

Analyse complexe et analyse spectrale

Jean-Philippe NICOLAS

Institut de Mathématiques de Bordeaux, bureau 269

Table des matières

1	Bases d'analyse complexe	5
1.1	Les nombres complexes	5
1.2	Fonctions holomorphes	8
1.2.1	Définition, propriétés, formule de Cauchy	8
1.2.2	Séries entières, rayon de convergence	14
1.2.3	Holomorphie et séries entières	16
1.3	Fonctions méromorphes	20
1.4	Calculs d'intégrales par la méthode des résidus	25
1.5	Notions intuitives sur les multi-fonctions	29
1.5.1	L'argument	29
1.5.2	Le logarithme	30
1.5.3	La racine carrée	30
1.6	Exercices	31
2	Théorie spectrale des opérateurs bornés	35
2.1	Définitions et propriétés, rappels	35
2.2	Adjoint d'un opérateur, opérateurs auto-adjoints	36
2.3	Spectre des opérateurs bornés	39
2.4	Calcul fonctionnel analytique	40
2.5	Propriétés du spectre des opérateurs bornés	42
2.6	Exercices	48
3	Théorie spectrale des opérateurs compacts	53
3.1	Opérateurs compacts, définition, propriétés	53
3.2	Théorie de Fredholm	60
3.3	Spectre des opérateurs compacts	64
3.4	Calcul fonctionnel pour les auto-adjoints compacts	66
3.5	Exercices	67
4	Théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints bornés	71
4.1	Calcul fonctionnel continu	71
4.2	Décomposition spectrale	74
4.3	Exercices	84

5	Opérateurs à résolvante compacte	87
5.1	Rudiments sur les opérateurs non bornés	87
5.2	Opérateurs à résolvante compacte	89
5.3	Un exemple	90
5.4	Harmoniques sphériques	92

Chapitre 1

Bases d'analyse complexe

1.1 Les nombres complexes

La notion de nombre complexe vient initialement de la constatation que certaines équations algébriques du second degré n'ont pas de solution réelle. L'exemple typique est

$$x^2 + 1 = 0.$$

Au seizième siècle, une groupe d'algébristes italiens, Cardan et ses élèves, commencent à manipuler des symboles purements formels, tels que $\sqrt{-a}$ pour $a > 0$, qu'ils appellent nombres impossibles, à l'époque où d'autres mathématiciens hésitent encore à manipuler les nombres négatifs. Dans les siècles suivants, l'utilisation de ces nombres impossibles, aussi appelés nombres imaginaires, s'intensifie. La raison est que l'ensemble de ces nombres est le cadre naturel pour chercher les racines d'équations algébriques (c'est-à-dire les zéros de polynômes) et ils fournissent même des façons simples de trouver des solutions réelles de telles équations, là où des méthodes purement basées sur les nombres réels seraient beaucoup plus difficiles. Mais ce n'est qu'au dix-neuvième siècle que les nombres complexes recevront une définition rigoureuse. C'est Hamilton, qui en 1835 définit un nombre complexe comme un couple $z = (x, y)$ de nombres réels. Pour deux nombres complexes $z = (x, y)$ et $z' = (x', y')$, on définit leur somme et leur produit de la façon suivante :

$$z + z' = (x + x', y + y') , \quad zz' = (xx' - yy', xy' + x'y) .$$

Cela revient exactement à considérer que l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est muni d'une base canonique notée :

$$1 = (1, 0) , \quad i = (0, 1)$$

vérifiant $1.i = i.1 = i$, $1^2 = 1$, $i^2 = -1$. C'est à dire que

$$\begin{aligned} z &= (x, y) = x + iy , \quad z' = (x', y') = x' + iy' , \quad z + z' = x + x' + i(y + y') , \\ zz' &= (x + iy)(x' + iy') = xx' + ix'y' + ix'y + i^2yy' = xx' - yy' + i(xy' + x'y) . \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathbb{C}$ muni de ces deux lois est un corps commutatif, c'est-à dire qu'on a les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{C}$ muni de l'addition est un groupe abélien (c'est-à-dire commutatif), i.e.
 - l'addition est associative, commutative,
 - elle admet un élément neutre,
 - tout élément z de $\mathbb{C}$ possède un inverse pour l'addition,
2. la multiplication est associative sur $\mathbb{C}$,
3. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ muni de la multiplication est un groupe abélien,
4. la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Un complexe $z = (x, 0) = x + i0$ est simplement noté x et s'identifie ainsi au nombre réel x . Les nombres $z = x + iy$ avec $y \neq 0$ sont appelés nombres imaginaires et ceux tels que $x = 0$ et $y \neq 0$ sont qualifiés d'imaginaires purs.

Remarque 1.1. *A noter que comme $i^2 = -1$, il suit que $i(-i) = 1$ et donc $-i = \frac{1}{i}$ (on rappelle que dans un groupe, l'inverse est unique).*

Définition 1.1. *Pour un nombre complexe $z = x + iy$, x s'appelle sa partie réelle et y sa partie imaginaire, on note*

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

On appelle module d'un nombre complexe $z = x + iy$ le nombre réel positif

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

et complexe conjugué de z le nombre complexe

$$\bar{z} = x - iy.$$

On remarque que

$$z\bar{z} = |z|^2.$$

Ceci constitue la description cartésienne des nombres complexes. Une autre description usuelle et utile est la description polaire, selon laquelle un nombre complexe z est représenté sous la forme $z = re^{i\theta}$ où $r = |z|$ et θ est l'angle formé entre l'axe Ox et le segment $0z$. Cette écriture n'est pas une simple convention, mais bien un résultat que l'on peut démontrer. Pour cela, on doit commencer par définir sur $\mathbb{C}$ la fonction exponentielle : elle s'exprime par le développement en série entière qui la définit déjà sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.2. *On considère la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{C}$ par*

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (1.1)$$

Proposition 1.1. *La fonction exponentielle est bien définie sur $\mathbb{C}$ et a la propriété suivante :*

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Ainsi l'image par la fonction exponentielle de la droite imaginaire pure est le cercle unité $\mathcal{C}(0, 1)$ dans $\mathbb{C}$, et si on se restreint au segment $[0, i2\pi[$, l'exponentielle est bijective de $[0, i2\pi[$ sur $\mathcal{C}(0, 1)$.

Preuve. Le fait que la série (1.1) soit bien définie sur $\mathbb{C}$, i.e. converge pour tout $z \in \mathbb{C}$, vient simplement du fait que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{z^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|},$$

la série est donc absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$. Pour $z = i\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, en utilisant le fait que

$$i^n = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } n = 2k, \ k \in \mathbb{N}, \\ (-1)^k i & \text{si } n = 2k + 1, \ k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

on a

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos \theta + i \sin \theta. \end{aligned}$$

D'où la proposition. □

Corollaire 1.1. *Il suit que pour tout nombre complexe z non nul, si on considère θ l'angle orienté entre l'axe Ox et le segment Oz , on a $\operatorname{Re} z = |z| \cos \theta$ et $\operatorname{Im} z = |z| \sin \theta$ et donc z s'écrit sous la forme*

$$z = |z| e^{i\theta}. \quad (1.2)$$

De plus l'écriture (1.2) est unique si on se restreint à $\theta \in [0, 2\pi[$. Pour $z = 0$, l'écriture (1.2) est vraie pour n'importe quelle valeur de θ .

La fonction exponentielle a la propriété importante suivante :

Proposition 1.2. *Pour tout $z, w \in \mathbb{C}$, $e^z e^w = e^{z+w}$.*

Preuve. La démonstration se fait en réorganisant les termes de la série e^{z+w} :

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{z^k w^{n-k}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{z^k w^p}{k!p!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{w^p}{p!} = e^z e^w. \quad \square \end{aligned}$$

On en déduit en particulier le théorème de Moivre :

Corollaire 1.2 (Théorème de Moivre). *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$*

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

En utilisant les deux représentations, cartésienne et polaire, d'un nombre complexe, ainsi que les propriétés de l'exponentielle, on montre facilement les propriétés suivantes :

Proposition 1.3. *Soit deux nombres complexes z et w . On a :*

1. $\bar{\bar{z}} = z$,
2. $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$, $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im} z$,
3. $|\bar{z}| = |z|$,
4. $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$,
5. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$, $|zw| = |z||w|$,
6. $|z + w| \leq |z| + |w|$, $|z - w| \geq ||z| - |w||$.

Si on note la forme polaire de z et w : $z = re^{i\theta}$, $w = Re^{i\varphi}$, avec $r = |z|$, $R = |w|$, on a

$$\bar{z} = re^{-i\theta}, \quad zw = rRe^{i(\theta+\varphi)}.$$

1.2 Fonctions holomorphes

1.2.1 Définition, propriétés, formule de Cauchy

Les fonctions holomorphes sont des fonctions définies dans $\mathbb{C}$ ou un ouvert de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, qui sont continuellement différentiables, mais au sens complexe du terme, c'est-à-dire par rapport à la variable complexe z . On va voir que cette notion de “complexe-différentiabilité” est bien plus forte que la différentiabilité par rapport aux variables réelles x et y qui constituent $z = x + iy$.

Définition 1.3. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.*

1. *On dit que f est complexe-différentiable (on écrira $\mathbb{C}$ -différentiable) en $z_0 \in \Omega$ si la limite*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe dans $\mathbb{C}$. La limite, si elle existe, est notée $f'(z_0)$.

2. *Si f est $\mathbb{C}$ -différentiable en tout point de Ω et si f' est continue sur Ω , on dira que f est holomorphe sur Ω . L'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω est noté $\mathbf{H}(\Omega)$.*
3. *Si A est une partie quelconque de $\mathbb{C}$, on dira que f est holomorphe sur A et on notera $f \in \mathbf{H}(A)$, s'il existe un ouvert Ω contenant A tel que $f \in \mathbf{H}(\Omega)$.*

Définition 1.4. Les parties de $\mathbb{C}$ les plus courantes sur lesquelles on considèrera des fonctions holomorphes sont des disques ou des couronnes :

$$\begin{aligned} D(z_0, R) &:= \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < R\} \\ \bar{D}(z_0, R) &:= \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| \leq R\} \\ C(z_0, R_1, R_2) &:= \{z \in \mathbb{C}; R_1 < |z - z_0| < R_2\} \text{ pour } 0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty. \end{aligned}$$

Exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $z \mapsto z^n$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Remarque 1.2. Comme pour la notion usuelle de dérivabilité, le fait que f soit $\mathbb{C}$ -différentiable en z_0 entraîne que f est continue en z_0 . On va voir que cela implique également une relation entre les dérivées partielles de f par rapport à $x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im} z$.

Théorème 1.1 (La caractérisation de Cauchy-Riemann). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une application de Ω dans $\mathbb{C}$. On note $z = x + iy$ un élément quelconque de Ω et on considère la fonction f sous la forme

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y), \quad u = \operatorname{Re} f, \quad v = \operatorname{Im} f.$$

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $f \in \mathbf{H}(\Omega)$,
- (ii) f , en tant que fonction de (x, y) , est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et vérifie pour tout $z \in \Omega$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z). \quad (1.3)$$

Remarque 1.3. On utilise souvent les deux opérateurs suivants :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

On voit alors que les équations de Cauchy-Riemann (1.3) sont équivalentes à

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0$$

et que pour $f \in \mathbf{H}(\Omega)$, on a pour tout $z \in \Omega$

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z).$$

Preuve. On commence par remarquer qu'effectivement, les équations de Cauchy-Riemann sont équivalentes à $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. Pour cela, on développe simplement l'expression de $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u(x, y) + iv(x, y)) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

En identifiant la partie réelle et la partie imaginaire de $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ à 0, on voit que les équations de Cauchy-Riemann sont équivalentes à $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. Démontrons maintenant le théorème.

(i) $\Rightarrow$ (ii) On écrit simplement la définition de la $\mathbb{C}$ -différentiabilité de f en $z_0 \in \Omega$; on note $z_0 = x_0 + iy_0$,

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Si on considère les deux cas particuliers où z approche z_0 le long des lignes $y = y_0$ et $x = x_0$, on obtient respectivement :

$$f'(z_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$

et

$$f'(z_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

En prenant la demi-différence des deux expressions de $f'(z_0)$ ci-dessus, on obtient $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ pour tout $z_0 \in \Omega$, c'est-à-dire les équations de Cauchy-Riemann sur Ω . De plus les deux expressions de f' et l'hypothèse que f' est continue sur Ω entraînent que les dérivées partielles de f par rapport à x et à y existent et sont continues sur Ω , c'est-à-dire que f en tant que fonction de x, y est $\mathcal{C}^1$ sur Ω . D'où f vérifie (ii).

