partie mesurable de mesure nulle et que son intégrale sur une telle partie vaut zéro. En particulier, on peut considérer des fonctions qui ne sont pas définies sur des parties de mesure nulle, ceci ne posera pas de problème pour étudier leur intégrabilité. Les fonctions définies presque partout sont des objets naturels pour l'intégrale de Lebesque.

Le résultat suivant est évident mais est très utile pour étudier l'intégrabilité d'une fonction mesurable.

Proposition 4.4 (critère d'intégrabilité par comparaison)**.** *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f\ :\ X \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable pour les tribus $\mathcal{T}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{C})$.*

- *S'il existe une fonction g positive et intégrable sur X telle que $|f(x)| \leq g(x)$ presque partout sur X, alors f est intégrable sur X.*
- *S'il existe une fonction g mesurable positive telle que*

$$\int_X g(x) \mathrm{d}\mu(x) = +\infty$$

et $|f(x)| \geq g(x)$ presque partout sur X, alors f n'est pas intégrable sur X.

Théorème 4.6 (de convergence dominée de Lebesgue). *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. On considère une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions complexes mesurables. On suppose que :*

1. *il existe une fonction $g \geq 0$ intégrable sur X telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
$$|f_n(x)| \leq g(x) \;\; \mu - \textit{presque partout} \;;$$
2. *pour presque tout x, la suite $(f_n(x))_n$ converge dans $\mathbb{C}$, on note*
$$\tilde{f}(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$
et $\tilde{f}$ est alors une fonction définie presque partout sur X ;

alors on a les deux conclusions suivantes :

1. *il existe une fonction $f \in \mathcal{L}^1(X\,;\; \mathrm{d}\mu)$ égale presque partout à $\tilde{f}$;*
2. *$\int_X |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}\mu(x) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ et en particulier*
$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

Remarque 4.3. Si la suite (f_n) converge en tout point de X, alors les fonctions $\tilde{f}$ et f sont les mêmes.

Preuve du théorème de Lebesgue. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note
$$N_n = \{x \in X\,;\; |f_n(x)| > g(x)\}\,.$$
Les N_n sont mesurables du fait que les fonctions f_n sont mesurables ainsi que g. Soit M une partie de X négligeable et mesurable telle que pour tout $x \notin M$, la suite $f_n(x)$ converge vers $f(x)$. On pose
$$N = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n\right) \bigcup M\,.$$
L'ensemble N est de mesure nulle comme réunion dénombrable de parties mesurables négligeables. On définit la fonction f sur X par
$$f(x) = \left|\begin{array}{lll} \tilde{f}(x) & \text{si} & x \notin N\,, \\ 0 & \text{si} & x \in N\,. \end{array}\right.$$
La fonction $f = f\mathbf{1}_{X\setminus N}$ est mesurable comme limite des fonctions mesurables $f_n\mathbf{1}_{X\setminus N}$. Pour $x \notin N$, on a $|f_n(x)| \leq g(x)$ et $f_n(x) \to f(x)$, d'où $|f(x)| \leq g(x)$. Il suit que f est intégrable sur X.

Pour montrer le second point, on va utiliser le théorème de Fatou sur $X \setminus N$. On considère la suite de fonctions
$$\phi_n = 2g - |f - f_n|\,.$$

La suite ϕ_n est positive et tend vers $2g$ sur $X \setminus N$ lorsque $n \to \infty$. Par le théorème de Fatou,

$$\int_{X\setminus N} 2g\mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to+\infty} \int_{X\setminus N} \phi_n \mathrm{d}\mu = \int_{X\setminus N} 2g\mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to+\infty} \int_{X\setminus N} |f - f_n|\mathrm{d}\mu \,.$$

Il suit que

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_{X\setminus N} |f - f_n|\mathrm{d}\mu = 0$$

et comme l'ensemble N est négligeable, le même réultat est vrai avec l'intégrale sur X au lieu de $X \setminus N$. Enfin, pour une suite positive, dire que sa limite supérieure est nulle revient à dire que sa limite est nulle. □

4.3 Intégrales des fonctions à une variable

Notation. Lorsqu'on travaille avec la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}^n$, on note fréquemment $\mathrm{d}x$ au lieu de $\mathrm{d}\lambda(x)$.

Le résultat fondamental faisant le lien entre l'intégrale de Lebesgue et celle de Riemann est le théorème suivant :

Théorème 4.7. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et soit F une primitive de f. Alors f est intégrable sur $[a, b]$ et*

$$\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \,.$$

Avant d'énoncer un corollaire important de ce résultat, commençons par rappeler la définition d'une fonction continue par morceaux.

Définition 4.7. *Soit $-\infty < a < b < +\infty$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision de $[a, b]$ en intervalles $[a_i, a_{i+1}]$, $0 \le i \le n-1$, avec $a = a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < a_n = b$, telle que :*

- *f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$ pour tout $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$;*
- *f admet une limite finie à gauche en tout point a_i, $1 \le i \le n$ et une limite finie à droite en tout point a_i, $0 \le i \le n-1$ (autrement dit, f admet en les a_i des discontinuités de première espèce).*

Corollaire 4.2. *Toute fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$ et son intégrale de Lebesgue coïncide avec son intégrale au sens de Riemann, c'est-à-dire :*

$$\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \,.$$

Preuve du théorème 4.7. Tout d'abord, la continuité de f sur $[a,b]$ entraine que f est mesurable et bornée sur $[a,b]$, i.e. il existe $C>0$ telle que, pour tout $x\in[a,b]$, on ait $|f(x)|\le C$. Il suit que

$$\int_{[a,b]}|f(x)|\mathrm{d}x \le C\int_{[a,b]}\mathrm{d}x = C\lambda([a,b]) = C(b-a) < +\infty\,,$$

La fonction f est donc bien intégrable sur $[a,b]$. On considère maintenant la fonction G définie sur $[a,b]$ par

$$G(x) := \int_{[a,x]} f(t)\mathrm{d}t\,.$$

Pour $x\in[a,b[$ et $l>0$ tel que $x+l\in[a,b]$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{G(x+l)-G(x)}{l} &= \frac{1}{l}\int_{[x,x+l]} f(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{l}\int_{[x,x+l]} f(x)\mathrm{d}t + \frac{1}{l}\int_{[x,x+l]}\left(f(t)-f(x)\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{l}f(x)\lambda([x,x+l]) + \frac{1}{l}\int_{[x,x+l]}\left(f(t)-f(x)\right)\mathrm{d}t \\
&= f(x) + \frac{1}{l}\int_{[x,x+l]}\left(f(t)-f(x)\right)\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{G(x+l)-G(x)}{l} - f(x)\right| &\le \frac{1}{l}\int_{[x,x+l]}|f(t)-f(x)|\,\mathrm{d}t \\
&\le \frac{1}{l}\left(\sup_{t\in[x,x+l]}|f(t)-f(x)|\right)\lambda([x,x+l]) \\
&= \sup_{t\in[x,x+l]}|f(t)-f(x)|\;.
\end{aligned}$$