Par ailleurs, en effectuant la demi-somme des deux expressions de f' obtenues plus haut, on trouve $f' = \frac{\partial f}{\partial z}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Du fait que f est $\mathcal{C}^1$ sur Ω , on déduit que f est différentiable sur Ω , c'est-à-dire, pour tout $z_0 \in \Omega$, on a, en notant $z_0 = x_0 + iy_0$ et $z = x + iy$,

$$\begin{aligned} & \frac{f(z) - f(z_0) - (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)}{|z - z_0|} \\ &= \frac{f(z) - f(z_0) - (x - x_0) \left(\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \right) - (y - y_0) \frac{1}{i} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) - \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \right)}{|z - z_0|} \\ &= \frac{f(z) - f(z_0) - (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) - (\bar{z} - \bar{z}_0) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)}{|z - z_0|} \rightarrow 0 \text{ lorsque } z \rightarrow z_0. \end{aligned}$$

Comme par hypothèse, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, on en déduit

$$\frac{f(z) - f(z_0) - (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)}{|z - z_0|} \rightarrow 0 \text{ lorsque } z \rightarrow z_0$$

et donc, en multipliant par $\frac{|z - z_0|}{z - z_0}$, qui est de module 1,

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \text{ lorsque } z \rightarrow z_0.$$

On voit donc que f est $\mathbb{C}$ -différentiable sur Ω , que $f' = \frac{\partial f}{\partial z}$ et est donc continue sur Ω car f est $\mathcal{C}^1$ sur Ω dans les variables x et y . $\square$

La preuve de (i) $\implies$ (ii) établit le résultat suivant qui est important en soi :

Proposition 1.4. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, et $z_0 \in \mathbb{C}$. On suppose que f est $\mathbb{C}$ -différentiable en z_0 , alors les dérivées partielles de f en z_0 par rapport à x et y existent ; de plus*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0 \text{ et } f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

Propriétés. 1. *Soit A une partie de $\mathbb{C}$, $f, g \in \mathbf{H}(A)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. On a :*

- (a) $\lambda f + \mu g \in \mathbf{H}(A)$, $fg \in \mathbf{H}(A)$,
- (b) pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(\lambda f + \mu g)'(z) = \lambda f'(z) + \mu g'(z)$, $(fg)'(z) = f(z)g'(z) + f'(z)g(z)$,
- (c) si f ne s'annule pas sur A , alors $1/f \in \mathbf{H}(A)$ et pour tout $z \in A$,

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z) = -\frac{f'(z)}{(f(z))^2},$$

- (d) si g ne s'annule pas sur A , alors $f/g \in \mathbf{H}(A)$ et pour tout $z \in A$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2}.$$

- 2. *Soit A et B deux parties de $\mathbb{C}$, $f \in \mathbf{H}(A)$, $g \in \mathbf{H}(B)$, on suppose de plus que $f(A) \subset B$, alors :*

- (a) $g \circ f \in \mathbf{H}(A)$ et pour tout $z \in A$, $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$,
- (b) si de plus A et B sont ouverts, si $f : A \rightarrow B$ est bijective et si f' ne s'annule pas dans A , alors $f^{-1} \in \mathbf{H}(B)$ et pour tout $z \in B$

$$(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))},$$

ou encore, pour tout $z \in A$,

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}.$$

Preuve. L'ensemble des résultats se démontre comme pour les fonctions d'une variable réelle, seul le dernier point nécessite d'être en partie détaillé. Considérons donc A et B deux ouverts de $\mathbb{C}$, $f \in \mathbf{H}(A)$ telle que $f : A \rightarrow B$ est bijective et f' ne s'annule pas dans A . Montrons alors que $f : A \rightarrow B$ en tant que fonction de (x, y) est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme. Pour cela, on considère le déterminant de $J(f)$, la Jacobienne de f relativement aux variables x et y . On pose $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, on a pour $z = x + iy \in A$,

$$J(f)(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z) & \frac{\partial u}{\partial y}(z) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z) & \frac{\partial v}{\partial y}(z) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
|\det J(f)(z)| &= \frac{\partial u}{\partial x}(z) \frac{\partial v}{\partial y}(z) - \frac{\partial u}{\partial y}(z) \frac{\partial v}{\partial x}(z) \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(z) \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}(z) \right)^2 \text{ par les équations de Cauchy – Riemann} \\
&= \left| \frac{\partial f}{\partial x}(z) \right|^2 \\
&= |f'(z)|^2 \text{ par la proposition 1.4.}
\end{aligned}$$

On voit donc que la Jacobienne de f est inversible en tout point de A . La fonction f est donc un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de A sur B par le théorème d'inversion locale. Le reste de la preuve est analogue au cas des fonctions d'une variable réelle. $\square$

Exemple. On en déduit notamment que les polynômes en z sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ et que les fractions rationnelles en z sont holomorphes en dehors des zéros de leur dénominateur.

Une interprétation importante des équations de Cauchy-Riemann se fait en termes de formes différentielles et permet ensuite de déduire des propriétés fortes sur les fonctions holomorphes.

Proposition 1.5. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une application de Ω dans $\mathbb{C}$, on note $f_1 = \operatorname{Re} f$ et $f_2 = \operatorname{Im} f$. Alors f est holomorphe dans Ω si et seulement si la 1-forme différentielle

$$\omega = f(z)dz = (f_1 + if_2)(dx + idy) = (f_1 + if_2)dx + (-f_2 + if_1)dy$$

est $\mathcal{C}^1$ et fermée dans Ω .

Preuve. ω est fermée si et seulement si

$$\frac{\partial(f_1 + if_2)}{\partial y} = \frac{\partial(-f_2 + if_1)}{\partial x}$$

et en séparant partie réelle et partie imaginaire dans l'égalité ci-dessus, on retrouve les équations de Cauchy-Riemann. $\square$

Par le théorème de Poincaré, on en déduit des propriétés sur l'intégration des fonctions holomorphes le long de contours.

Théorème 1.2 (Théorème de Cauchy). Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, $f \in \mathbf{H}(\Omega)$, soit γ un chemin fermé et $\mathcal{C}^1$ par morceaux entièrement contenu dans Ω , alors

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

On arrive maintenant à l'une des formules clef de l'analyse complexe : la formule de Cauchy.

Définition 1.5 (Indice d'un parcours fermé). Soit γ un parcours fermé dans $\mathbb{C}$, orienté, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et $a \in \mathbb{C}$, $a \notin \gamma$. On appelle indice de γ relativement à a , et on note $n(\gamma, a)$, le nombre obtenu de la façon suivante : on trace depuis a une demi-droite, on compte le nombre de fois où le chemin traverse la demi-droite de droite à gauche et on y retranche le nombre de fois où le chemin traverse la demi-droite de gauche à droite. Le fait que ce nombre soit indépendant de la demi-droite choisie n'est pas a priori évident, on pourra s'en convaincre sur des exemples et admettre qu'il s'agit d'un théorème de topologie.

Théorème 1.3 (Formule de Cauchy). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ simplement connexe, soit $f \in \mathbf{H}(\Omega)$, soit $a \in \Omega$. On considère γ un chemin fermé, orienté, $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans Ω , ne passant pas par a . Alors on a

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2i\pi n(\gamma, a) f(a).$$

En particulier, si on choisit, pour $\rho > 0$ assez petit, $\gamma(\theta) = a + \rho e^{i\theta}$, θ variant de 0 à 2π (i.e. γ est un cercle de centre a et de rayon ρ parcouru une fois dans le sens direct, on notera ce parcours $\gamma_{a,\rho}$), on a $n(\gamma_{a,\rho}, a) = 1$ et on obtient

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\rho}} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Preuve. On suppose $n(\gamma, a) > 0$, sinon, il suffit d'orienter le chemin en sens inverse et de mettre un signe “−” devant l'intégrale. En utilisant le théorème de Cauchy, on peut montrer que l'intégrale sur γ de $(f(z)/(z-a))dz$ est égale à l'intégrale de la même forme sur un cercle de centre a et de rayon ρ (où $\rho > 0$ est simplement supposé assez petit pour que $D(a, \rho) \subset \Omega$) parcouru $n(\gamma, a)$ fois dans le sens direct. Comme pour la propriété de l'indice, on pourra s'en convaincre en traitant sur un dessin quelques exemples. On a donc, pour tout $\rho > 0$ assez petit,

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = n(\gamma, a) \int_{\gamma_{a,\rho}} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ quelconque, par continuité de f sur Ω , et donc en a , il existe $\delta > 0$ tel que pour $|z-a| < \delta$, on ait $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$. Quitte à réduire δ , on peut supposer que $D(a, \delta) \subset \Omega$. On prend $\rho < \delta$, alors :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\rho}} \frac{f(z)}{z-a} dz - f(a) \right| &= \left| \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + \rho e^{i\theta}) - f(a)}{\rho e^{i\theta}} i \rho e^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon}{\rho} \rho d\theta = \varepsilon \end{aligned}$$

On obtient donc que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz - n(\gamma, a) f(a) \right| < \varepsilon$$

et donc

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = n(\gamma, a) f(a),$$

ce qui conclut la preuve du théorème. $\square$

1.2.2 Séries entières, rayon de convergence

On a vu pour l'instant comme exemples de fonctions holomorphes, les polynômes et les fractions rationnelles (en dehors des zéros de leur dénominateur). On va maintenant passer aux séries infinies et montrer que dans certaines parties de $\mathbb{C}$, les fonctions holomorphes sont exactement les fonctions qui sont des sommes de séries en z .

Définition 1.6. *On appelle série entière une série de la forme*

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

où les c_n sont des coefficients complexes fixés. Pour une telle série, on définit son rayon de convergence par :

$$R := \sup \{ \rho; \rho \geq 0 \text{ et la suite } c_n \rho^n \text{ est bornée} \}.$$

Proposition 1.6. *On considère une série entière*

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

de rayon de convergence $R > 0$. Alors $S(z)$ est absolument convergente dans le disque ouvert $D(0, R)$, normalement convergente dans $\bar{D}(0, r)$ pour $0 < r < R$ et divergente pour $|z| > R$.

Preuve.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$, $|z| < R$. Alors on pose $\varepsilon = R - |z|$ et on a

$$|c_n z^n| = |c_n| (R - \varepsilon)^n = |c_n| \left(\frac{R - \varepsilon}{R - \varepsilon/2} \right)^n (R - \varepsilon/2)^n \leq C_\varepsilon \left(\frac{R - \varepsilon}{R - \varepsilon/2} \right)^n,$$

car $R - \varepsilon/2 < R$ et donc la suite $c_n (R - \varepsilon/2)^n$ est bornée. Comme $R - \varepsilon < R - \varepsilon/2$, on a majoré $|c_n z^n|$ par une quantité de la forme $C\lambda^n$ avec $0 < \lambda < 1$, i.e. par le terme général d'une série convergente. La série $S(z)$ converge donc absolument.

2. Soit $0 < r < R$. Pour tout $z \in \bar{D}(0, r)$, on a la majoration suivante :

$$|c_n z^n| \leq |c_n| r^n \leq C_{R-r} \left(\frac{R - (R-r)}{R - (R-r)/2} \right)^n = C_{R-r} \left(\frac{2r}{R+r} \right)^n$$

et $2r < r + R$, on a donc bien convergence normale dans $\bar{D}(0, r)$.

3. Pour $|z| > R$, par définition de R , la suite $|c_n z^n| = |c_n| |z|^n$ n'est pas bornée, le terme général ne tend donc pas vers zéro et la série diverge. $\square$

Le rayon de Convergence se calcule en utilisant le critère de Cauchy-Hadamard :

Théorème 1.4. *Le rayon de convergence de la série entière*

$$\sum_{n \geq 0} c_n z^n$$

est donné par

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} |c_n|^{1/n}}.$$

Preuve. On note R le rayon de convergence de la série et

$$K = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} |c_n|^{1/n}}.$$

On rappelle la définition de limite supérieure :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |c_n|^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} |c_k|^{1/k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} |c_k|^{1/k}.$$

On considère $\rho > 0$ tel que

$$\rho < K, \text{ i.e. } \frac{1}{\rho} > \limsup_{n \rightarrow +\infty} |c_n|^{1/n},$$

alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait

$$\frac{1}{\rho} \geq |c_n|^{1/n} \text{ et donc } |c_n \rho^n| \leq 1,$$

d'où la suite $c_n \rho^n$ est bornée et $\rho \leq R$. On en déduit que $R \geq K$.

Soit maintenant $\rho > K$, alors il existe $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geq N$ on ait :

$$\exists k \geq n; |c_k|^{1/k} \geq \frac{1}{\rho} + \varepsilon,$$

autrement dit, on peut extraire une sous-suite c_{n_k} de c_n telle que

$$|c_{n_k}|^{1/n_k} \geq \frac{1}{\rho} + \varepsilon \text{ et donc } |c_{n_k} \rho^{n_k}| \geq (1 + \varepsilon \rho)^{n_k} \rightarrow +\infty \text{ lorsque } k \rightarrow +\infty.$$

D'où la suite $c_n \rho^n$ n'est pas bornée et $\rho \geq R$. On en déduit que $R \leq K$.

A noter que si $K = 0$, on n'utilise que la deuxième inégalité et si $K = +\infty$, on n'utilise que la première. $\square$

1.2.3 Holomorphie et séries entières

Une série entière de rayon de convergence $R > 0$ définit dans $D(0, R)$ une fonction holomorphe. Pour établir ce résultat, on commence par montrer le lemme suivant :

Lemme 1.1. *Les séries entières*

$$\sum_{n \geq 0} c_n z^n \text{ et } \sum_{n \geq 1} n c_n z^{n-1}$$

ont le même rayon de convergence.

Preuve. On commence par remarquer que la série $\sum_{n \geq 1} n c_n \rho^{n-1}$ converge si et seulement si $\sum_{n \geq 0} n c_n \rho^n$ converge. La preuve est alors une application directe de la formule de Cauchy-Hadamard et du fait que

$$n^{1/n} \rightarrow 1 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty. \quad \square$$

Théorème 1.5. *Soit la série entière*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$$

de rayon de convergence $R > 0$. Alors la fonction f appartient à $\mathbf{H}(D(0, R))$ et

$$f'(z) = \sum_{n \geq 0} n c_n z^{n-1} \quad \forall z \in D(0, R).$$

Il suit en particulier du lemme précédent que $f' \in \mathbf{H}(D(0, R))$ ainsi que toutes les dérivées successives de f qui se calculent en dérivant la série terme à terme. D'où, f , en tant que fonction de (x, y) , est $\mathcal{C}^\infty$ sur $D(0, R)$.

Preuve. Le théorème est une conséquence du lemme précédent et des théorèmes usuels de dérivation terme à terme des séries de fonctions. Attention, pour chaque étape, on doit montrer qu'on peut dériver la série par rapport à x et à y . Mais ceci se ramène à étudier la même série du fait que

$$\frac{\partial}{\partial x} (c_n z^n) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} (c_n z^n) = n c_n z^{n-1}.$$

On montre ainsi par récurrence à la fois la classe $\mathcal{C}^\infty$ de f par rapport à (x, y) et le fait que toutes les dérivées successives de f par rapport à z se calculent en dérivant la série terme à terme et qu'elles sont toutes holomorphes dans $D(0, R)$. $\square$

Corollaire 1.3. *Une conséquence importante du résultat précédent est que*

$$c_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(0),$$

ce qui implique notamment que si

$$\sum_{n \geq 0} c_n z^n = \sum_{n \geq 0} d_n z^n \text{ dans } D(0, r), \quad r > 0,$$

alors $c_n = d_n$ pour tout n .

On va maintenant voir que toutes les fonctions holomorphes sont localement de cette forme.

Théorème 1.6. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathbf{H}(\Omega)$. Pour tout $a \in \Omega$, si on pose*

$$R_a = d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega) = \sup \{ \rho > 0 ; D(a, \rho) \subset \Omega \} ,$$

il existe une série entière $\sum_{n \geq 0} c_n(a) z^n$, de rayon de convergence $R \geq R_a$, telle que, pour tout $z \in D(a, R_a)$, on ait

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n(a) (z - a)^n .$$

On a de plus que les coefficients c_n sont donnés par

$$c_n(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\rho}} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz \text{ pour tout } \rho \text{ tel que } 0 < \rho < R_a .$$

On déduit notamment de ces résultats et du théorème précédent que f , en tant que fonction de x et y , est C^∞ sur Ω , que le développement de f en série entière dans $D(a, R_a)$ est unique et que

$$c_n(a) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(a) .$$

Preuve. On va utiliser la formule de Cauchy. On sait que pour tout $\rho > 0$ tel que $\rho < R_a$ et pour tout $z \in D(a, \rho)$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\rho}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta .$$

On va alors ré-écrire $1/(\zeta - z)$ de façon à pouvoir le développer sous forme de série :

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}}$$

et comme on a $|z - a| < \rho = |\zeta - a|$, on peut utiliser le développement

$$\frac{1}{1 - u} = \sum_{n \geq 0} u^n \text{ pour } |u| < 1 .$$

On obtient donc

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\rho}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \left(\sum_{n \geq 0} \left(\frac{z - a}{\zeta - a} \right)^n \right) d\zeta , \text{ pour } |z - a| < \rho .$$

La série dans l'intégrale converge normalement et donc uniformément par rapport à $\zeta \in \gamma_{a,\rho}$. On peut donc permuter intégrale et somme, ce qui donne :

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\rho}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \right) (z - a)^n , \text{ pour } |z - a| < \rho .$$

De plus, par la formule de Cauchy, la valeur de l'intégrale définissant $c_n(a)$ ne dépend pas de $0 < \rho < R_a$ et le théorème est démontré. $\square$

On va maintenant voir deux théorèmes importants sur les propriétés des fonctions holomorphes ; ces deux résultats sont des conséquences de l'écriture locale sous forme de série entière.

Proposition 1.7. *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathbf{H}(\Omega)$. On suppose que $|f|$ admet un maximum local en un point de Ω , alors f est constante dans Ω .*

Ceci entraîne le résultat suivant :

Théorème 1.7 (Principe du maximum). *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathbf{H}(\Omega)$ telle que f se prolonge en une fonction continue sur $\bar{\Omega}$. Alors $|f|$ atteint son maximum sur $\bar{\Omega}$ à la frontière de Ω .*

Preuve de la proposition. On suppose que $|f|$ atteint un maximum local en $a \in \Omega$ et on considère $\rho > 0$ tel que $D(a, \rho) \subset \Omega$ et $|f(z)| \leq |f(a)|$ pour $|z - a| < \rho$. On utilise la formule de Cauchy : soit $0 < r < \rho$,

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,r}} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

On en déduit, en utilisant l'hypothèse :

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a)| d\theta = |f(a)|,$$

d'où

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|f(a)| - |f(a + re^{i\theta})|) d\theta = 0$$

et comme la fonction intégrée est continue et positive, il suit qu'elle est identiquement nulle. Donc $|f|$ est constant dans $D(a, \rho)$. Il existe donc $C \geq 0$ telle que $|f(z)| = C$ dans $D(a, \rho)$. Si $C = 0$, cela entraîne clairement que f est constante. Si $C \neq 0$, on a, en notant $f_1 = \operatorname{Re}(f)$ et $f_2 = \operatorname{Im}(f)$:

$$f_1^2 + f_2^2 = C^2.$$

On dérive par rapport à x et y :

$$2f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + 2f_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0, \quad 2f_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + 2f_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0.$$

En utilisant les équations de Cauchy-Riemann :

$$f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \quad f_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0,$$

ce qui entraîne :

$$(f_1^2 + f_2^2) \frac{\partial f_1}{\partial x} = C^2 \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0 \text{ et donc } \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0.$$

On obtient de la même façon que $\frac{\partial f_1}{\partial y}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x}$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}$ sont nulles dans $D(a, \rho)$, ce qui entraîne que f y est constante. Par le théorème 1.6 et par connexité de Ω , si f est constante dans $D(a, \rho)$, alors f est constante dans Ω . $\square$

Le fait que la proposition entraîne le théorème est laissé en exercice. A noter que dans la preuve de la proposition, nous avons également établi le résultat suivant :

Proposition 1.8. *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $f \in \mathbf{H}(\Omega)$, on suppose que $|f|$ est constant dans un disque non vide de Ω , alors f est constante dans Ω .*

Théorème 1.8 (Principe des zéros isolés). *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathbf{H}(\Omega)$, les zéros de f dans Ω n'ont pas de point d'accumulation dans Ω , sauf si f est identiquement nulle.*

Remarque 1.4. *Cependant les zéros de f peuvent très bien avoir un point d'accumulation à la frontière de f , c'est par exemple le cas de la fonction $\sin(1/z)$, holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et dont les zéros s'accumulent en 0.*

Preuve du théorème. Supposons que les zéros de f aient un point d'accumulation $a \in \Omega$. On considère le développement en série entière de f dans $D(a, R_a)$

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n(a)(z - a)^n.$$

On suppose que tous les coefficients $c_n(a)$ ne sont pas nuls, sinon f est nulle dans $D(a, R_a)$ ce qui entraîne $f \equiv 0$ dans Ω ; on considère $c_m(a)$ le premier coefficient non nul de la série. Alors on a

$$f(z) = (z - a)^m g(z), \quad g(z) = \sum_{n \geq 0} c_{m+n}(a)(z - a)^n.$$

La fonction $g(z)$ est définie dans $D(a, R_a)$ par une série entière de rayon de convergence $R \geq R_a$, elle y est donc continue et sa valeur en a est $c_m(a) \neq 0$. Il suit que dans un voisinage de a suffisamment petit, f ne s'annule qu'en a , ce qui contredit l'hypothèse que les zéros de f s'annulent en a . L'hypothèse entraîne donc que $f \equiv 0$ dans $D(a, R_a)$. Le théorème 1.6 ainsi que la connexité de Ω permettent alors de conclure que $f \equiv 0$ dans tout Ω . $\square$

On énonce un autre théorème fondamental sur les fonctions holomorphes avant de se tourner vers les fonctions méromorphes.

Théorème 1.9 (Théorème de Liouville). *Soit $f \in \mathbf{H}(\mathbb{C})$ uniformément bornée sur $\mathbb{C}$, alors f est constante sur $\mathbb{C}$.*

Preuve. Soit $M > 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Soit $a, b \in \mathbb{C}$, on choisit $R > 2\max\{|a|, |b|\}$, ce qui entraîne, pour $z \in \gamma_{0,R}$, $|z - a| > R/2$ et $|z - b| > R/2$. On a

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{0,R}} f(z) \left(\frac{1}{z - a} - \frac{1}{z - b} \right) dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{0,R}} f(z) \frac{a - b}{(z - a)(z - b)} dz$$

d'où

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{M|a - b|}{\left(\frac{1}{2}R\right)^2} 2\pi R \longrightarrow 0 \text{ lorsque } R \rightarrow +\infty.$$

Donc $f(a) = f(b)$. □

1.3 Fonctions méromorphes

Nous allons maintenant considérer des fonctions f holomorphes dans un disque $D(a, R)$ mais pas en a , c'est-à-dire holomorphes dans la couronne $C(a, 0, R)$. Au point a , on a une singularité (ce qui revient à dire que f n'est pas holomorphe en a) et l'idée est d'étudier f au voisinage de a de façon à préciser la nature de la singularité. On commence par énoncer le théorème de Laurent, qui dit que même si on ne peut pas espérer, de façon générale, développer f en série entière dans $C(a, 0, R)$, on a tout de même un développement de la forme

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - a)^n.$$

Ce théorème est en fait plus général et permet d'obtenir de tels développements dans des couronnes $C(a, r, R)$.

Théorème 1.10 (Théorème de Laurent). *Soit $0 \leq r < R \leq +\infty$, $a \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathbf{H}(C(a, r, R))$. Alors il existe des coefficients $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ uniques tels que dans la couronne $C(a, r, R)$, f s'écrit sous la forme*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - a)^n.$$

Les c_n sont donnés par

$$c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\rho}} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz, \quad (1.4)$$

pour $r < \rho < R$ quelconque.

Preuve. Soit $z \in C(a, r, R)$, on considère ρ et δ tels que $r < \delta < |z - a| < \rho < R$. En utilisant le théorème de Cauchy, on se convainc facilement sur un dessin du fait que

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\rho}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\delta}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

On écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\rho}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\rho}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a - (z - a)} d\zeta \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\rho}} \frac{1}{\zeta - a} \frac{f(\zeta)}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} d\zeta \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\rho}} \frac{1}{\zeta - a} f(\zeta) \left(\sum_{n \geq 0} \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n \right) d\zeta \text{ car } \left| \frac{z-a}{\zeta-a} \right| < 1 \end{aligned}$$

et on conclut comme pour la preuve du théorème 1.6 que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\rho}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\rho}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a - (z - a)} d\zeta = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n$$

avec les coefficients c_n donnés par (1.4). On fait de même pour l'autre intégrale :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\delta}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\delta}} \frac{f(\zeta)}{-(\zeta - a) + z - a} d\zeta \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\delta}} \frac{1}{z - a} \frac{f(\zeta)}{1 - \frac{\zeta - a}{z - a}} d\zeta \\ &= \sum_{p \geq 0} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\delta}} f(\zeta) (\zeta - a)^p d\zeta \right) \frac{1}{(z - a)^{p+1}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\delta}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \right) (z - a)^n, \end{aligned}$$

où on a fait le changement d'indice de sommation $n = -p - 1$. On a à peu près la bonne formule, sauf qu'on a deux cercles différents pour les intégrales définissant les coefficients c_n avec $n \in \mathbb{N}$ et $n < 0$ et leurs rayons ont été choisis au préalable en fonction du point z . Nous allons montrer l'unicité des coefficients de la série de Laurent ce qui montrera en même temps l'indépendance de leur expression par rapport au rayon du cercle d'intégration et complètera ainsi également la preuve de l'existence. On suppose que f admet dans $C(a, r, R)$ une expansion en série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n,$$

alors, pour $r < \rho < R$ quelconque, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\rho}} \frac{f(z)}{(z - a)^{k+1}} dz &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\rho}} \frac{1}{(z - a)^{k+1}} \sum_{n \geq 0} c_n (z - a)^n dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\rho}} \frac{1}{(z - a)^{k+1}} \sum_{n \geq 1} c_{-n} (z - a)^{-n} dz. \end{aligned}$$

Les deux séries convergent dans la couronne $C(a, r, R)$ et donc, par les propriétés générales des séries entières, elles convergent uniformément sur tout compact de $C(a, r, R)$, ce qui nous permet d'intervertir les signes somme et intégrale pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\rho}} \frac{f(z)}{(z - a)^{k+1}} dz &= \sum_{n \geq 0} c_n \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\rho}} (z - a)^{n-k-1} dz \\ &\quad + \sum_{n \geq 1} c_{-n} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\rho}} (z - a)^{-n-k-1} dz \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a,\rho}} (z - a)^{n-k-1} dz = c_k \text{ voir exercice 1.5.} \end{aligned}$$

On a donc montré l'unicité des coefficients de la série de Laurent et on remarque en même temps que leur expression est indépendante du rayon du cercle d'intégration. Ceci clôt la preuve du théorème de Laurent. $\square$

Le théorème de Laurent va nous permettre de classer les singularités isolées.

Définition 1.7. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$.

1. On dit que $a \in \Omega$ est une singularité de f si f n'est pas holomorphe en a , i.e. s'il n'existe pas de voisinage ouvert de a dans lequel f soit holomorphe.
2. On dit que $a \in \Omega$ est une singularité isolée de f si c'est une singularité de f et s'il existe $\rho > 0$ tel que f soit holomorphe dans $C(a, 0, \rho)$.

Définition 1.8 (Classification des singularités isolées). Soit $a \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$ et $f \in \mathbf{H}(C(a, 0, \rho))$. On considère le développement en série de Laurent de f dans la couronne $C(a, 0, \rho)$

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n.$$

On dit que :

1. f admet en a une singularité fictive ou éliminable si $c_n = 0$ pour tout $n < 0$; cela signifie que f se prolonge par continuité en a , la limite de f en a étant c_0 , et si on pose $f(a) = c_0$, on a en fait prolongé f en une fonction holomorphe dans $D(a, \rho)$ (c'est évident par les propriétés générales des séries entières) ;
2. f admet en a un pôle d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ si $c_n = 0$ pour $n < -m$ et $c_{-m} \neq 0$; cela équivaut à dire que $(z - a)^m f(z)$ se prolonge en une fonction holomorphe dans $D(a, \rho)$ en lui donnant en a la valeur c_{-m} , mais que $(z - a)^{m-1} f(z)$ n'a pas une limite finie en a ;
3. f admet en a une singularité essentielle s'il n'existe pas d'entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $c_n = 0$ pour $n < -m$; cela signifie que quel que soit $m \in \mathbb{N}$, $(z - a)^m f(z)$ n'est pas prolongeable par continuité en a .

On définit également la notion d'ordre d'un zéro d'une fonction holomorphe.

Définition 1.9. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathbf{H}(\Omega)$, $a \in \Omega$. On dira que f admet en a un zéro d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ si

$$f^{(k)}(a) = 0 \text{ pour } 0 \leq k \leq m - 1 \text{ et } f^{(m)}(a) \neq 0.$$

Si on considère le développement en série entière de f au voisinage de a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(a) (z - a)^n,$$

alors a est un zéro d'ordre m pour f si et seulement si

$$c_0(a) = \dots = c_{m-1}(a) = 0 \text{ et } c_m(a) \neq 0.$$

On parle aussi de zéro simple (ordre 1), double (ordre 2), etc...

On peut caractériser simplement l'ordre d'un zéro ou d'une singularité isolée. Le théorème suivant est une conséquence immédiate du théorème 1.6 pour la première partie et du théorème de Laurent pour les deux parties suivantes.

Théorème 1.11. *Soit $a \in \mathbb{C}$ et $\rho > 0$.*

1. *On suppose que $f \in \mathbf{H}(D(a, \rho))$, alors f admet en a un zéro d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si il existe $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$ tel que*

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{(z - a)^m} = c.$$

A noter que cette constante c est alors nécessairement le coefficient c_m du développement en série entière de f dans $D(a, \rho)$.

2. *On suppose que $f \in \mathbf{H}(C(a, 0, \rho))$, alors f admet en a un pôle d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si il existe $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, tel que*

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^m f(z) = c.$$

A noter que c est alors nécessairement le coefficient c_{-m} du développement en série de Laurent de f dans $C(a, 0, \rho)$.