Par continuité de f, ce dernier terme tend vers 0 lorsque $l\to 0$. On peut bien sûr effectuer le même raisonnement pour $l<0$. On en déduit que G est dérivable sur $[a,b]$ et que $G'=f$. Il suit donc que G et F diffèrent simplement par une constante, autrement dit,

$$F(b)-F(a) = G(b)-G(a)\,.$$

Comme de plus

$$G(b) = \int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x$$

et

$$G(a) = \int_{\{a\}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\{a\}} f(a)\mathrm{d}x = f(a)\lambda(\{a\}) = 0\,,$$

on a bien le résultat voulu. $\square$

Le théorème 4.7 ainsi que le théorème de Beppo Levi nous donnent un moyen pratique d'étudier l'intégrabilité d'une fonction continue, ou continue par morceaux, sur $\mathbb{R}$: soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction continue, ou continue par morceaux, on note pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n = f.\mathbf{1}_{[-n,n]}$. La suite $\{|g_n|\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives tendant vers $|f|$ lorsque $n \to +\infty$. Donc

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} |g_n(x)|\mathrm{d}x\,.$$

On calcule alors l'intégrale de g_n en écrivant

$$\int_{\mathbb{R}} |g_n(x)|\mathrm{d}x = \int_{-n}^{n} |f(x)|\mathrm{d}x$$

et en utilisant les méthodes habituelles pour calculer cette dernière intégrale. On étudie enfin la limite des intégrales des fonctions $|g_n|$; la fonction f sera intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si la limite est finie.

Dans le cas où f est intégrable sur $\mathbb{R}$, on peut calculer son intégrale sur $\mathbb{R}$ à l'aide du Théorème de convergence dominée. En effet, la suite $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f sur $\mathbb{R}$, de plus, on a

$$|g_n(x)| \leq |f(x)| \ \forall x \in \mathbb{R}$$

et $|f|$ est à valeurs positives et intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc, par le Théorème de convergence dominée :

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\mathrm{d}x \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x \text{ lorsque } n \to +\infty\,.$$

D'autre part,

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\mathrm{d}x = \int_{-n}^{n} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

On calcule ces dernières intégrales par les techniques dont on a l'habitude, puis on calcule leur limite et on trouve ainsi l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$.

A noter que dans le cas où f est à valeurs positives, la première étape du raisonnement suffit à calculer l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$.

On peut de façon analogue étudier l'intégrabilité et selon le cas calculer l'intégrale, de fonction continues, ou continues par morceaux, sur

1. $[a, +\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$,

2. $]-\infty, a]$, où $a \in \mathbb{R}$,

3. $[a, b[$, où $-\infty < a < b < +\infty$,

4. ou $]a, b]$, où $-\infty < a < b < +\infty$.

On définit respectivement la suite $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans chacun des cas par :

1. $g_n(x) := f(x)\mathbf{1}_{[a,n]}(x)$, pour n assez grand,
2. $g_n(x) := f(x)\mathbf{1}_{[-n,a]}(x)$, pour n assez grand,
3. $g_n(x) := f(x)\mathbf{1}_{[a,b-\frac{1}{n}]}(x)$, pour n assez grand,
4. $g_n(x) := f(x)\mathbf{1}_{[a+\frac{1}{n},b]}(x)$, pour n assez grand,

le raisonnement est alors identique. En application de ces remarques, voici un théorème fondamental.

Théorème 4.8.

- $$\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})\,, \tag{4.2}$$
- $$\text{soit } a>0 \text{ donné}\,,\ \text{pour } \alpha\in\mathbb{R}\,,\ \frac{1}{x^\alpha} \in \mathcal{L}^1(]a,+\infty[) \Leftrightarrow \alpha>1\,, \tag{4.3}$$
- $$\text{soit } a>0 \text{ donné}\,,\ \text{pour } \alpha\in\mathbb{R}\,,\ \frac{1}{x^\alpha} \in \mathcal{L}^1(]0,a[) \Leftrightarrow \alpha<1\,, \tag{4.4}$$
- $$\text{quel que soit } \alpha\in\mathbb{R}\,,\ \frac{1}{x^\alpha} \notin \mathcal{L}^1(]0,+\infty[)\,. \tag{4.5}$$

Preuve. Nous appliquons la technique générale décrite ci-dessus et nous en reprenons les notations.

- Preuve de (4.2). La fonction f est

$$f\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}^+\,,\ f(x)=\frac{1}{1+x^2}\,,$$

et pour $k\in\mathbb{N}^*$, la fonction g_k est définie par

$$g_k(x)=\mathbf{1}_{[-k,k]}(x)f(x)\,.$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, on peut donc appliquer les remarques précédentes. Elle est de plus à valeurs positives.

$$\int_{\mathbb{R}}|g_k(x)|\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}g_k(x)\mathrm{d}x=\int_{-k}^{k}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=[\arctan x]_{-k}^{k}=2\arctan k\,.$$

Donc

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}|g_k(x)|\mathrm{d}x=2\lim_{k\to+\infty}\arctan k=\pi<+\infty\,.$$

Donc la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

- Preuve de (4.3). On a

$$f_\alpha\ :\ ]a,+\infty[\to\mathbb{R}^+\,,\ f_\alpha(x)=\frac{1}{x^\alpha}\,,$$
$$\text{pour } k\in\mathbb{N}^* \text{ assez grand}\,,\ g_k(x)=\mathbf{1}_{]a,k]}(x)f(x)\,.$$

La fonction f est continue sur $]a, +\infty[$, on peut donc appliquer les remarques précédentes. De plus, elle est à valeurs positives.

$$\int_{\mathbb{R}} |g_k(x)|\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g_k(x)\mathrm{d}x = \int_a^k \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}\,,$$

donc si $\alpha \neq 1$,

$$\int_{\mathbb{R}} |g_k(x)|\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_a^k = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right).$$

Si $\alpha > 1$, alors $\alpha - 1 > 0$ et donc

$$\int_{\mathbb{R}} |g_k(x)|\mathrm{d}x \longrightarrow \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{a^{\alpha-1}} < +\infty \text{ lorsque } k \to +\infty\,,$$

alors que si $\alpha < 1$, $\alpha - 1 < 0$ et donc $1/(k^{\alpha-1}) \to +\infty$ lorsque $k \to +\infty$, d'où,

$$\int_{\mathbb{R}} |g_k(x)|\mathrm{d}x \longrightarrow +\infty \text{ lorsque } k \to +\infty\,.$$

Donc, $f_\alpha \in \mathcal{L}^1(]a, +\infty[)$ si et seulement si $\alpha > 1$. La preuve de (4.4) est laissée en exercice, quant à (4.5), c'est une conséquence immédiate de (4.3) et (4.4). Ceci conclut la preuve du théorème. $\square$

4.4 Conséquences du théorème de Lebesgue

On considère $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et Y un espace métrique. Soit $A \in \mathcal{T}$ et $f : A \times Y \to \mathbb{C}$, on considère la fonction suivante sur Ω

$$F(t) = \int_A f(x,t)\mathrm{d}\mu(x)\,,\ t \in Y\,.$$

Le théorème de Lebesgue permet de montrer sous des hypothèses relativement simples la continuité et la dérivabilité de F sur Ω.

On commence par énoncer un théorème de continuité en un point t_0 donné.

Théorème 4.9 (Continuité en un point)**.** *Soit $t_0 \in Y$. On suppose que :*

1. *pour tout $t \in Y$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est mesurable pour les tribus $\mathcal{T}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{C})$;*
2. *pour presque tout $x \in A$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue en t_0 ;*
3. *il existe une fonction $g : A \to [0, +\infty]$ intégrable sur A telle que pour chaque $t \in Y$*

$$|f(x,t)| \leq g(x) \text{ p.p. sur } A\,,$$

alors F est bien définie sur Y et continue en t_0.