3. *On suppose que $f \in \mathbf{H}(C(a, 0, \rho))$, alors f admet en a une singularité éliminable si et seulement si il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que*

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c.$$

A noter que c est alors nécessairement le coefficient c_0 du développement en série de Laurent de f dans $C(a, 0, \rho)$ qui est en fait un développement en série entière dans $D(a, \rho)$.

Corollaire 1.4. *On considère deux fonctions f et g holomorphes dans une couronne de la forme $C(a, 0, \rho)$, $\rho > 0$.*

1. *La fonction f a un pôle d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ en a si et seulement si $1/f$ a un zéro d'ordre m en a .*
2. *On suppose que f a un pôle d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ en a . Alors, fg admet en a*
 - (i) *un pôle d'ordre $m + k$ si g admet en a un pôle d'ordre k ,*
 - (ii) *un pôle d'ordre m si $g(a) \neq 0$,*
 - (iii) *un pôle d'ordre $m - k$ si g admet en a un zéro d'ordre $k < m$,*
 - (iv) *une singularité éliminable si g admet en a un zéro d'ordre $k \geq m$, en particulier, si $k > m$, fg admet en a un zéro d'ordre $k - m$.*

Définition 1.10 (Fonction méromorphe). *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une application de Ω dans $\mathbb{C}$. Si f est holomorphe dans Ω sauf en des points isolés où elle admet des pôles et pas de singularité essentielle, on dit que f est méromorphe dans Ω .*

Pour de telles fonctions, on définit une notion attachée à chaque pôle et qui va révéler son importance dans le théorème suivant : celle de résidu.

Définition 1.11. *Soit $a \in \mathbb{C}$ et une fonction f holomorphe dans $C(a, 0, r)$ pour $r > 0$ donné. On considère le développement de f en série de Laurent dans $C(a, 0, r)$*

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n.$$

On appelle résidu de f en a , et on note $\text{Rés}(f, a)$, le coefficient c_{-1} de $(z - a)^{-1}$ dans le développement précédent.

A l'aide de la formule de Cauchy et de l'exercice 1.5, on se convainc facilement du théorème suivant, qui est l'un des théorèmes les plus importants de l'analyse complexe :

Théorème 1.12 (Théorème des résidus). *Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, f une fonction méromorphe dans Ω , ayant un nombre fini de pôles $a_1, \dots, a_k$. On considère un chemin γ fermé, orienté, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, entièrement contenu dans Ω et ne passant par aucun des a_l , $l = 1, \dots, k$. Alors,*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{l=1}^k n(\gamma, a_l) \text{Rés}(f, a_l).$$

Corollaire 1.5. *Le théorème des résidus est vrai sans supposer que f admet un nombre fini de pôles dans Ω .*

Le calcul des résidus d'une fonction méromorphe en ses pôles est donc la seule chose dont on ait besoin pour calculer les intégrales de telles fonctions sur des parcours fermés. Le calcul d'une série de Laurent est parfois difficile. Cependant, un peu de réflexion permet de trouver des façons simples de calculer ces résidus.

Remarque 1.5. *Soit $a \in \mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe dans $C(a, 0, r)$ pour $r > 0$ donné.*

1. *Si f admet en a une singularité éliminable, alors f se prolonge en une fonction holomorphe dans $D(a, r)$ et se développe donc en série entière dans $D(a, r)$; tous les coefficients c_n , $n < 0$, de la série de Laurent de f dans $C(a, 0, r)$ sont nuls, le résidu de f en a est nul.*
2. *Si f admet en a un pôle d'ordre $k > 0$, le développement en série de Laurent de f dans $C(a, 0, r)$ s'écrit*

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{+\infty} c_n (z - a)^n ;$$

la fonction $g(z) = (z - a)^k f(z)$ se prolonge en une fonction holomorphe dans $D(a, r)$, dont le développement en série entière dans $D(a, r)$ (par unicité de ce développement) est donné par

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n-k} (z - a)^n.$$

Le coefficient c_{-1} est donc le coefficient de $(z - a)^{k-1}$ dans ce développement, et on a donc

$$\text{Rés}(f, a) = \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1} g}{\partial z^{k-1}}(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} ((z - a)^k f(z)).$$

A noter que dans le cas $k = 1$, la fonction f s'écrit sous la forme $f(z) = g(z)/h(z)$ où g et h sont holomorphes dans $D(a, r)$, h admet en a un zéro d'ordre 1 et g ne s'annule pas en a , et le résidu de f en a s'écrit donc

$$\text{Rés}(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

1.4 Calculs d'intégrales par la méthode des résidus

Un premier type d'intégrales se calcule très simplement à l'aide du théorème des résidus :

Premier type Soit $R(\sin t, \cos t)$ une fraction rationnelle sans singularité, pour calculer

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt,$$

on pose

$$z = e^{it}, \quad dz = ie^{it} dt = iz dt, \quad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right),$$

$$\sin z = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right),$$

on note alors

$$f(z) = R\left(\frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)\right) \frac{1}{iz}.$$

Par hypothèse sur R , f n'a pas de singularité sur le cercle unité. De plus, c'est une fraction rationnelle en z , elle est donc méromorphe dans $\mathbb{C}$. On a donc

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt = \int_{\gamma_{0,1}} f(z) dz = 2i\pi \sum_{\substack{z \text{ pôle de } f, \\ |z| < 1}} \text{Rés}(f, z).$$

Trois lemmes de Jordan sont utiles pour calculer deux autres types d'intégrales selon la méthode des résidus. Commençons par les énoncer et les démontrer.

Notations. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ et $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi$. Pour $r > 0$, on considère $\gamma_{z_0, r, \theta_1, \theta_2}$ l'arc de cercle de centre z_0 , de rayon r et d'arguments compris entre θ_1 et θ_2 , paramétré par

$$\gamma_{z_0, r, \theta_1, \theta_2}(\theta) = z_0 + re^{i\theta}, \theta \text{ variant de } \theta_1 \text{ à } \theta_2.$$

On considère aussi les domaines

$$\begin{aligned} S &= \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < R, \theta_1 < \arg z < \theta_2\}, \\ S' &= \{z \in \mathbb{C}; |z| > R, \theta_1 < \arg z < \theta_2\}. \end{aligned}$$

Lemme 1.2. Soit f une fonction définie et continue sur S telle que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \alpha,$$

alors

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_{z_0, r, \theta_1, \theta_2}} f(z) dz = i(\theta_2 - \theta_1)\alpha.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{z_0, r, \theta_1, \theta_2}} f(z) dz - i(\theta_2 - \theta_1)\alpha &= i \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(z_0 + re^{i\theta}) re^{i\theta} d\theta - i \int_{\theta_1}^{\theta_2} \alpha d\theta \\ &= i \int_{\theta_1}^{\theta_2} (f(z_0 + re^{i\theta})(z - z_0) - \alpha) d\theta. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $\eta > 0$ tel que, pour $|z - z_0| < \eta$, on ait

$$|f(z)(z - z_0) - \alpha| < \varepsilon.$$

Il suit que pour $0 < r < \eta$

$$\left| \int_{\gamma_{z_0, r, \theta_1, \theta_2}} f(z) dz - i(\theta_2 - \theta_1)\alpha \right| < (\theta_2 - \theta_1)\varepsilon.$$

D'où le résultat. □

Lemme 1.3. Soit f une fonction définie et continue sur S' telle que

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} zf(z) = \beta,$$

alors

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_{z_0, r, \theta_1, \theta_2}} f(z) dz = i(\theta_2 - \theta_1)\beta.$$

Preuve. On remarque que, pour $z \neq 0$,

$$(z - z_0)f(z) = \left(1 - \frac{z_0}{z}\right)zf(z)$$

et donc

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} (z - z_0)f(z) = \beta.$$

Le reste de la démonstration est analogue à celle du lemme 1.2. $\square$

Corollaire 1.6. *Une conséquence immédiate du lemme 1.3 est le résultat démontré à l'exercice 1.23. Soit P et Q deux polynômes en z , avec $d^o Q \geq d^o P + 2$, alors*

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_{0,r,0,\pi}} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0.$$

Le troisième lemme est plus subtil, il fait l'objet de l'exercice 1.24.

Lemme 1.4. *Soit f définie et continue sur $C(0, R, +\infty) \cap \{\operatorname{Im} z \geq 0\}$ pour $R > 0$ donné. On suppose que $f(z) \rightarrow 0$ lorsque $|z| \rightarrow +\infty$. Alors,*

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_{0,r,0,\pi}} f(z)e^{iz} dz = 0.$$

C'est une conséquence de l'inégalité de Jordan :

Lemme 1.5 (Inégalité de Jordan). *Si $0 \leq \theta \leq \pi/2$, alors*

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin \theta}{\theta} \leq 1.$$

Preuve. La démonstration est directe. On considère la fonction

$$g(\theta) = \sin \theta - \frac{2}{\pi} \theta.$$

Sa dérivée

$$g'(\theta) = \cos \theta - \frac{2}{\pi}$$

est positive pour $0 \leq \theta \leq \arccos(2/\pi)$ et négative pour $\arccos(2/\pi) \leq \theta \leq \pi/2$. De plus g s'annule en 0 et $\pi/2$, il suit que $g \geq 0$ sur $[0, \pi/2]$. L'autre inégalité est bien connue et se démontre de façon analogue. $\square$

Preuve du lemme 1.4. On commence par paramétrer l'intégrale :

$$z = re^{i\theta} = r \cos \theta + i \sin \theta$$

où θ varie de 0 à π ;

$$\int_{\gamma_{0,r,0,\pi}} f(z)e^{iz} dz = \int_0^\pi f(re^{i\theta})e^{ir \cos \theta - r \sin \theta} i r e^{i\theta} d\theta.$$

On peut estimer son module de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\gamma_{0,r,0,\pi}} f(z) e^{iz} dz \right| &\leq \int_0^\pi |f(re^{i\theta}) e^{ir \cos \theta} e^{-r \sin \theta} i r e^{i\theta}| d\theta \\
 &= \int_0^\pi |f(re^{i\theta})| e^{-r \sin \theta} r d\theta \\
 &\leq \left(\sup_{|z|=r, \operatorname{Im} z \geq 0} |f(z)| \right) r \int_0^\pi e^{-r \sin \theta} d\theta.
 \end{aligned}$$

D'une part, par hypothèse,

$$\left(\sup_{|z|=r, \operatorname{Im} z \geq 0} |f(z)| \right) \longrightarrow 0 \text{ lorsque } r \rightarrow +\infty.$$

D'autre part, on peut découper la dernière intégrale en deux pour utiliser l'inégalité de Jordan :

$$r \int_0^\pi e^{-r \sin \theta} d\theta = r \int_0^{\pi/2} e^{-r \sin \theta} d\theta + r \int_{\pi/2}^\pi e^{-r \sin \theta} d\theta,$$

en effectuant le changement de variables $u = \pi - \theta$, on obtient

$$r \int_{\pi/2}^\pi e^{-r \sin \theta} d\theta = r \int_0^{\pi/2} e^{-r \sin u} du$$

et enfin, en utilisant l'inégalité de Jordan,

$$r \int_0^{\pi/2} e^{-r \sin \theta} d\theta \leq r \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2r}{\pi} \theta} d\theta = r \left[-\frac{\pi}{2r} e^{-\frac{2r}{\pi} \theta} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} (1 - e^{-r}) \leq \frac{\pi}{2}.$$

D'où le lemme. □

On utilise ces lemmes pour calculer les deux types d'intégrales suivants.

Deuxième type On considère P et Q deux polynômes en z avec $d^\circ Q \geq d^\circ P + 2$ et Q n'ayant pas de zéro sur l'axe réel, alors

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx &= 2i\pi \sum_{z \text{ zéro de } Q, \operatorname{Im} z > 0} \operatorname{Rés} \left(\frac{P}{Q}, z \right) \\
 &= -2i\pi \sum_{z \text{ zéro de } Q, \operatorname{Im} z < 0} \operatorname{Rés} \left(\frac{P}{Q}, z \right).
 \end{aligned}$$

Le chemin utilisé pour obtenir ce résultat est l'intervalle $[-R, R]$ parcouru de gauche à droite, suivi de $\gamma_{0,R,0,\pi}$ (pour la deuxième égalité, on replace $\gamma_{0,R,0,\pi}$ par $\gamma_{0,R,\pi,2\pi}$ parcouru en sens indirect), pour R tendant vers $+\infty$.

Troisième type, premier cas On considère f une fonction holomorphe dans le demi-plan $\{\operatorname{Im} z \geq 0\}$, sauf en un nombre fini de points où elle admet des pôles. Si f n'a pas de point singulier sur l'axe réel et si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, ou si l'intégrale impropre de $-\infty$ à $+\infty$ de $f(x)e^{ix}$ converge, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix} dx = 2i\pi \sum_{\substack{\zeta \text{ pôle de } f, \\ \operatorname{Im} \zeta > 0}} \operatorname{Rés}(f(z)e^{iz}, \zeta) .$$

Le chemin utilisé est le même que pour le deuxième type.

Troisième type, deuxième cas Si f admet des pôles simples sur l'axe réel, on modifie le chemin de façon à contourner les pôles et on utilise le premier lemme de Jordan. A noter que l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de $f(x)e^{ix}$ n'a plus de sens et on définit par cette construction un objet différent, de type valeur principale.

1.5 Notions intuitives sur les multi-fonctions

Nous avons vu qu'il existe deux types de singularités isolées pour une fonction : les pôles et les singularités essentielles. Certaines fonctions ont une structure plus compliquée et présentent des singularités appelées points de branchement. Ce sont des fonctions multivaluées, ayant plusieurs déterminations possibles, et un point de branchement est un point où différentes déterminations se rejoignent. Un exemple naturel d'une telle structure apparaît avec la fonction argument.

1.5.1 L'argument

On a vu que pour $z \in \mathbb{C}$, l'argument de z est défini seulement modulo 2π . Lorsqu'on veut utiliser la fonction argument, on doit donc choisir une détermination de cette fonction, par exemple en disant que c'est l'angle orienté formé par l'axe Ox et le segment Oz , dont la valeur est dans $[0, 2\pi[$. Ce type de détermination a un sens pour $z \neq 0$ dans $\mathbb{C}$, plus précisément, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq 0$, on peut trouver un voisinage de z_0 dans lequel il existe une détermination continue de l'argument. Donnons des exemples simples de cette situation :

- $z_0 \notin \mathbb{R}$, on peut prendre un disque de centre z_0 et de rayon $R < |\operatorname{Im} z_0|$, alors la détermination ci-dessus est continue sur ce disque.
- $z_0 \in \mathbb{R}^{+*}$, on prend un disque de centre z_0 et de rayon $R < z_0$, alors si on définit l'argument dans ce disque comme l'angle orienté formé par l'axe Ox et le segment Oz , dont la valeur est dans $] -\pi/2, \pi/2[$, cette détermination est continue sur le disque.