Preuve. Les hypothèses 1. et 3. impliquent que $x \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur A pour tout $t \in Y$ et donc que F est bien définie sur Y. Si maintenant on considère une suite $\{\tau_n\}_n$ dans Y qui converge vers t_0, par l'hypothèse 2. la suite de fonctions f_n définie par

$$f_n(x) := f(x, \tau_n)$$

converge presque partout vers $f(x,t_0)$. De plus la convergence est dominée d'après l'hypothèse 3. Le théorème de convergence dominée entraîne que $F(\tau_n) \to F(t_0)$. $\square$

Pour la dérivabilité, on considère le cas d'une variable réelle. Si on veut considérer une variable vectorielle (dans $\mathbb{R}^n$), on peut d'abord montrer l'existence de dérivées partielles puis montrer la différentiabilité ou la classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème 4.10 (Dérivabilité en un point)**.** *On suppose que $Y = I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $t_0 \in I$. S'il existe une partie négligeable N de A telle que f vérifie les hypothèses suivantes*

1. *pour tout $t \in I$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est mesurable pour les tribus $\mathcal{T}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ et il existe $t_1 \in I$ tel que l'application $x \mapsto f(x,t_1)$ soit intégrable sur A,*
2. *pour tout $x \in A \setminus N$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable en t_0,*
3. *il existe une fonction $g : A \to [0,+\infty]$ intégrable sur A telle que pour chaque $t \in Y$*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x) \ \forall x \in A \setminus N\,,$$

alors F est bien définie sur I, est dérivable en t_0 et

$$F'(t_0) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

Remarque 4.4. A noter qu'il y a une légère imprécision dans l'énoncé de ce théorème. La fonction $x \to \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$ n'est en fait pas a priori définie sur tout A mais sur $A \setminus N$, qui de plus n'a pas de raison d'être un ensemble mesurable. Quitte à élargir un peu N, on peut le supposer négligeable et mesurable et on devrait alors écrire

$$F'(t_0) = \int_{A \setminus N} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

L'écriture adoptée dans le théorème est plus simple mais sous-entend qu'on a défini la fonction $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$ aux points de N, par exemple en imposant qu'elle soit nulle sur N. Comme N est négligeable, le choix des valeurs de $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$ en les $x \in N$ ne change pas l'intégrale, tant qu'on ne remet pas la mesurabilité en question.

Preuve du Theorème 4.10. Les propriétés 1. et 3. combinées avec le Théorème des accroissements finis entrainent que pour tout $t \in I$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur A, donc F est bien définie sur I. En effet, pour tout $t \in I$ et pour tout $x \in A \setminus N$, on a

$$\begin{aligned} |f(x,t)| &\leq |f(x,t_1)| + \sup_{\tau \in (t_1,t)} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x,\tau) \right| \\ &\leq |f(x,t_1)| + |t - t_1| g(x) \end{aligned}$$

et le majorant est intégrable sur A comme somme de fonctions intégrables.

On considère une suite $\{\tau_n\}_n$ dans Y qui converge vers t_0. La suite de fonctions

$$\phi_n(x) := \frac{f(x,\tau_n) - f(x,t_0)}{\tau_n - t_0}$$

converge presque partout vers $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$. De plus la convergence est dominée car pour tout $x \in A \setminus N$, par le Théorème des accroissements finis,

$$|\phi_n(x)| \leq \sup_{t \in (\tau_n,t_0)} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \right| \leq g(x)\,.$$

Le théorème suit donc du Théorème de Lebesgue. □

Remarque 4.5. Il y a une différence importante entre le théorème de continuité et le théorème de dérivation : dans le second l'ensemble négligeable sur lequel les hypothèses de dérivabilité et de domination ne sont pas satisfaites ne doit pas dépendre de t ; alors que dans le théorème de continuité, on autorise la dépendance par rapport à t de l'ensemble négligeable sur lequel la continuité ou la domination ne sont pas vraies. Ceci est essentiellement dû à l'utilisation de l'inégalité des accroissements finis qui nécessite de majorer le sup sur un intervalle de la dérivée par rapport à t. Un intervalle étant non dénombrable, si on devait pour chaque t retirer un ensemble négligeable, leur réunion pour t variant sur l'intervalle risquerait de ne plus être négligeable. En particulier, le théorème de dérivation ne s'applique pas à la primitive d'une fonction intégrable

$$F(t) := \int_{[t_0,t]} f(s)\mathrm{d}s = \int_{[t_0,+\infty]} \mathbf{1}_{\{s \leq t\}}(t,s) f(s)\mathrm{d}s\,.$$

Une telle fonction n'est en général pas dérivable en tout point de $\mathbb{R}$. L'exemple typique est celui où f est l'indicatrice d'un intervalle. Prenons le cas $f = \mathbf{1}_{[0,1]}$. L'application

$$t \mapsto \mathbf{1}_{\{s \leq t\}}(t,s) f(s) = \left\{ \begin{array}{rl} 0 & \text{si} \quad t < s\,, \\ f(s) & \text{si} \quad t \geq s\,, \end{array} \right.$$

est dérivable sauf en deux points mais qui bougent continûment avec s et c'est précisément ce qui fait qu'on ne peut pas appliquer le théorème de dérivabilité.

On peut aussi énoncer des théorèmes de continuité et de dérivabilité globaux, qui suivent directement des deux théorèmes de continuité et de dérivabilité en un point.

Théorème 4.11 (Continuité globale)**.** *On reprend le cadre du Théorème 4.9. On suppose que :*

1. *pour tout $t \in Y$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est mesurable pour les tribus $\mathcal{T}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{C})$;*
2. *pour presque tout $x \in A$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur Y ;*
3. *il existe une fonction $g : A \to [0,+\infty]$ intégrable sur A telle que pour chaque $t \in Y$*

$$|f(x,t)| \leq g(x) \text{ p.p. sur } A\,,$$

alors F est bien définie et continue sur Y.

Théorème 4.12 (Dérivabilité globale)**.** *On reprend le cadre du Théorème 4.10. S'il existe une partie négligeable N de A telle que f vérifie les hypothèses suivantes*

1. *pour tout $t \in Y$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est mesurable pour les tribus $\mathcal{T}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ et il existe $t_1 \in I$ tel que l'application $x \mapsto f(x,t_1)$ soit intégrable sur A,*
2. *pour tout $x \in A \setminus N$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur I,*
3. *il existe une fonction $g : A \to [0,+\infty]$ intégrable sur A telle que pour chaque $t \in Y$*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x) \ \forall x \in A \setminus N\,,$$

alors F est bien définie sur I, est dérivable sur I et pour tout $t \in I$ on a

$$F'(t) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

Remarque 4.6. Là encore il y a une imprécision qui se résout en supposant que N est mesurable en plus d'être négligeable et en écrivant

$$F'(t) = \int_{A\setminus N} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

Des théorèmes de continuité et de dérivabilité de séries de fonctions peuvent être énoncés comme cas particuliers des théorèmes de continuité et de dérivabilité d'intégrales à paramètre ci-dessus, en considérant $A = \mathbb{N}$ muni de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et de la mesure

$$\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_n\,.$$

Théorème 4.13 (Continuité d'une série de fonctions)**.** *Soit Y un espace métrique muni de sa tribu Borélienne et soit $t_0 \in Y$. On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur Y à valeurs dans $\mathbb{C}$. On pose*

$$F(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \,.$$

On suppose que :

1. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est continue en t_0 ;*
2. *il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs telle que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$$

   et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(t)| \leq a_n \ \forall t \in Y \,,$$

alors F est bien définie sur Y et continue en t_0.