Théorème 1.13. *On ne peut pas trouver une détermination de l'argument qui soit continue sur un voisinage de 0.*

Preuve. Soit V un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, il existe $r > 0$ assez petit tel que le cercle γ_r soit contenu dans V . Soit f une détermination de l'argument sur V , on a $f(\gamma_r(0)) = \theta_0$ et nécessairement pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$, $f(\gamma_r(\theta)) = \theta_0 + \theta$ et lorsque $\theta \rightarrow 2\pi$, par continuité de f , il suit que $f(\gamma_r(0)) = \theta_0 + 2\pi$, ce qui est absurde. $\square$

Le point 0 est un point de branchement pour l'argument. Si on veut effectuer une représentation complète de la fonction argument, son graphe aura la forme d'une hélice infinie tournant autour de l'axe à la verticale de 0. Il s'agit du graphe d'une fonction ayant en chaque point une infinité de valeurs (et en 0 l'ensemble des valeurs est non dénombrable). On parle de multifonction. Le théorème précédent exprime en quoi un point de branchement est une singularité pour une multifonction.

1.5.2 Le logarithme

Il est défini comme d'habitude comme la fonction réciproque de l'exponentielle (on peut aussi le définir comme la primitive de $1/z$). Pour $z = x + iy$, on voit que

$$e^z = e^x e^{iy},$$

ainsi, $|e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}$ et $\arg(e^z) = y = \operatorname{Im}(z)$. Le logarithme est donc naturellement défini de la façon suivante :

$$\log z = \log |z| + i \arg z.$$

Le logarithme est donc naturellement une multifonction puisqu'il fait intervenir la fonction argument.

1.5.3 La racine carrée

Pour $z = re^{i\theta}$, on a $z^2 = r^2 e^{2i\theta}$, la racine carrée d'un nombre complexe a donc deux déterminations naturelles

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} e^{i \arg(z)/2} \text{ et } \sqrt{z} = -\sqrt{|z|} e^{i \arg(z)/2}.$$

On voit qu'aucune de ces deux déterminations ne peut être continue autour de 0, en effet, prenons par exemple la première,

$$\sqrt{\gamma_r(0)} = \sqrt{r}$$

et pour $\theta \in]0, 2\pi[$

$$\sqrt{\gamma_r(\theta)} = \sqrt{r} e^{i\theta/2},$$

d'où, lorsque $\theta \rightarrow 2\pi$, on trouve

$$\sqrt{\gamma_r(0)} = \sqrt{r} = -\sqrt{r}.$$

On peut faire la même chose avec l'autre détermination. Le point 0 est un point de branchement pour la multifonction $\sqrt{\cdot}$. Cette multifonction est plus simple que le logarithme ou l'argument dans la mesure où elle n'a que deux déterminations (deux branches).

1.6 Exercices

Exercice 1.1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\cos z = 2$.

Exercice 1.2. On considère la fonction $f : z \mapsto |z|$. Montrer que f n'est complexe différentiable en aucun point de $\mathbb{C}$.

Exercice 1.3. Montrer que les fonctions suivantes sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ et calculer leur dérivée :

$$f(z) = z^n \quad n \in \mathbb{N}, \quad g(z) = e^z.$$

Exercice 1.4. Où les fonctions suivantes sont-elles holomorphes :

$$\frac{e^z}{z(z-1)}, \quad (z^5 - 1)^{-1}, \quad (1 + e^z)^{-2}, \quad e^{i/z}, \quad \sin\left(\frac{1}{z}\right), \quad z|z|.$$

Exercice 1.5. Calculer pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $r > 0$ l'intégrale :

$$\int_{\gamma_{0,r}} z^n dz.$$

Exercice 1.6. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω à valeurs réelles. Montrer qu'alors f est constante sur Ω . En est-il de même pour Ω ouvert quelconque de $\mathbb{C}$?

Exercice 1.7. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, on suppose l'une des trois propriétés suivantes :

1. $\operatorname{Re} f$ est constante sur Ω ;
2. $\operatorname{Im} f$ est constante sur Ω ;
3. e^f est constante sur Ω ;

montrer que dans chaque cas, f est nécessairement constante sur Ω .

Exercice 1.8. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ un chemin $\mathcal{C}^1$. Montrer que pour toute fonction f holomorphe dans Ω , on a

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Le résultat se généralise-t-il au cas d'un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux?

Exercice 1.9. Evaluer $\int_{\gamma} f(z) dz$ dans les cas suivants :

1. $f(z) = |z|^4$, $\gamma = [-1 + i, 1 + i]$,
2. $f(z) = z^2$, γ est la partie de $\gamma_{0,1}$ comprise dans le demi-plan $x > 0$,

3. $f(z) = \operatorname{Re} z$, $\gamma(t) = t + it^2$, $t \in [0, 1]$,

4. $f(z) = e^z$, γ est formé des trois segments $[0, 1]$, $[1, 1 + i]$, $[1 + i, i]$.

Exercice 1.10. Evaluer

$$\int_{\gamma} \frac{1}{1+z^2} dz$$

lorsque γ est : $\gamma_{1,1}$, $\gamma_{i,1}$, $\gamma_{-i,1}$, $\gamma_{0,2}$, $\gamma_{3i,\pi}$.

Exercice 1.11. Soit $a > 0$, $b > 0$.

1. Définir un chemin γ dont l'image est l'ellipse

$$\frac{(\operatorname{Re} z)^2}{a^2} + \frac{(\operatorname{Im} z)^2}{b^2} = 1$$

parcourue dans le sens direct.

2. Donner sans calcul la valeur de

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z}.$$

3. Montrer en utilisant la question précédente que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = \frac{2\pi}{ab}.$$

Exercice 1.12. On considère le chemin fermé γ constitué de la courbe $\operatorname{Im} z = (\operatorname{Re} z)^2$ parcourue de $\operatorname{Re} z = -2$ à $\operatorname{Re} z = 2$ puis puis refermée par un segment du cercle $(\operatorname{Re} z)^2 + ((\operatorname{Im} z) - 2)^2 = 4$. Représenter le chemin γ puis calculer

$$\int_{\gamma} \operatorname{Re} z dz.$$

Exercice 1.13. Montrer que la série entière

$$\sum_{n \geq 0} z^n$$

a pour rayon de convergence $R = 1$ et que sa somme vaut $1/(1-z)$ dans $D(0, 1)$.

Exercice 1.14. On considère la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Soit R son rayon de convergence. Montrer que si la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

existe, alors

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}.$$

Exercice 1.15. Calculer le rayon de convergence des séries suivantes :

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n n^2 z^n, \quad \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}, \quad \sum_{n \geq 1} (\ln n) z^n, \quad \sum_{n \geq 0} n^{\sqrt{n}} z^n, \quad \sum_{n \geq 1} n^{\ln(n)} z^{n^2}.$$

Exercice 1.16. Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes en précisant le rayon de convergence :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad f(z) &= \frac{1}{6z^2 - 5z + 1}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \text{(ii)} \quad f(z) = \frac{1}{1 + z + z^2}, \\ \text{(iii)} \quad f(z) &= e^{z \operatorname{cha}} \operatorname{ch}(z \operatorname{sha}). \end{aligned}$$

Exercice 1.17. Développer

$$f(z) = \frac{1}{1 - z}$$

en série entière au voisinage de i . Quel est le rayon de convergence de la série? Aurait-on pu prévoir ce résultat?

Exercice 1.18. Peut-on trouver une fonction f holomorphe dans $D(0, 1)$, non identiquement nulle, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait :

$$\bullet f(1/n) = 0? \quad \bullet f(1/n) = (-1)^n? \quad \bullet f(1/n) = n/(n+1)?$$

Exercice 1.19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n points distincts p_k , $k = 1, 2, \dots, n$, sur le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe un point p sur le cercle unité tel que le produit des distances de p à chaque point p_k soit supérieur ou égal à 1.

Exercice 1.20. On considère la fonction

$$f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right).$$

Dans quel domaine est-elle holomorphe? Quelle est la nature de la singularité en $z = 0$?

Exercice 1.21. On considère la fonction

$$f(z) = \sin \frac{1}{z} + \frac{1}{(z - i)(z + 2i)}.$$

1. Quelles sont les singularités de f et leurs natures?
2. f est-elle méromorphe sur $\mathbb{C}$?
3. Développer f en série de Laurent dans les couronnes $C(0, 0, 1)$, $C(0, 1, 2)$.

Exercice 1.22. Evaluer les intégrales suivantes lorsque $\gamma = \gamma_{0,2}$:

$$\begin{aligned} &\bullet \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 - 9} \quad \bullet \int_{\gamma} \frac{z^3 + e^z}{z - 1} dz \quad \bullet \int_{\gamma} (z - 1)^{-3} e^{z^2} dz \\ &\bullet \int_{\gamma} z^{-m} \cos z dz, \quad n \in \mathbb{N} \quad \bullet \int_{\gamma} z^n (1 - z)^m dz, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Exercice 1.23. Calculer les intégrales suivantes :

$$\bullet \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin \theta} , \quad \bullet \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2 + \cos \theta)^2} .$$

Exercice 1.24. On considère P et Q deux polynômes avec $d^\circ P \leq d^\circ Q - 2$. On suppose de plus que Q n'a pas de zéro sur l'axe réel. Pour $r > 0$, on note Γ_r la partie contenue dans le demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ du cercle de centre 0 et de rayon r parcourue dans le sens positif. Calculer

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_{0,r}} \frac{P(z)}{Q(z)} dz ,$$

en déduire une expression de la valeur de

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{P(z)}{Q(z)} dz .$$

Exercice 1.25. Démontrer le résultat suivant (**inégalité de Jordan**) : si $0 \leq \theta \leq \pi/2$, alors

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin \theta}{\theta} \leq 1 .$$

En déduire le **lemme de Jordan** suivant : soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, on suppose que f est continue sur $C(0, R, +\infty) \cap \{\operatorname{Im} z \geq 0\}$ pour $R > 0$ donné et que $f(z) \rightarrow 0$ lorsque $|z| \rightarrow +\infty$. Alors,

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_r} f(z) e^{iz} dz = 0 .$$

Exercice 1.26. Calculer les intégrales :

$$\bullet \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} , \quad \bullet \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{1+x+x^2} dx , \quad \bullet \int_0^{+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} \frac{\sin x}{x} dx .$$

Exercice 1.27. Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} &\bullet \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta \sin \theta}{2 - e^{i\theta}} e^{i\theta} d\theta , \\ &\bullet \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{(x^2 + 1)^2} dx , \\ &\bullet \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)^2} dx . \end{aligned}$$

Exercice 1.28. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{(x^2 + 1)^2} dx .$$

Chapitre 2

Théorie spectrale des opérateurs bornés

Dans tout le chapitre, H sera un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$, sauf lorsqu'on précisera qu'il s'agit d'un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$. On notera $\langle ., . \rangle$ et $\|.\|$ le produit scalaire sur H et la norme associée. L'identité de H sera notée I , de même que l'application identité sur tout espace considéré.

2.1 Définitions et propriétés, rappels

Définition 2.1. On appelle opérateur borné sur H une application linéaire A de H dans H telle que

$$\sup_{x \in H, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < +\infty.$$

On note $\mathcal{L}(H)$ l'ensemble des opérateurs bornés sur H . Sur $\mathcal{L}(H)$, on définit la norme

$$\|A\| := \sup_{x \in H, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \in H, \|x\|=1} \|Ax\|.$$

Remarque 2.1. Pour tout $A \in \mathcal{L}(H)$ et $x \in H$, par définition de la norme de A , on a $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$.

Remarque 2.2. L'ensemble $\mathcal{L}(H)$ muni de la norme définie ci-dessus est un espace de Banach. De plus, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) A est un opérateur borné sur H ;
- (ii) A est une application linéaire continue de H dans lui-même.

La norme des opérateurs bornés est une norme d'algèbre, c'est-à-dire :

Proposition 2.1. Soit $A, B \in \mathcal{L}(H)$, on a

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

Sur l'espace $\mathcal{L}(H)$, on dispose de trois types de convergence :

Définition 2.2. On considère une suite $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{L}(H)$ et $A \in \mathcal{L}(H)$. On dit que :

1. A_n converge vers A en norme si $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$;
2. A_n converge fortement vers A si pour tout $x \in H$, on a $A_n x \rightarrow Ax$ lorsque $n \rightarrow \infty$;
3. A_n converge faiblement vers A si pour tous $x, y \in H$, on a $\langle A_n x, y \rangle \rightarrow \langle Ax, y \rangle$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Proposition 2.2. Les implications suivantes sont évidentes : A_n converge vers A en norme $\implies A_n$ converge fortement vers $A \implies A_n$ converge faiblement vers A . Si $\dim H < +\infty$, on a équivalence, sinon, les réciproques sont fausses.

2.2 Adjoint d'un opérateur, opérateurs auto-adjoints

Théorème 2.1. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, il existe un unique opérateur $A^* \in \mathcal{L}(H)$ tel que, pour tous $x, y \in H$, on ait

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle.$$

De plus A^* vérifie $\|A^*\| = \|A\|$.

Preuve. Soit y donné dans H , l'application

$$x \longmapsto \langle Ax, y \rangle$$

est une forme linéaire continue sur H . Par le théorème de Riesz, il suit qu'il existe un unique $z \in H$ tel que, pour tout $x \in H$, on ait $\langle Ax, y \rangle = \langle x, z \rangle$. On note $z = A^* y$. A^* est bien défini, et ce de manière unique, en tant qu'application de H dans H car pour y donné, on définit z , l'image de y par A^* , de façon unique.

Montrons que A^* est linéaire : soit $y, y' \in H$, pour $x \in H$ quelconque,

$$\langle Ax, y + y' \rangle = \langle Ax, y \rangle + \langle Ax, y' \rangle$$

et

$$\begin{aligned} \langle Ax, y + y' \rangle &= \langle x, A^*(y + y') \rangle, \\ \langle Ax, y \rangle &= \langle x, A^* y \rangle, \\ \langle Ax, y' \rangle &= \langle x, A^* y' \rangle. \end{aligned}$$

D'où, pour tout $x \in H$,

$$\langle x, A^*(y + y') \rangle = \langle x, A^* y \rangle + \langle x, A^* y' \rangle$$

ce qui équivaut à $A^*(y + y') = A^* y + A^* y'$. On peut faire de même pour montrer que $A^*(\lambda y) = \lambda A^* y$.

Montrons maintenant que A^* est borné et a même norme que A . Dans un premier temps,

$$\|A^*x\|^2 = \langle A^*x, A^*x \rangle = \langle AA^*x, x \rangle \leq \|A\| \|A^*x\| \|x\|$$

d'où

$$\|A^*x\| \leq \|A\| \|x\|.$$

il suit que $A^* \in \mathcal{L}(H)$ et

$$\|A^*\| = \sup_{x \in H, x \neq 0} \frac{\|A^*x\|}{\|x\|} \leq \|A\|.$$

On procède de la même façon pour l'autre inégalité :

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle x, A^*Ax \rangle \leq \|A^*\| \|Ax\| \|x\|$$

d'où,

$$\|Ax\| \leq \|A^*\| \|x\|$$

et donc $\|A\| \leq \|A^*\|$. □

Définition 2.3. *L'opérateur A^* est appelé l'opérateur adjoint de A .*

Proposition 2.3. *L'application $A \mapsto A^*$ a les propriétés suivantes :*

1. *c'est une isométrie anti-linéaire de $\mathcal{L}(H)$;*
2. *$(AB)^* = B^*A^*$;*
3. *$(A^*)^* = A$;*
4. *si A^{-1} existe dans $\mathcal{L}(H)$, alors $(A^*)^{-1}$ existe également dans $\mathcal{L}(H)$ et de plus $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.*

Preuve.

1. On a $\|A^*\| = \|A\|$. De plus,

$$\begin{aligned} \langle (A+B)x, y \rangle &= \langle x, (A+B)^*y \rangle \\ &= \langle Ax, y \rangle + \langle Bx, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle + \langle x, B^*y \rangle = \langle x, (A^* + B^*)y \rangle \end{aligned}$$

d'où $(A+B)^* = A^* + B^*$, et

$$\langle \lambda Ax, y \rangle = \lambda \langle x, A^*y \rangle = \langle x, \bar{\lambda} A^*y \rangle$$

ce qui montre que $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$.

2. Pour tous $x, y \in H$, on a

$$\langle ABx, y \rangle = \langle Bx, A^*y \rangle = \langle x, B^*A^*y \rangle.$$

3. Pour tous $x, y \in H$,

$$\langle A^*x, y \rangle = \overline{\langle y, A^*x \rangle} = \overline{\langle Ay, x \rangle} = \langle x, Ay \rangle .$$

4. On suppose que A^{-1} existe dans $\mathcal{L}(H)$, alors, en utilisant le second point et le fait que $I^* = I$ (vérification immédiate),

$$\begin{aligned} I &= AA^{-1} = I^* = (A^{-1})^* A^* \\ &= A^{-1}A = I^* = A^*(A^{-1})^* \end{aligned}$$

ce qui montre bien que A^* est inversible d'inverse $(A^{-1})^*$. $\square$

Définition 2.4. On dit que $A \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint si $A^* = A$.

Proposition 2.4. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, alors :

$$A \text{ auto-adjoint} \Leftrightarrow \forall x \in H, \langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R} .$$

Preuve. Laissée en exercice, utilise l'égalité du parallélogramme.

Proposition 2.5. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint, alors

$$\|A\| = \sup_{x \in H, \|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle| .$$

Preuve. Une première inégalité est immédiate :

$$\sup_{x \in H, \|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle| \leq \|A\| .$$

Montrons l'inégalité réciproque. On utilise l'égalité du parallélogramme :

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &= \frac{1}{4} (\langle A(x+y), x+y \rangle - \langle A(x-y), x-y \rangle) \\ &\quad + \frac{i}{4} (\langle A(x+iy), x+iy \rangle - \langle A(x-iy), x-iy \rangle) . \end{aligned}$$

La première ligne du second membre est réelle et que la seconde est imaginaire pure. On en déduit que

$$\operatorname{Re} \langle Ax, y \rangle = \frac{1}{4} (\langle A(x+y), x+y \rangle - \langle A(x-y), x-y \rangle)$$

et si on pose

$$K = \sup_{x \in H, \|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle|$$

on a

$$|\operatorname{Re} \langle Ax, y \rangle| \leq \frac{K}{4} (\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = \frac{K}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (2.1)$$

car notamment

$$|\langle A(x+y), x+y \rangle| = \|x+y\|^2 \left| \left\langle A \left(\frac{x+y}{\|x+y\|} \right), \frac{x+y}{\|x+y\|} \right\rangle \right| \leq K \|x+y\|^2.$$

Si $K = 0$, on choisit $y = Ax$, on obtient d'après (2.1)

$$|\operatorname{Re} \langle Ax, y \rangle| = \langle Ax, Ax \rangle = \|Ax\|^2 = 0$$

pour tout $x \in H$, d'où $A = 0$ et donc $\|A\| = 0$. Si $K > 0$, on pose $y = \frac{1}{K}Ax$, l'inégalité (2.1) entraîne

$$\frac{1}{K} \|Ax\|^2 \leq \frac{K}{2} \left(\|x\|^2 + \frac{1}{K^2} \|Ax\|^2 \right),$$

d'où

$$\frac{1}{2K} \|Ax\|^2 \leq \frac{K}{2} \|x\|^2$$

c'est-à-dire, pour $x \neq 0$,

$$\frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2} \leq K^2$$

et finalement $\|A\| \leq K$. □

2.3 Spectre des opérateurs bornés

La notion de spectre a déjà été rencontrée à propos des matrices. Etant donné $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, le spectre de A est l'ensemble des valeurs propres de A , i.e. l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\det(\lambda I - A) = 0$, ce qui signifie que $\lambda I - A$ n'est pas un isomorphisme de $\mathbb{C}^n$. On va définir de façon tout-à-fait analogue le spectre d'un opérateur borné sur un espace de Hilbert, mais en dimension infinie on va voir qu'on peut distinguer plusieurs types d'éléments du spectre et que les valeurs propres ne sont pas les seuls types de valeurs spectrales.

Définition 2.5 (Ensemble résolvant, résolvante). *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, on dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ appartient à l'ensemble résolvant de A si $\lambda I - A$ est un isomorphisme de H , ce qui équivaut à dire que $\lambda I - A$ est une bijection de H dans H et que $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. L'ensemble résolvant de A est noté $\rho(A)$. L'opérateur $(\lambda I - A)^{-1}$ est appelé la résolvante de A en λ et noté $R_\lambda(A)$.*

Remarque 2.3. *On rappelle le théorème des isomorphismes de Banach : étant donnés deux espaces de Banach E et F et f une application linéaire continue bijective de E dans F , alors f^{-1} est continue.*

C'est une conséquence directe du théorème de l'application ouverte. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire continue surjective, alors f est ouverte.

On voit en particulier que $\lambda \in \rho(A)$ si et seulement si $\lambda I - A$ est bijective, la continuité de $(\lambda I - A)^{-1}$ est automatique.

Définition 2.6 (Spectre). Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, on appelle spectre de A et on note $\sigma(A)$ le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de $\rho(A)$. Le spectre de A est donc l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda I - A$ n'est pas un isomorphisme de H . Par la remarque ci-dessus, ceci équivaut à définir $\sigma(A)$ comme l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda I - A$ n'est pas bijective ; cette propriété peut être réalisée de trois façons différentes, ce qui correspond à trois type de spectres distincts.

1. Le spectre ponctuel de A , noté $\sigma_p(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de A , il est défini comme suit : $\lambda \in \sigma_p(A)$ si et seulement si $\text{Ker}(\lambda I - A) \neq \{0\}$, i.e. si et seulement si $\lambda I - A$ n'est pas injective.
2. Le spectre continu de A , $\sigma_c(A)$, est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda I - A$ est injectif, non surjectif, mais son image est dense dans H , i.e.

$$\text{Ker}(\lambda I - A) = \{0\}, \text{Im}(\lambda I - A) \neq H, \overline{\text{Im}(\lambda I - A)} = H.$$

3. Le spectre résiduel, $\sigma_r(A)$, est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda I - A$ est injectif, non surjectif, mais son image n'est pas dense dans H , i.e.

$$\text{Ker}(\lambda I - A) = \{0\}, (\text{Im}(\lambda I - A))^\perp \neq \{0\}.$$

Le spectre $\sigma(A)$ est la réunion disjointe de $\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$ et $\sigma_r(A)$.

On se pose naturellement certaines questions sur le spectre d'un opérateur : est-il non vide, est-il ouvert ou fermé, est-il borné? La démonstration de certaines de ces propriétés utilise l'analyse complexe sous une forme appelée calcul fonctionnel analytique, que nous présentons succinctement à la section suivante.

2.4 Calcul fonctionnel analytique

La théorie des fonctions analytiques à valeurs dans un espace de Banach est analogue à celle des fonctions holomorphes, à la différence près que les fonctions, au lieu d'être à valeurs dans $\mathbb{C}$, prennent leurs valeurs dans un espace de Banach E . Nous citons simplement sans démonstration les résultats que nous utiliserons, puis nous les appliquons dans le cas particulier où $E = \mathcal{L}(H)$.

Définition 2.7. Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{C}$, Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, on appelle fonction analytique dans Ω à valeurs dans E une fonction $f : \Omega \rightarrow E$ telle que, pour tout $a \in \Omega$, il existe des coefficients $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans E tels que, pour tout $z \in D(a, R_a)$ (pour la définition de R_a , voir théorème 1.6) on ait

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (z - a)^n c_n, \quad (2.2)$$

la série convergeant simplement dans $D(a, R_a)$ et normalement dans $\bar{D}(a, r)$ pour tout $r < R_a$.

Remarque 2.4. *De telles fonctions se comportent exactement comme des fonctions holomorphes. En particulier, elles sont complexe-différentiables, leur dérivée au sens complexe est continue, elles sont $\mathcal{C}^\infty$ (la dérivée de la série entière (2.2) a même rayon de convergence que la série (2.2)), les coefficients c_n sont uniques.*

Remarque 2.5. *On voit que si f est analytique sur Ω à valeurs dans E , pour toute forme linéaire continue l sur E , la fonction $z \mapsto l(f(z))$, définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{C}$, est holomorphe sur Ω . Ce qui est remarquable est que la réciproque est vraie.*

L'exemple fondamental est le suivant :

Exemple. *Soit $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans E , on pose*

$$R := \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|c_n\|^{1/n}}$$

alors

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n c_n$$

est une fonction analytique sur $D(0, R)$ à valeurs dans E , de plus, la série diverge pour $|z| > R$.

Dans ce cours, nous considérerons des fonctions analytiques à valeurs dans $\mathcal{L}(H)$. A tout opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ et toute fonction $f \in \mathbf{H}(D(0, R))$, $R > 0$, on peut associer une telle fonction :

Proposition 2.6. *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ et soit la série entière*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

de rayon de convergence $R > 0$. La série

$$f(zA) := \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n A^n$$

définit une fonction analytique dans $D(0, \frac{R}{\|A\|})$ à valeurs dans $\mathcal{L}(H)$.

Preuve. On a

$$\|c_n A^n\|^{1/n} \leq \|A\| |c_n|^{1/n},$$

conséquemment

$$\frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|c_n A^n\|^{1/n}} \geq \frac{1}{\|A\| \limsup_{n \rightarrow +\infty} |c_n|^{1/n}} = \frac{R}{\|A\|}$$

et on se retrouve dans le cas de l'exemple fondamental précédent. $\square$

Corollaire 2.1. *Soit la série entière*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

de rayon de convergence $R > 0$ et soit $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\|A\| < R$, alors

$$f(A) := \sum_{n=0}^{+\infty} c_n A^n$$

est bien défini dans $\mathcal{L}(H)$.

On pourra se convaincre des propriétés suivantes qui seront développées systématiquement dans le cadre du calcul fonctionnel continu.

Propriétés. *Soit $f, g \in \mathbf{H}(D(0, R))$, $R > 0$. On a :*

1. *soit $A \in \mathcal{L}(H)$, $\|A\| < R$,*

(a) *$f.g(A) = f(A) \circ g(A)$;*

(b) *si $\lambda \in \sigma_p(A)$, alors pour $x \in H$ tel que $Ax = \lambda x$, on a $f(A)x = f(\lambda)x$, ce qui entraîne que $f(\lambda) \in \sigma_p(f(A))$;*

2. *l'application de $B_{\mathcal{L}(H)}(0, R)$ dans $\mathcal{L}(H)$ qui à A associe $f(A)$ est continue.*

2.5 Propriétés du spectre des opérateurs bornés

Théorème 2.2. *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, $\rho(A)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\lambda \mapsto R_\lambda(A)$ est analytique de $\rho(A)$ dans $\mathcal{L}(H)$.*

Preuve. Soit $\lambda_0 \in \rho(A)$, on veut montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $D(\lambda_0, r) \subset \rho(A)$, i.e. $R_\lambda(A)$ est bien défini dans $\mathcal{L}(H)$ pour $|\lambda - \lambda_0| < r$. L'idée est simple et peut se comprendre intuitivement tout d'abord. On effectue un calcul formel

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda - A} &= \frac{1}{\lambda - \lambda_0 + \lambda_0 - A} = \frac{1}{\lambda_0 - A} \frac{1}{1 - \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 - A}} \\ &= \frac{1}{\lambda_0 - A} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 - A} \right)^n \end{aligned}$$

et cette série converge pour $|\lambda_0 - \lambda| < \|(\lambda_0 - A)^{-1}\|^{-1} = \|R_{\lambda_0}(A)\|^{-1}$.