Théorème 4.14 (Dérivabilité d'une série de fonctions)**.** *On suppose que $Y = I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, muni de sa tribu Borélienne. Soit $t_0 \in I$. On suppose que*

1. *il existe $t_1 \in I$ tel que la série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(t_1)|$$

   converge,

2. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est dérivable en t_0,*
3. *il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs telle que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$$

   et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n'(t)| \leq a_n \ \forall t \in Y \,,$$

alors F est bien définie sur I, est dérivable en t_0 et

$$F'(t_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(t_0) \,.$$

4.5 Le Théorème de Fubini

Dans toute cette partie, on considère $(X, \mathcal{S}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ deux espaces mesurés dont les mesures μ et ν sont σ-finies (voir définition 3.12).

4.5.1 Tribu produit, mesure produit

Définition 4.8. *On appelle rectangle une partie de $X \times Y$ de la forme $A \times B$ où $A \in \mathcal{S}$ et $B \in \mathcal{T}$. On appelle partie élémentaire une partie de $X \times Y$ qui est réunion finie de rectangles (ou de façon équivalente, réunion finie de rectangles disjoints).*

La proposition suivante est évidente :

Proposition 4.5. *L'ensemble des parties élémentaires est une algèbre notée $\mathcal{E}$. La tribu produit $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ est engendrée par $\mathcal{E}$.*

Sous certaines hypothèses, la tribu produit de tribus Boréliennes est la tribu Borélienne du produit (on a déjà vu un exemple d'une telle situation avec $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$).

Proposition 4.6. *Si X et Y sont des espaces topologiques, si on suppose de plus que X et Y admettent une base dénombrable d'ouverts, alors*

$$\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X \times Y)\,.$$

Preuve. Un ouvert de $X \times Y$ est réunion dénombrable de rectangles et donc $\mathcal{B}(X \times Y)$ est incluse dans $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ qui est la tribu engendrée par les rectangles. Soit maintenant $A \in \mathcal{B}(X)$ et $B \in \mathcal{B}(Y)$, alors $A \times B \in \mathcal{B}(X \times Y)$. En effet, comme la projection p_1 de $X \times Y$ sur X et la projection p_2 de $X \times Y$ sur Y sont continues, elles sont boréliennes et donc $A \times Y = p_1^{-1}(A)$ et $X \times B = p_2^{-1}(B)$ sont des Boréliens de $X \times Y$. Et comme $A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B)$, c'est bien un Borélien de $X \times Y$. On en déduit que $\mathcal{B}(X \times Y)$ contient $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$. $\square$

Une notion utile pour l'intégration sur l'ensemble produit $X \times Y$ est celle de "tranche verticale" et de "tranche horizontale".

Définition 4.9. *Soit $F \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$, soit $x \in X$ et $y \in Y$. On appelle "tranche verticale" de F associée à x, et on note $F_{(x,.)}$ le sous-ensemble de Y*

$$F_{(x,.)} := \{y \in Y\,;\ (x, y) \in F\}\ .$$

On appelle "tranche horizontale" de F associée à y, et on note $F_{(.,y)}$ la partie de X

$$F_{(.,y)} := \{x \in X\,;\ (x, y) \in F\}\ .$$

Proposition 4.7. *Soit $F \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$. Pour tout $x \in X$, la tranche verticale $F_{(x,.)}$ appartient à $\mathcal{T}$. De plus l'application $x \mapsto \nu(F_{(x,.)})$ est μ-mesurable. De même, pour tout $y \in Y$, la tranche horizontale $F_{(.,y)}$ appartient à $\mathcal{S}$. De plus l'application $y \mapsto \mu(F_{(.,y)})$ est ν-mesurable.*

Preuve. On suppose d'abord que $\nu(Y) < +\infty$ et on considère la famille $\Omega \subset \mathcal{S} \times \mathcal{T}$ des parties vérifiant les propriétés de la proposition. On va montrer que $\Omega = \mathcal{S} \times \mathcal{T}$.

1. Ω **contient les rectangles.** Soit $F = A \times B$, $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{T}$. Alors $F_{(x,.)} = B$ si $x \in A$ et $F_{(x,.)} = \emptyset$ sinon. Il suit que $\nu(F_{(x,.)}) = \nu(B)\mathbf{1}_A(x)$. Donc l'application $x \mapsto \nu(F_{(x,.)})$ est μ-mesurable du fait que $B \in \mathcal{T}$. On fait de même avec $y \mapsto \mu(F_{(.,y)})$.

2. Ω **contient les parties élémentaires.** Comme une partie élémentaire est réunion finie de rectangles disjoints, le résultat suit du précédent en faisant la somme des contributions de chaque rectangle.

3. Ω **est une classe monotone.** Commençons par montrer la stabilité par intersection dénombrable décroissante. Soit $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante dans Ω et $F = \cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Pour tout $x \in X$, on a

$$F_{(x,.)} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (F_n)_{(x,.)}$$

et donc $F_{(x,.)} \in \mathcal{T}$ car $\mathcal{T}$ est stable par intersection dénombrable. De plus, du fait que $\nu(Y) < +\infty$, on a

$$\nu(F_{(x,.)}) = \lim_{n\to+\infty} \nu((F_n)_{(x,.)}) \,.$$

L'application $x \mapsto \nu(F_{(x,.)})$ est donc mesurable comme limite de fonctions mesurables. La stabilité par réunion dénombrable croissante se prouve de la même façon mais on n'a pas besoin de $\nu(Y) < +\infty$. On conclut que Ω es une classe monotone qui contient l'ensemble des parties élémentaires. Par le théorème des classes monotones, on en déduit que Ω contient $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ et donc $\Omega = \mathcal{S} \times \mathcal{T}$. Ceci établit le résultat voulu dans le cas où $\nu(Y) < +\infty$.

Traitons maintenant le cas général. Comme la mesure ν est σ-finie, on peut écrire Y sous la forme

$$Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n \,,\ Y_i \cap Y_j = \emptyset \text{ si } i \neq j \,,\ \nu(Y_n) < +\infty \, \forall n \in \mathbb{N} \,.$$

Alors, pour $F \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$, F est l'union dénombrable disjointe des ensembles

$$F_n := F \cap (X \times Y_n)$$

et pour tout $x \in X$, $F_{(x,.)}$ est l'union dénombrable disjointe des $(F_n)_{(x,.)}$. Il suit que

$$\nu(F_{(x,.)}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu((F_n)_{(x,.)})$$

et donc l'application $x \mapsto \nu(F_{(x,.)})$ est mesurable comme somme dénombrable de fonctions mesurables. Ceci prouve la proposition. $\square$

Remarque 4.7. Une conséquence importante de ce résultat et du fait que

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

est la suivante : si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A_{(x,.)} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, $A_{(.,y)} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

A l'aide de la proposition précédente, nous pouvons définir deux fonctions positives sur la tribu produit $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$, qui sont en fait des mesures.