On exprime maintenant cette idée de façon rigoureuse. On pose

$$\tilde{R}_\lambda(A) := R_{\lambda_0}(A) \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n (R_{\lambda_0}(A))^n ,$$

à noter que le terme correspondant à $n = 0$ dans la série est I . Comme

$$\|(\lambda_0 - \lambda)^n (R_{\lambda_0}(A))^n\| \leq |\lambda_0 - \lambda|^n \|R_{\lambda_0}(A)\|^n,$$

la série est bien convergente pour $|\lambda_0 - \lambda| < \|R_{\lambda_0}(A)\|^{-1}$ et est analytique en λ sur $D(\lambda_0, \|R_{\lambda_0}(A)\|^{-1})$ à valeurs dans $\mathcal{L}(H)$. De plus,

$$\begin{aligned} (\lambda - A) \tilde{R}_\lambda(A) &= (\lambda - A) (\lambda_0 - A)^{-1} \left[I + \sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n (\lambda_0 - A)^{-n} \right] \\ &= ((\lambda - \lambda_0) + (\lambda_0 - A)) (\lambda_0 - A)^{-1} \left[I + \sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n (\lambda_0 - A)^{-n} \right] \\ &= (\lambda - \lambda_0) \left[(\lambda_0 - A)^{-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n (\lambda_0 - A)^{-n-1} \right] \\ &\quad + I + \sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n (\lambda_0 - A)^{-n} \\ &= I. \end{aligned}$$

Par un calcul analogue, on montre que

$$\tilde{R}_\lambda(A) (\lambda - A) = I.$$

Il suit que $\tilde{R}_\lambda(A) = R_\lambda(A)$ qui est donc bien défini dans $D(\lambda_0, \|R_{\lambda_0}(A)\|^{-1})$ en tant qu'élément de $\mathcal{L}(H)$. Ceci entraîne que $D(\lambda_0, \|R_{\lambda_0}(A)\|^{-1}) \subset \rho(A)$ et donc que $\rho(A)$ est ouvert. De plus, $R_\lambda(A)$ est analytique dans $D(\lambda_0, \|R_{\lambda_0}(A)\|^{-1})$ à valeurs $\mathcal{L}(H)$. Donc, $R_\lambda(A)$ est analytique au voisinage de chaque point de $\rho(A)$ et donc dans $\rho(A)$. $\square$

On démontre une propriété supplémentaire de la résolvante.

Proposition 2.7. *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, $\lambda, \mu \in \rho(A)$, on a*

$$\begin{aligned} R_\lambda(A) R_\mu(A) &= R_\mu(A) R_\lambda(A), \\ R_\lambda(A) - R_\mu(A) &= (\mu - \lambda) R_\mu(A) R_\lambda(A) \text{ (formule de la résolvante).} \end{aligned}$$

Preuve. Pour $\lambda, \mu \in \rho(A)$, $\lambda \neq \mu$,

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = R_\lambda(A) \underbrace{(\mu - A) R_\mu(A)}_{=I} - \underbrace{(\lambda - A) R_\lambda(A)}_{=I} R_\mu(A) = (\mu - \lambda) R_\lambda(A) R_\mu(A).$$

De plus, en écrivant

$$\begin{aligned} R_\lambda(A) - R_\mu(A) &= (\mu - \lambda) R_\lambda(A) R_\mu(A) \\ R_\mu(A) - R_\lambda(A) &= (\lambda - \mu) R_\mu(A) R_\lambda(A) \end{aligned}$$

et en faisant la somme des deux égalités, on obtient

$$0 = (\mu - \lambda) (R_\lambda(A) R_\mu(A) - R_\mu(A) R_\lambda(A))$$

avec $\mu - \lambda \neq 0$. $\square$

Théorème 2.3. *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, alors $\sigma(A) \neq \emptyset$.*

Preuve. Supposons que $\sigma(A) = \emptyset$, alors $R_\lambda(A)$ est analytique sur $\mathbb{C} = \rho(A)$ à valeurs dans $\mathcal{L}(H)$. Pour $|\lambda| > \|A\|$, on a

$$(\lambda - A)^{-1} = \lambda^{-1} \left(1 - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n$$

ce qui entraîne

$$\|R_\lambda(A)\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\|A\|}{|\lambda|}\right)^n = \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \frac{\|A\|}{|\lambda|}} \longrightarrow 0 \text{ lorsque } |\lambda| \rightarrow \infty.$$

En conséquence, pour toute forme linéaire continue l sur $\mathcal{L}(H)$, $\lambda \mapsto l(R_\lambda(A))$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et tend vers 0 à l'infini, elle est donc bornée sur $\mathbb{C}$; par le théorème de Liouville, cette fonction est donc constante, la constante est nécessairement 0 pour assurer la limite nulle à l'infini. Il suit que pour tout $l \in (\mathcal{L}(H))'$, on a $l(R_\lambda(A)) \equiv 0$, c'est-à-dire $R_\lambda(A) \equiv 0$, ce qui est absurde. $\square$

On va maintenant donner une estimation de la localisation du spectre d'un opérateur.

Définition 2.8. *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, on appelle rayon spectral de A , et on note $r(A)$, la quantité*

$$r(A) := \sup \{|\lambda| ; \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Théorème 2.4. *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, on a*

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^n\|^{1/n} \leq \|A\|. \quad (2.3)$$

Preuve. Tout d'abord, il est clair que

$$\|A^n\|^{1/n} \leq \|A\|$$

donc si la limite (2.3) existe, elle est inférieure à $\|A\|$. On va maintenant montrer que

$$r(A) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|A^n\|^{1/n} \quad (2.4)$$

puis on montrera que la limite existe.

Tout d'abord, il est clair que $r(A) \leq \|A\|$, en effet, pour $|\lambda| > \|A\|$, on a

$$R_\lambda(A) = (\lambda - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{\lambda^n} \quad (2.5)$$

est bien définie et est analytique de $C(0, \|A\|, +\infty)$ dans $\mathcal{L}(H)$. De plus, par définition de $r(A)$, $C(0, r(A), +\infty) \subset \rho(A)$. Comme $R_\lambda(A)$ est analytique dans $\rho(A)$, elle est analytique dans $C(0, r(A), +\infty)$. Elle admet donc un unique développement en série de Laurent dans

cette couronne et par unicité, ce développement est donné par (2.5). En posant $z = 1/\lambda$, on a

$$R_\lambda(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n+1} A^n$$

et le rayon de convergence de cette série entière est

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|A^n\|^{1/n}} \geq \frac{1}{\|A\|} > 0. \quad (2.6)$$

Elle est donc en particulier analytique au voisinage de 0, de plus on sait qu'elle est analytique dans $C(0, 0, r(A)^{-1})$. Elle est donc analytique dans $D(0, r(A)^{-1})$, ce qui entraîne que $r(A)^{-1}$ est inférieur à son rayon de convergence, et donc

$$r(A) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|A^n\|^{1/n}.$$

Montrons l'inégalité réciproque. La série $\sum z^n A^n$ converge dans $\mathcal{L}(H)$ pour $|z| < R$. De plus, on a

$$(I - zA) \sum z^n A^n = \left(\sum z^n A^n \right) (I - zA) = I$$

d'où $\sum z^n A^n = (I - zA)^{-1} = z^{-1} R_{z^{-1}}(A)$. Il suit que $R_\lambda(A)$ est défini pour $|\lambda| > R^{-1}$, d'où $r(A) \leq R^{-1}$. On en déduit donc (2.4). Reste à voir que la limite sup est une limite. Pour cela, on pose $b_n = \ln \|A^n\|$. On a $\|A^{n+m}\| \leq \|A^n\| \|A^m\|$, ce qui entraîne $b_{n+m} \leq b_n + b_m$. Soit $m \in \mathbb{N}$ fixé, pour $n \geq m$, on peut écrire la division euclidienne de n par m de la façon suivante : $n = mq + r$, $0 \leq r \leq m - 1$. Comme $b_{mq} \leq qb_m$, il suit que $b_n \leq qb_m + b_r$ et en divisant par n ,

$$\frac{b_n}{n} \leq \frac{q}{n} b_m + \frac{b_r}{n}.$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, $q/n \rightarrow 1/m$ et $b_r/n \rightarrow 0$ du fait que b_r ne prend qu'un nombre fini de valeurs $b_0, \dots, b_{m-1}$ et est donc bornée. On en déduit que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{q}{n} b_m + \frac{b_r}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{q}{n} b_m + \frac{b_r}{n} \right) = \frac{b_m}{m}.$$

On peut donc écrire

$$\inf_{n > 0} \frac{b_n}{n} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{n} \leq \frac{b_m}{m}$$

et comme m est arbitraire, on a

$$\inf_{n > 0} \frac{b_n}{n} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{n} \leq \inf_{m > 0} \frac{b_m}{m}.$$

Il suit que la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de b_n/n existe car la limite sup et la limite inf sont égales. Et comme $b_n/n = \ln(\|A^n\|^{1/n})$, le résultat suit. $\square$

Lorsque A est un opérateur auto-adjoint, le rayon spectral se caractérise plus simplement.

Corollaire 2.2. *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint, alors $r(A) = \|A\|$.*

Preuve. Comme la suite $\|A^n\|^{1/n}$ converge vers $r(A)$, il nous suffit de montrer qu'une de ses sous-suite converge vers $\|A\|$ pour prouver l'égalité. D'une part

$$\|A^*A\| = \sup_{\|x\|=1} \langle A^*Ax, x \rangle = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 = \|A\|^2,$$

d'autre part A est auto-adjoint et donc $\|A^*A\| = \|A^2\|$. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n}$. Il suit

$$\|A\| = \left\| A^{2^n} \right\|^{\frac{1}{2^n}} \longrightarrow r(A) \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty. \quad \square$$

Dans le cas général d'un opérateur A non nécessairement autoadjoint, on a des liens naturels entre le spectre de A et celui de A^* .

Proposition 2.8. *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$,*

1. $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(A^*),$
2. *pour $\lambda \in \rho(A)$, on a $(R_\lambda(A))^* = R_{\bar{\lambda}}(A^*),$*
3. $\lambda \in \sigma_r(A) \implies \bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*),$
4. $\lambda \in \sigma_p(A) \implies \bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*) \cup \sigma_r(A^*),$
5. $\lambda \in \sigma_c(A) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_c(A^*).$

Preuve.

1. et 2. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$(\lambda I - A)^* = \bar{\lambda} I - A^*$$

ce qui montre les deux premiers points.

3. On se souvient que pour $B \in \mathcal{L}(H)$, on a

$$H = \text{Ker } B \oplus^\perp \overline{\text{Im } B^*}$$

où $\oplus^\perp$ désigne une somme directe orthogonale, autrement dit

$$(\text{Im } B^*)^\perp = \text{Ker } B.$$

Dire que $\lambda \in \sigma_r(A)$ implique que $\text{Im}(\lambda I - A)$ n'est pas dense dans H , i.e.

$$\text{Ker}(\bar{\lambda} I - A^*) = (\text{Im}(\lambda I - A))^\perp \neq \{0\},$$

et donc $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$.

4. Soit $\lambda \in \sigma_p(A)$, i.e. tel que $\text{Ker}(\lambda I - A) \neq \{0\}$. On réutilise la même idée

$$H = \text{Ker}(\lambda I - A) \overset{\perp}{\oplus} \overline{\text{Im}(\bar{\lambda} I - A^*)},$$

d'où $(\text{Im}(\bar{\lambda} I - A^*))^\perp \neq \{0\}$, l'image de $\bar{\lambda} I - A^*$ n'est pas dense dans H . Si de plus $\bar{\lambda} I - A^*$ est injective, cela implique $\bar{\lambda} \in \sigma_r(A^*)$ et sinon on a $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$.

5. Soit $\lambda \in \sigma_c(A)$. On utilise les deux propriétés

$$H = \text{Ker}(\lambda I - A) \overset{\perp}{\oplus} \overline{\text{Im}(\bar{\lambda} I - A^*)},$$

$$H = \text{Ker}(\bar{\lambda} I - A^*) \overset{\perp}{\oplus} \overline{\text{Im}(\lambda I - A)}.$$

On a $\text{Ker}(\lambda I - A) = \{0\}$, d'où $\text{Im}(\bar{\lambda} I - A^*)$ est dense dans H . De plus $\text{Im}(\lambda I - A)$ est dense dans H , d'où $\text{Ker}(\bar{\lambda} I - A^*) = \{0\}$. On a donc $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$. On peut faire le même raisonnement en sens inverse. $\square$

Dans le cas où A est auto-adjoint, on peut préciser la structure du spectre de A .

Théorème 2.5. *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint, alors*

1. $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$,
2. $\sigma_r(A) = \emptyset$,
3. *les fonctions propres de A associées à des valeurs propres différentes sont orthogonales.*

Preuve.

- On commence par montrer que $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \sigma_p(A)$ et $x \in H$, $x \neq 0$ tel que $Ax = \lambda x$, alors

$$\langle Ax, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle$$

d'où $(\lambda - \bar{\lambda}) \|x\|^2 = 0$ et $\|x\| \neq 0$, d'où $\lambda \in \mathbb{R}$.

- On en déduit facilement que $\sigma_r(A) = \emptyset$, en effet, soit $\lambda \in \sigma_r(A)$, alors $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*) = \sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$. On a donc $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \sigma_p(A)$, ce qui est absurde car $\sigma_r(A)$ et $\sigma_p(A)$ sont disjoints. Donc $\sigma_r(A) = \emptyset$.
- Montrons maintenant que $\sigma_c(A) \subset \mathbb{R}$. Soit $\lambda = \alpha + i\beta$ avec $\beta \neq 0$. On suppose que $\lambda \in \sigma_c(A)$. Alors $\lambda I - A$ est injective et son image est dense mais distincte de H . On va montrer qu'en fait $\text{Im}(\lambda I - A)$ est fermée dans H , ce qui contredit les hypothèses. Pour cela, on commence par montrer une inégalité qu'on utilisera ensuite pour conclure. Soit $x \in H$,

$$\begin{aligned} \|(\lambda - A)x\|^2 &= \langle (\alpha + i\beta - A)x, (\alpha + i\beta - A)x \rangle \\ &= \|(\alpha - A)x\|^2 + \|\beta x\|^2 + 2\text{Re} \langle i\beta x, (\alpha - A)x \rangle \end{aligned}$$

or,

$$\langle i\beta x, (\alpha - A)x \rangle = i\langle \beta, (\alpha - A)x \rangle = i\beta\alpha\|x\|^2 - i\beta\langle x, Ax \rangle \in i\mathbb{R},$$

d'où

$$\|(\lambda - A)x\|^2 = \|(\alpha - A)x\|^2 + \|\beta x\|^2 \geq \beta^2\|x\|^2. \quad (2.7)$$

Considérons x_n une suite de Cauchy dans $\text{Im}(\lambda I - A)$, soit x sa limite dans H . Pour chaque n , il existe $y_n \in H$ tel que $x_n = (\lambda I - A)y_n$ et en utilisant (2.7), on a

$$\|x_m - x_n\|^2 = \|(\lambda - A)(y_m - y_n)\|^2 \geq \beta^2\|y_m - y_n\|^2.$$

Il suit que $\{y_n\}_n$ est une suite de Cauchy, elle est donc convergente, soit y sa limite, par continuité de $(\lambda - A)$, il suit $x = (\lambda - A)y \in \text{Im}(\lambda - A)$. D'où le résultat. L'hypothèse $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est donc incompatible avec $\lambda \in \sigma_c(A)$, i.e. $\sigma_c(A) \subset \mathbb{R}$.