Proposition 4.8. *On définit sur $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ les deux fonctions à valeurs positives :*

$$\begin{aligned} \mu_\nu(A) &:= \int_X \nu(A_{(x,.)})\mathrm{d}\mu(x)\,, \\ \nu_\mu(A) &:= \int_Y \mu(A_{(.,y)})\mathrm{d}\nu(y)\,. \end{aligned}$$

Ce sont des mesures sur $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$.

Preuve. On fait la démonstration pour μ_ν, elle est identique pour ν_μ. On a de façon évidente que $\mu_\nu(\emptyset) = 0$. Reste à montrer la σ-additivité. Soit $\{A^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ deux à deux disjoints. Alors pour chaque $x \in X$, $\{A^n_{(x,.)}\}_n$ est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints. D'où

$$\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n_{(x,.)}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A^n_{(x,.)})\,.$$

On conclut par le Théorème de Beppo Levi qui permet d'intervertir série et intégrale pour des fonctions mesurables positives. □

En fait on a un résultat beaucoup plus fort.

Théorème 4.15. *Les mesures μ_ν et ν_μ sont les mêmes.*

Preuve du théorème 4.15. C'est une conséquence immédiate du théorème des classes monotones. Il suffit de vérifier que les deux mesures coïncident sur les rectangles. Mais pour un rectangle $A \times B$, on a de façon évidente

$$\mu_\nu(A \times B) = \nu_\mu(A \times B) = \mu(A)\nu(B)\,.$$

D'où le résultat. □

Définition 4.10. *On définit la mesure produit $\mu \times \nu$ par*

$$\mu \times \nu := \mu_\nu = \nu_\mu\,.$$

4.5.2 Le théorème de Fubini

Le théorème de Fubini va nous permettre de décomposer une intégrale pour la mesure produit $\mu \times \nu$ en deux intégrales imbriquées pour les mesures μ et ν. On commence par donner une version pour les fonctions mesurables positives.

Théorème 4.16 (de Fubini pour les fonctions mesurables positives)**.** *Soit $f : X \times Y \to [0, \infty]$ une fonction mesurable, alors :*

1. *la fonction de X dans $[0, \infty]$ qui à x associe $\int_Y f(x, y) \mathrm{d}\nu(y)$ est mesurable pour les tribus $\mathcal{S}$ et $\mathcal{B}([0, \infty])$;*
2. *la fonction de Y dans $[0, \infty]$ qui à y associe $\int_X f(x, y) \mathrm{d}\mu(x)$ est mesurable pour les tribus $\mathcal{T}$ et $\mathcal{B}([0, \infty])$;*
3. *on a l'égalité suivante*

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f(x, y) \mathrm{d}\mu \times \nu(x, y) &= \int_Y \left(\int_X f(x, y) \mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y) \\ &= \int_X \left(\int_Y f(x, y) \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) \,. \end{aligned}$$

Preuve. Tout le travail a déjà été fait. Tout d'abord, on montre que le théorème est vrai pour les fonctions étagées positives. Pour les fonctions indicatrices, les points 1. et 2. sont donnés par la proposition 4.7 et le point 3. par le théorème 4.15. Le théorème suit pour les fonctions étagées positives par linéarité. Et comme toute fonction mesurable positive est limite monotone de fonctions étagées positives, les points 1. et 2. sont vrais pour les fonctions mesurables positives et le point 3. aussi par le théorème de Beppo Levi. □

On donne maintenant la version générale du théorème de Fubini qui est aussi bien un critère d'intégrabilité pour la mesure produit qu'une méthode de calcul d'intégrale pour cette mesure.

Théorème 4.17 (de Fubini)**.** *Soit $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y ;\ \mu \times \nu)$ *;*

(ii) la fonction $x \mapsto \int_Y |f(x, y)| \mathrm{d}\nu(y)$ est intégrable sur X pour la mesure μ ;

(iii) la fonction $y \mapsto \int_X |f(x, y)| \mathrm{d}\mu(x)$ est intégrable sur Y pour la mesure ν.

De plus, sous ces hypothèses, on a l'égalité

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f(x, y) \mathrm{d}\mu \times \nu(x, y) &= \int_Y \left(\int_X f(x, y) \mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y) \\ &= \int_X \left(\int_Y f(x, y) \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) \,. \end{aligned}$$

Et bien sûr, pour toute partie $A \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$,

$$\begin{aligned}\int_A f(x,y)\mathrm{d}\mu \times \nu(x,y) &= \int_Y \left(\int_{A_{(.,y)}} f(x,y)\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y) \\ &= \int_X \left(\int_{A_{(x,.)}} f(x,y)\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) \,.\end{aligned}$$

Preuve. Le théorème de Fubini pour les fonctions mesurables positives donne

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} |f(x,y)|\mathrm{d}\mu \times \nu(x,y) &= \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y) \\ &= \int_X \left(\int_Y |f(x,y)|\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) \,.\end{aligned}$$

L'équivalence $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$ suit. L'égalité des intégrales pour f s'obtient alors en décomposant f en partie réelle et imaginaire puis chaque partie en partie positive et négative. □

4.6 Changement de variable

C'est un outil pour le calcul d'intégrales sur des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Lorsqu'on fait un changement de variables, on applique un difféomorphisme Φ entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Supposons qu'on veuille intégrer une fonction f sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et qu'il existe un difféomorphisme Φ d'un ouvert D de $\mathbb{R}^n$ sur Ω tel que la fonction $f \circ \Phi$ soit, pour une raison ou une autre, plus agréable à intégrer que f. Sur Ω on a la mesure de Lebesgue λ, on va naturellement pouvoir écrire la formule

$$\int_\Omega f(y)\mathrm{d}\lambda(y) = \int_D f \circ \Phi(x)\mathrm{d}\Phi^*(\lambda)(x)$$

où $\Phi^*(\lambda)$ est la mesure Borélienne sur D définie, pour par : pour tout $A \in \mathcal{B}(D)$,

$$\Phi^*(\lambda)(A) = \lambda(\Phi(A)) \,.$$

A noter que cette définition a un sens car Φ étant un difféomorphisme, $\Phi(A)$ est un Borélien de Ω, ceci n'est pas vrai pour une fonction quelconque, Φ doit au moins être un homéomorphisme que que cette propriété soit valable.

La mesure $\Phi^*(\lambda)$ s'appelle l'**image inverse de λ par** Φ. Toute la question est de savoir à quoi ressemble $\Phi^*(\lambda)$. La réponse, donnée par le théorème fondamental suivant, est

$$\mathrm{d}\Phi^*(\lambda)(x) = |\mathrm{det}J(\Phi)(x)|\mathrm{d}\lambda(x) \,,$$

c'est-à-dire que $\Phi^*(\lambda)$ est le produit local de la mesure de Lebesgue par une "densité", en l'occurence le déterminant Jacobien de Φ en chaque point de D.

Théorème 4.18. *Soit D et Ω deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, $\Phi : D \to \Omega$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.*

- *Soit $f : \Omega \to [0, \infty]$ une fonction positive mesurable. Alors*

$$\int_\Omega f(y)\mathrm{d}y = \int_D f \circ \Phi(x)\,|\det J(\Phi)(x)|\mathrm{d}x\,. \tag{4.6}$$

- *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. Alors f est intégrable sur Ω si et seulement si $f \circ \Phi\,|\det J(\Phi)|$ est intégrable sur D. De plus, si f est intégrable sur Ω, on a l'égalité* (4.6)*.*

La preuve de ce théorème est longue et technique, nous renvoyons aux excellents livres de Mark Brianne et Gilles Pagès [1] et de François Laudenbach [2].

Remarque 4.8. La formule de changement de variable donnée ci-dessus semble différente de celle dont on a l'habitude dans le cadre de l'intégrale de Riemann :

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(y)\mathrm{d}y = \int_a^b f \circ \phi(x)\phi'(x)\mathrm{d}x$$

dans laquelle apparaît $\phi'(x)$ et non pas $|\phi'(x)|$. Mais en supposant que $a < b$, on voit que si $\phi' < 0$, alors $\phi(b) < \phi(a)$ et le terme de gauche change aussi de signe. L'intégrale de Lebesgue ne tient pas compte d'un sens de parcours d'un intervalle d'intégration, elle n'est pas orientée. L'orientation dans l'intégrale de Riemann n'est d'ailleurs en rien naturelle ni utile.

Remarque 4.9. Souvent, on ne pourra pas faire de changement de variable sur tout le domaine, mais seulement en dehors d'une partie négligeable. C'est le cas de façon à peu près systématique lorsqu'on effectue des changements de variables en coordonnées polaires, cylindriques ou sphériques.

4.6.1 Coordonnées polaires

Les coordonnées polaires d'un point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ sont les nombres $r \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que

$$x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta\,.$$

On considère l'ouvert de $\mathbb{R}^2$

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x \geq 0\,,\ y = 0\right\}\,,$$

le domaine

$$D =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$$

et la fonction

$$\Phi :\ D \longrightarrow \Omega\,,\ \Phi(r, \theta) = (r\cos\theta\,,\ r\sin\theta)\ .$$

Proposition 4.9. *Φ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de D sur Ω.*

Preuve. Φ est clairement $\mathcal{C}^\infty$ sur D et bijective de D sur Ω. De plus, pour tout $(r,\theta) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[$, on a

$$\begin{aligned} \det\left(J(\Phi)(r,\theta)\right) &= \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= r\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = r \neq 0\,. \quad \square \end{aligned}$$

On notera que la demi-droite $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x \geq 0\,,\ y = 0\}$ est une partie négligeable de $\mathbb{R}^2$. Le fait que Φ soit seulement un difféomorphisme de $]0,+\infty[\times]0,2\pi[$ sur Ω et non pas sur $\mathbb{R}^2$, n'est donc pas génant pour effectuer des changements de variables dans des intégrales. De façon générale, on a pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mesurable positive ou intégrable sur $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \text{ par le théorème 4.18} \\ &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}\theta\right) r\mathrm{d}r \text{ par Fubini} \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{+\infty} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta\,, \text{ par Fubini} \end{aligned}$$

où r est le déterminant de la Jacobienne de Φ calculé dans la preuve de la proposition ci-dessus. Si on veut intégrer sur une partie A de $\mathbb{R}^2$, on note A_{pol} la description de A en coordonnées polaires, c'est-à-dire $A_{\mathrm{pol}} = \Phi^{-1}(A)$, on a

$$\int_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{A_{\mathrm{pol}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\,.$$

4.6.2 Coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques d'un point (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ sont les nombres $r > 0$, $\theta \in [0,2\pi[$ et $z \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta\,,\ z = z\,,$$

i.e. on décrit x et y en coordonnées polaires et on conserve z. On considère l'ouvert de $\mathbb{R}^3$

$$\Omega = \left(\mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x \geq 0\,,\ y = 0\right\}\right) \times \mathbb{R}\,,$$

le domaine

$$D =]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R}$$

et la fonction

$$\Phi :\ D \longrightarrow \Omega\,,\ \Phi(r,\theta,z) = (r\cos\theta\,,\ r\sin\theta\,,\ z)\ .$$

Proposition 4.10. *Φ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de D sur Ω.*

C'est une conséquence directe de la propriété analogue pour les coordonnées polaires. On calcule tout de même le déterminant de la Jacobienne de Φ car nous en aurons besoin dans le changement de variables :

$$\begin{aligned}\det\left(J(\Phi)(r,\theta,z)\right) &= \det\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= r\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=r\,.\end{aligned}$$

Le demi-plan $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\ x\geq 0\,,\ y=0\}\times\mathbb{R}_z$ est une partie négligeable de $\mathbb{R}^3$. Pour $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, positive ou intégrable sur $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &= \int_D f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\end{aligned}$$

que l'on peut ensuite découper comme on le souhaite (le r devant $\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$ est le déterminant de $J(\Phi)$). Si on veut intégrer sur une partie A de $\mathbb{R}^3$, on note A_{cyl} la description de A en coordonnées cylindriques, i.e. $A_{\mathrm{cyl}}=\Phi^{-1}(A)$, et on a

$$\int_A f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{A_{\mathrm{cyl}}} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\,.$$

4.6.3 Coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques d'un point (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ sont les nombres $r>0$, $\theta\in[0,\pi]$ et $\varphi\in[0,2\pi[$ tels que

$$x=r\sin\theta\cos\varphi\,,\ y=r\sin\theta\sin\varphi\,,\ z=r\cos\theta\,.$$

On considère l'ouvert de $\mathbb{R}^3$

$$\Omega=\mathbb{R}^3\setminus\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2\,;\ x\geq 0\,,\ y=0\,,\ z\in\mathbb{R}\right\}\,,$$

le domaine

$$D=]0,+\infty[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[$$

et la fonction

$$\Phi:\ D\longrightarrow\Omega\,,\ \Phi(r,\theta,\varphi)=(r\sin\theta\cos\varphi\,,\ r\sin\theta\sin\varphi\,,\ r\sin\theta)\ .$$

Proposition 4.11. *Φ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de D sur Ω.*

Preuve. Tout d'abord, il est clair que $\Phi(r,\theta,\varphi)\in\Omega$ pour $(r,\theta,\varphi)\in D$. Montrons la bijectivité. Soit $(x,y,z)\in\Omega$, on cherche $(r,\theta,\varphi)\in D$ tels que $(x,y,z)=\Phi(r,\theta,\varphi)$. On commence par remarquer que

$$x^2+y^2+z^2=r^2>0\,,$$

car $(0,0,0) \notin \Omega$. Donc r est nécessairement défini par

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

On a également

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,.$$

Cette quantité appartient bien à $[-1,1]$ car $|z| \le \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ et de plus, elle est différente de -1 ou 1 du fait que dans Ω, x et y ne peuvent pas être nuls simultanément. Donc, $\theta \in]0,\pi[$ est nécessairement défini par

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right).$$

D'autre part, comme $\sin\theta \neq 0$ (du fait que $\theta \in]0,\pi[$) et $r \neq 0$, on peut écrire

$$\cos\varphi = \frac{x}{r\sin\theta} = \frac{x}{\sqrt{r^2 - z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\quad \sin\varphi = \frac{y}{r\sin\theta} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,. \tag{4.7}$$

On remarque que

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 = 1$$

et de plus,

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \neq (0,1)$$

du fait que dans Ω, on ne peut pas avoir $x > 0$ et $y = 0$. Ceci entraine que φ est complètement et uniquement déterminé dans $]0,2\pi[$ par (4.7). On voit donc que pour (x,y,z) donnés dans Ω, on trouve un unique $(r,\theta,\varphi) \in]0,+\infty[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[$ tel que $(x,y,z) = \Phi(r,\theta,\varphi)$. D'où la bijectivité.

Par ailleurs, Φ est clairement $\mathcal{C}^\infty$ sur le domaine $]0,+\infty[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[$ comme produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. Reste à voir que $\det(J(\Phi))$ ne s'annule pas sur $]0,+\infty[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[$. On a

$$\det\left(J(\Phi)(r,\theta,\varphi)\right) = \det\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} = r^2\sin\theta\,.$$

On voit donc que $\det(J(\Phi))$ ne s'annule pas sur $]0,+\infty[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[$, car $r^2\sin\theta$ ne s'annule que pour $r = 0$ ou $\theta = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. On conclut à l'aide du théorème d'inversion locale. $\square$

A noter que la partie en dehors de laquelle Φ est un difféomorphisme est la même que dans le cas des coordonnées cylindriques, en effet,

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2\,;\ x \ge 0\,,\ y = 0\,,\ z \in \mathbb{R}\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x \ge 0\,,\ y = 0\right\} \times \mathbb{R}_z\,.$$

C'est une partie négligeable de $\mathbb{R}^3$. Pour $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, positive ou intégrable sur $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &= \int_{]0,+\infty[_r\times]0,\pi[_\theta\times]0,2\pi[_\varphi} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

(que l'on peut ensuite découper comme on le souhaite) où $r^2\sin\theta$ est le déterminant de la Jacobienne de Φ, calculé dans la preuve de la proposition ci-dessus. Si on veut intégrer sur une partie A de $\mathbb{R}^3$, on note A_{sph} la description de A en coordonnées sphériques, i.e. $A_{\text{sph}} = \Phi^{-1}(A)$, et on a

$$\int_A f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{A_{\text{sph}}} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\,.$$

4.7 Exercices

Exercice 4.1. Les réciproques des propriétés 1. et 3. de la Proposition 4.2 sont fausses. Trouver des contre-exemples.

Exercice 4.2. L'analogue du théorème de Beppo Levi avec une suite décroissante est faux. Trouver un contre-exemple.

Exercice 4.3. Calculer les intégrales suivantes

$$\int_{\mathbb{R}} e^{x^2}\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)\mathrm{d}\lambda(x)\,,\quad \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|}\mathrm{d}\mu(x)\,,$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et

$$\mu = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n\,.$$

Exercice 4.4. On considère sur $[0,1]$ la suite de fonctions

$$\phi_n(x) = 1 - x^n\,.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction ϕ_n est Borélienne sur $[0,1]$.
2. A l'aide du théorème de Beppo Levi, calculer
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,1]} \phi_n(x)\mathrm{d}\lambda(x)\,.$$
3. En déduire
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,1]} x^n\mathrm{d}\lambda(x)\,.$$

Exercice 4.5. On se place sur $[0,1]$ muni de sa tribu Borélienne et de la mesure de Lebesgue. On considère la fonction f définie par $f(x) = x$.

1. Construire une suite de fonctions étagées positives qui approche f et dont une sous-suite approche f en croissant.

2. A l'aide du Théorème de Beppo Levi, calculer l'intégrale

$$\int_{[0,1]} x \mathrm{d}\lambda(x) .$$

Exercice 4.6. On considère dans $\mathbb{R}^2$ le domaine suivant :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x > 0 ,\ y > 0 ,\ x + y < 1\} .$$

1. Calculer l'aire de D.

2. Calculer l'intégrale suivante

$$\int_D (x+y) \mathrm{d}\lambda(x,y) .$$

Exercice 4.7. On considère dans $\mathbb{R}^3$ le domaine suivant :

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ x > 0 ,\ y > 0 ,\ z > 0 ,\ x + y + z < 1\} .$$

1. Calculer le volume de Ω.

2. Calculer l'intégrale suivante

$$\int_\Omega (x-z) \mathrm{d}\lambda(x,y,z) .$$

Exercice 4.8. On considère le domaine D de $\mathbb{R}^2$ délimité par les deux courbes $y = x^2 - 2x$ et $y = x$.

1. Représenter D sur un dessin.

2. Calculer l'intégrale

$$\int_D x \mathrm{d}\lambda(x,y) .$$

Exercice 4.9. On considère Ω le domaine borné de $\mathbb{R}^2$ délimité par les courbes $y = \sqrt{x}$ et $y = x^3$. Calculer l'aire de D puis

$$\int_D \frac{y}{x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

Exercice 4.10. On considère le domaine D de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x^2+y^2 \leq 4\,,\ y \geq 0\}\,.$$

1. Calculer
$$\int_D (x+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
et comparer avec l'aire de D. Aurait-on pu prévoir ce résultat?

2. La fonction
$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
est-elle intégrable sur D?

Exercice 4.11. On considère les domaines D et Ω de $\mathbb{R}^2$ définis par

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ (x-1)^2+y^2 \leq 1\,,\ x \geq 1\}\,,\\ \Omega &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ y \geq |x|\,,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}\,. \end{aligned}$$

1. Représenter graphiquement D et Ω.

2. Calculer
$$\int_D y(x-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

3. Calculer
$$\int_\Omega (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Exercice 4.12. Soit le domaine de $\mathbb{R}^2$ suivant

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ \frac{(x+1)^2}{4} + y^2 \leq 1\,,\ y \geq 0\right\}\,.$$

1. Calculer l'aire de D.

2. Calculer l'intégrale suivante :
$$\int_D (x+1)y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

4.8 Exercice corrigé

On donne ici la correction de l'Exercice 4.3. Pour la première intégrale, on sait que $\mathbb{Q}$ est mesurable et que e^{x^2} est Borélienne car continue. L'intégrale est donc bien définie et on a

$$\int_{\mathbb{R}} e^{x^2}\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{Q}} e^{x^2}\mathrm{d}\lambda(x)$$

et comme $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ car $\mathbb{Q}$ est dénombrable, on a par le point 3. de la Proposition 4.1 que l'intégrale vaut 0.

Considérons maintenant la seconde intégrale. On va montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|}\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-|n|}\,.$$

On munit $\mathbb{R}$ de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ donc toute fonction est mesurable. Les négligeables pour la mesure μ sont toutes les parties de $\mathbb{R}$ qui ne contiennent aucun entier. Soit la fonction suivante

$$\psi(x) = e^{-E(|x|)}\,,$$

où E est la fonction partie entière. On considère de plus la suite de fonctions $(\chi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\chi_k(x) = e^{-E(|x|)}\mathbf{1}_{[-k,k]}(x)\,.$$

La suite $(\chi_k)_k$ est une suite de fonctions étagées positives qui tend en croissant vers ψ. De plus ψ coïncide avec $e^{-|x|}$ sur $\mathbb{Z}$, donc elle est égale à $e^{-|x|}$ μ-presque partout sur $\mathbb{R}$, car les négligeables pour la mesure μ sont les parties de $\mathbb{R}$ ne contenant aucun entier. On en déduit d'une part que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|}\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\mathrm{d}\mu(x)$$

et d'autre part, par le Théorème de Beppo Levi, que

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} \chi_k(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

On montre maintenant que pour toute fonction χ étagée positive sur $\mathbb{R}$ on a

$$\int_{\mathbb{R}} \chi(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi(n)\,.$$

Soit

$$\chi = \sum_{i=1}^{k} a_i\mathbf{1}_{A_i}$$

une fonction étagée positive. Par définition de l'intégrale des fonctions étagées positives, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \chi(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i\mu(A_i)\,.$$

Comme

$$\mu(A_i) = \sharp(A_i \cap \mathbb{Z}) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \cap A_i} 1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{1}_{A_i}(n)\,,$$

il suit que

$$\int_{\mathbb{R}} \chi(x) \mathrm{d}\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{1}_{A_i}(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi(n)\,.$$

En particulier, on peut écrire que

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_k(x) \mathrm{d}\mu(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi(n) = \sum_{n=-k}^{k} e^{-|n|}$$

et donc

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x) \mathrm{d}\mu(x) = \lim_{k \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_k(x) \mathrm{d}\mu(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-|n|}\,.$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} \mathrm{d}\mu(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-|n|} \\
&= 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n} \\
&= 1 + \frac{2}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} \\
&= 1 + \frac{2}{e} \frac{1}{1 - 1/e} \\
&= 1 + \frac{2}{e-1} \\
&= \frac{e+1}{e-1}\,. \quad \square
\end{aligned}$$

Chapitre 5

Espaces de Lebesgue

Dans tout ce chapitre, on considérera $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.

5.1 Espaces $\mathcal{L}^p$

On a déjà défini l'espace $\mathcal{L}^1(X\,;\,\mathrm{d}\mu)$ des fonctions intégrables sur X pour la mesure μ. Nous définissons maintenant une famille d'espaces notés $\mathcal{L}^p(X\,;\,\mathrm{d}\mu)$ pour $p \in [1, +\infty]$.

Définition 5.1. *Pour $p \in [1, +\infty[$, on définit l'espace $\mathcal{L}^p(X\,;\,\mathrm{d}\mu)$ comme l'ensemble des fonctions $f\,:\,(X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ mesurables telles que*

$$\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu < \infty\,.$$

L'espace $\mathcal{L}^\infty(X\,;\,\mathrm{d}\mu)$ est défini comme l'ensemble des fonctions $f\,:\,(X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ mesurables et bornées μ-presque partout sur X, c'est-à-dire telles qu'il existe $C > 0$ tel que $|f(x)| \leq C$ pour μ-presque tout $x \in X$.

Remarque 5.1. Le fait que $\mathcal{L}^p(X\,;\,\mathrm{d}\mu)$, pour $p \in [1, +\infty]$, soit un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est une conséquence immédiate de sa définition et, pour $p < \infty$, de la linéarité de l'intégrale.

Sur ces espaces, on a une semi-norme naturelle mais qui n'est pas une norme.

Définition 5.2. *Sur $\mathcal{L}^p(X\,;\,\mathrm{d}\mu)$, $p \in [1, +\infty[$, on définit l'application N_p par*

$$N_p(f) := \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\,.$$

Sur $\mathcal{L}^\infty(X\,;\,\mathrm{d}\mu)$, on définit l'application N_∞ par

$$N_\infty(f) := \inf\{C > 0\,;\ |f| \leq C \ p.p.\}\,.$$

La quantité $N_\infty(f)$ s'appelle le sup essentiel de $|f|$.

On remarque que

Proposition 5.1. *Pour $p \in [1, +\infty]$, N_p est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(X\,;\ \mathrm{d}\mu)$ mais pas une norme.*

Preuve. Le fait que ce soit que semi-norme est à peu près évident (l'inégalité triangulaire ne l'est pas totalement, sauf dans le cas $p = 1$), mais ce n'est pas une norme car les fonctions qui sont nulles presque partout mais non identiquement nulles vérifient $N_p(f) = 0$. $\square$

Théorème 5.1. *La convergence dans $\mathcal{L}^p$, pour $p < \infty$, entraine la convergence presque partout d'une sous-suite.*

C'est un théorème difficile qui sera admis dans ce cours.

Le résultat essentiel concernant les espaces $\mathcal{L}^p$ est l'inégalité de Hölder.

Théorème 5.2 (Inégalité de Hölder)**.** *Soit $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}\,,$$

alors pour tout $f \in \mathcal{L}^p(X\,;\ \mathrm{d}\mu)$, pour tout $g \in \mathcal{L}^q(X\,;\ \mathrm{d}\mu)$, on a $fg \in \mathcal{L}^r(X\,;\ \mathrm{d}\mu)$ et

$$N_r(fg) \leq N_p(f)N_q(g)\,.$$

5.2 Espaces L^p

Définition 5.3. *L'espace $L^p(X\,;\ \mathrm{d}\mu)$, $p \in [1, +\infty[$, est obtenu en prenant le quotient de $\mathcal{L}^p(X\,;\ \mathrm{d}\mu)$ par la relation d'équivalence*

$$f\mathcal{R}g \Leftrightarrow f = g \ \textit{p.p. sur } X\,.$$

Théorème 5.3. *Pour $p \in [1, +\infty]$, $L^p(X\,;\ \mathrm{d}\mu)$ muni de N_p est un espace vectoriel normé complet.*

En particulier on a une structure supplémentaire sur l'espace L^2.

Théorème 5.4. *L'espace $L^2(X, \mathrm{d}\mu)$ muni du produit scalaire*

$$(f, g) = \int_X f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}\mu(x)$$

est un espace de Hilbert.

Notation. On notera souvent $\|f\|_p$ au lieu de $N_p(f)$ pour $f \in L^p(X\,;\ \mathrm{d}\mu)$.

Remarque 5.2. Les espaces $\mathcal{L}^p$ étaient faciles et naturels à définir mais ils ne nous seront d'aucune utilité. Du point de vue de l'intégration, seuls les espaces L^p sont pertinents.

Remarque 5.3. Dans le cas des espaces L^p (et non pour les espaces $\mathcal{L}^p$), l'inégalité de Hölder entraine

$$L^p(X \;\; \mathrm{d}\mu).L^q(X \;\; \mathrm{d}\mu) \hookrightarrow L^r(X \;\; \mathrm{d}\mu)$$

pour $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}\,.$$

Pour les espaces $\mathcal{L}^p$, l'inclusion reste bien sûr vraie, mais plus l'injection.

Un corollaire important de l'inégalité de Hölder pour les espaces L^p est le suivant (encore une fois, dans le cas des espaces $\mathcal{L}^p$, on perd l'injection).

Corollaire 5.1. *On suppose que* $\mu(X) < +\infty$*, alors pour* $1 \leq q \leq p \leq +\infty$*, on a*

$$L^p(X\,;\;\mathrm{d}\mu) \hookrightarrow L^q(X\,;\;\mathrm{d}\mu)\,.$$

En revanche dans le cas général, il n'y a aucune inclusion entre espaces de Lebesgue L^p et L^q avec $p \neq q$.

Bibliography

[1] M. Brianne & G. Pagès, *Théorie de l'intégration*, Les grands cours Vuibert, 2ème édition, Vuibert, 2000.

[2] F. Laudenbach, *Calcul différentiel et intégral*, Les éditions de l'École Polytechnique, 2000.

[3] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, 3e édition, Dunod (3rd edition, Mc Graw Hill).