- Soit $\lambda, \mu \in \sigma_p(A)$, $\lambda \neq \mu$. On considère $x, y \in H$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ tels que $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$. Alors, en utilisant que $\mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &= \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \\ &= \langle x, Ay \rangle = \langle x, \mu y \rangle = \mu \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

et comme $\lambda \neq \mu$, il suit $\langle x, y \rangle = 0$. □

2.6 Exercices

Exercice 2.1. Démontrer la remarque 2.2 et la proposition 2.1.

Exercice 2.2. Soit H un espace de Hilbert, F un sous-espace vectoriel fermé et non réduit à $\{0\}$ de H , $P = P_F$ la projection orthogonale sur F . Montrer que

1. $P^2 = P$
2. $\forall x, y \in H \quad (Px, y) = (x, Py)$
3. $\|P\| = 1$
4. On caractérisera également $\text{Ker}P$ et $\text{Im}P$ et on montrera que $H = \text{Ker}P \oplus \text{Im}P$.

Exercice 2.3. Soit $P \in \mathcal{L}(H)$, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) P est une projection orthogonale, i.e. l'image de P est un sous-espace vectoriel fermé de H et P est la projection orthogonale sur son image ;
- (ii) $P^2 = P$ et $P^* = P$.

Exercice 2.4. H un espace de Hilbert, F et G deux sous-espaces vectoriels fermés et non réduits à $\{0\}$ de H , P_F et P_G les projections respectives sur F et G .

1. Montrer que si F et G sont orthogonaux, $F + G$ est fermé.
2. Montrer que $P_F + P_G$ est une projection si et seulement si F et G sont orthogonaux.

Exercice 2.5. Soit H un espace de Hilbert, g une forme hermitienne sur H et q la forme quadratique associée. Ecrire $g(x, y)$ en utilisant uniquement la forme quadratique q :

1. lorsque H est un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$;
2. lorsque H est un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$.

Exercice 2.6. On reprend les formules obtenues à l'exercice 2.5.

1. La formule de la question 2 se généralise-t-elle au cas d'une forme sesqui-linéaire quelconque?
2. La formule de la question 1 se généralise-t-elle au cas d'une forme bilinéaire quelconque?

Exercice 2.7. Soit H un espace de Hilbert, soit f une forme hermitienne continue sur H , i.e. il existe une constante $C > 0$ telle que $|f(x, y)| \leq C \|x\| \|y\|$. Montrer qu'il existe un unique $A \in \mathcal{L}(H)$ autoadjoint tel que

$$f(x, y) = (Ax, y) \quad \forall x, y \in H.$$

Exercice 2.8. Soit H un espace de Hilbert, soit $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\dim(\text{Im} T) = 1$.

1. Montrer qu'il existe a et b dans H tels que

$$\forall x \in H \quad Tx = (x, a)b.$$

a et b sont-ils uniques?

2. Calculer T^* .
3. Montrer que l'opérateur $T : x \mapsto (x, a)a$, pour $a \in H$ donné, $a \neq 0$, est auto-adjoint positif.

Exercice 2.9. Soit H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$. Montrer que $\|A\|^2 = \|AA^*\|$.

Exercice 2.10. Soit H un espace de Hilbert et soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur unitaire, i.e. tel que $AA^* = A^*A = I$. Montrer que

$$H = \text{Ker}(I - A) \oplus \overline{\text{Im}(I - A)}.$$

Exercice 2.11. Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ telle que $A = A^*$ et soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A . Le rayon spectral de A est défini par

$$r_\sigma(A) = \sup_{j=1, \dots, n} |\lambda_j|.$$

Montrer que $\|A\| = r_\sigma(A)$.

Exercice 2.12. Soit F un sous-espace vectoriel fermé et non réduit à $\{0\}$ de H , P la projection orthogonale sur F . Calculer le spectre de P .

Exercice 2.13. Soit $H = H^1(]0, 1[)$ et T l'application linéaire définie sur H par

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

1. Montrer que $T \in \mathcal{L}(H)$.
2. Montrer que $0 \in \sigma(T)$ mais que 0 n'est pas valeur propre de T .
3. Montrer que $\sigma(T) = \{0\}$.

Exercice 2.14. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur tel que

$$(Ax, x) \geq 0, \quad \forall x \in H.$$

1. Montrer que $\sigma_p(A) \subset \mathbf{R}^+$.
2. Montrer que A est auto-adjoint.
3. Montrer que $\sigma_r(A) = \emptyset$.
4. Montrer que $\sigma(A) \subset \mathbf{R}^+$.

Exercice 2.15. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur tel que

$$(Ax, x) = 0, \quad \forall x \in H.$$

Montrer que $A = 0$. Trouver un contre-exemple à cette propriété dans le cas où H est un espace de Hilbert réel.

Exercice 2.16. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur tel que

$$(Ax, x) + (x, Ax) = 0, \quad \forall x \in H.$$

Soit $i\mathbb{R} = \{i\lambda; \lambda \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que $\sigma_p(A) \subset i\mathbb{R}$, $\sigma_p(A^*) \subset i\mathbb{R}$.
2. Montrer que $A + A^* = 0$. En déduire que $\sigma_r(A) = \emptyset$.
3. Montrer que $\sigma_c(A) \subset i\mathbb{R}$.

Exercice 2.17. Soit $U \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur unitaire, c'est-à-dire tel que $UU^* = U^*U = I$. Soit $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$.

1. Montrer que $\sigma_p(U) \subset S^1$, $\sigma_p(U^*) \subset S^1$

2. Montrer que $\sigma_r(U) \subset S^1$

3. Montrer que $\sigma_c(U) \subset S^1$ et en déduire que $\sigma(U) \subset S^1$.

Exercice 2.18. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ et soit $P(z)$ un polynôme. Posons

$$P(\sigma(A)) = \{P(\lambda) ; \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Montrer que $\sigma(P(A)) = P(\sigma(A))$.

Exercice 2.19. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ et soit

$$N(A) = \{(Ax, x) ; x \in H, \|x\| = 1\}.$$

Montrer que $\sigma(A) \subset \overline{N(A)}$.

Chapitre 3

Théorie spectrale des opérateurs compacts

Dans tout le chapitre, sauf mention contraire, H est un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$. On suppose de plus que H est de dimension infinie, sinon tout opérateur est compact et la notion n'a plus d'intérêt.

3.1 Opérateurs compacts, définition, propriétés

Définition 3.1. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, on dit que A est compact si pour toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bornée dans H , la suite $\{Ax_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est relativement compacte, i.e. il existe une sous-suite $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ telle que la suite $\{Ax_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans H .

Cela équivaut à dire que l'image par A de la boule unité de H est relativement compacte dans H .

Proposition 3.1 (et exemple fondamental). Tout opérateur borné de rang fini (i.e. dont l'image est de dimension finie) est compact.

Preuve. Soit A un opérateur de rang fini et soit $F = \text{Im} A$. Soit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans H , la suite $\{Ax_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, par continuité de A , est bornée dans F qui est de dimension finie, elle est donc relativement compacte. $\square$

Proposition 3.2. Soit $A, A_1, A_2 \in \mathcal{L}(H)$, des opérateurs compacts. Alors,

1. pour tout $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ est compact,
2. pour tout $B \in \mathcal{L}(H)$, AB et BA sont compacts.

La démonstration est triviale et laissée en exercice.

Proposition 3.3. Soit $K \in \mathcal{L}(H)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) K est compact,

(ii) K transforme toute suite faiblement convergente en une suite convergente en norme.

Preuve.

(i) $\implies$ (ii) Soit $K \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact, soit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans H qui converge faiblement vers $x \in H$. Il est facile de voir d'une part que Kx_n converge faiblement vers Kx , simplement en remarquant que pour $y \in H$

$$\langle Kx_n, y \rangle = \langle x_n, K^*y \rangle \longrightarrow \langle x, K^*y \rangle = \langle Kx, y \rangle.$$

Supposons que Kx_n ne tende pas vers Kx en norme. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $\{x_{n_k}\}_k$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait

$$\|Kx_{n_k} - Kx\| \geq \varepsilon.$$

D'après le théorème de Banach-Steinhaus, le fait que x_n converge faiblement implique que c'est une suite bornée ; on peut donc extraire de x_{n_k} une sous-suite $\{x_{n_{k_p}}\}_p$ telle que $Kx_{n_{k_p}}$ converge dans H vers y qui est nécessairement différent de Kx . Mais comme $x_{n_{k_p}}$ converge faiblement vers x , il suit que $Kx_{n_{k_p}}$ converge faiblement vers Kx et il y a une contradiction.

(ii) $\implies$ (i) Soit K un opérateur borné vérifiant (ii), soit $\{x_n\}_n$ une suite bornée dans H . Dans un espace de Hilbert, tout borné étant faiblement relativement compact, on peut extraire de $\{x_n\}_n$ une sous-suite $\{x_{n_k}\}_k$ faiblement convergente. Alors par (ii), la suite $\{Kx_{n_k}\}_k$ converge fortement. On vient donc de montrer que de toute suite $\{x_n\}_n$, on peut extraire une sous-suite $\{x_{n_k}\}_k$ telle que $\{Kx_{n_k}\}_k$ soit convergente, i.e. que K est compact. $\square$

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate de la proposition précédente.

Corollaire 3.1. Soit $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{L}(H)$ qui converge faiblement vers $A \in \mathcal{L}(H)$. Soit $K \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact, alors KA_n converge vers KA fortement.

Proposition 3.4. Soit $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs compacts sur H et $A \in \mathcal{L}(H)$. On suppose que $K_n \rightarrow A$ en norme dans $\mathcal{L}(H)$, alors A est compact.

Preuve. Soit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans H , soit $M > 0$ tel que $\|x_n\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On utilise un procédé diagonal pour extraire une sous-suite dont l'image par A converge. Soit $\{x_{0,n}\}_n$ une sous-suite de $\{x_n\}_n$ telle que $K_0x_{0,n}$ converge. De $\{x_{0,n}\}_n$ on peut extraire une sous-suite $\{x_{1,n}\}_n$ telle que $K_1x_{1,n}$ converge. Ainsi de suite, on extrait au fur et à mesure des sous-suites $\{x_{p,n}\}_n$ telles que $K_px_{p,n}$ converge lorsque $n \rightarrow +\infty$ et $\{x_{p,n}\}_n$ soit une sous-suite de $\{x_{p-1,n}\}_n$. On pose alors $y_n := x_{n,n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $\{y_n\}_n$ est une sous-suite de $\{x_n\}_n$ telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite $\{K_py_n\}_n$ converge dans H . De plus, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $p_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|A - K_{p_\varepsilon}\| \leq \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Maintenant, il existe $q_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, m \geq q_\varepsilon$,

$$\|K_{p_\varepsilon} y_n - K_{p_\varepsilon} y_m\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il suit que pour tous $n, m \geq q_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} \|Ay_n - Ay_m\| &\leq \|Ay_n - K_{p_\varepsilon} y_n\| + \|K_{p_\varepsilon} y_n - K_{p_\varepsilon} y_m\| + \|K_{p_\varepsilon} y_m - Ay_m\| \\ &\leq \|A - K_{p_\varepsilon}\| \|y_n\| + \frac{\varepsilon}{2} + \|A - K_{p_\varepsilon}\| \|y_m\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4M} M + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4M} M = \varepsilon. \end{aligned}$$

La suite $\{Ay_n\}_n$ est donc de Cauchy et donc convergente. $\square$

On va maintenant établir une caractérisation importante des opérateurs compacts.

Proposition 3.5. *Soit $K \in \mathcal{L}(H)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) K est compact ;
- (ii) il existe une suite $\{K_n\}_n$ dans $\mathcal{L}(H)$ d'opérateurs de rang fini telle que $K_n \rightarrow K$ en norme dans $\mathcal{L}(H)$.

Preuve.

(ii) $\implies$ (i) est une conséquence triviale des propositions 3.1 et 3.4.

(i) $\implies$ (ii) Soit K compact, alors l'image de la boule unité dans H est relativement compacte, i.e. il existe une partie compacte C de H telle que l'image de la boule unité est incluse dans C . Pour $\varepsilon > 0$ donné, on a

$$C \subset \bigcup_{y \in C} B(y, \varepsilon).$$

On a un recouvrement ouvert dont on peut extraire un sous-recouvrement fini

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B(y_i, \varepsilon).$$

Soit F_ε le sous-espace de H engendré par les y_i , $i = 1, \dots, N_\varepsilon$ et soit d_ε sa dimension. On considère $\{e_1, \dots, e_{d_\varepsilon}\}$ une base orthonormale de F_ε . On note P_ε le projecteur orthogonal sur F_ε ,

$$P_\varepsilon x = \sum_{i=1}^{d_\varepsilon} \langle x, e_i \rangle e_i,$$

et on pose

$$K_\varepsilon = P_\varepsilon K.$$

Alors K_ε est de rang fini car son image est incluse dans celle de P_ε qui est de dimension d_ε . De plus, pour $x \in H$, $\|x\| \leq 1$, on a

$$\|K_\varepsilon x - Kx\| = \|P_\varepsilon Kx - Kx\| = \inf_{y \in F_\varepsilon} \|Kx - y\|.$$

Comme on a construit un recouvrement fini de l'image par K de la boule unité par des boules de centre $y_i \in F_\varepsilon$ et de rayon ε , on en déduit que

$$\|K_\varepsilon x - Kx\| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \bar{B}(0, 1).$$

Il suit $\|K_\varepsilon - K\| \leq \varepsilon$. En prenant $\varepsilon = 1/n$, on construit ainsi une suite d'opérateurs de rang fini qui convergent en norme vers K . $\square$

Remarque 3.1. Lorsque H est séparable (c'est le cas de tous les exemples concrets), la démonstration suit une idée de départ analogue mais est beaucoup plus simple. On considère $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une base Hilbertienne de H . Soit F_n le sous-espace de dimension $n+1$ engendré par $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$. On note P_n la projection orthogonale sur F_n , i.e.

$$P_n x = \sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle e_k.$$

On pose

$$K_n := K P_n.$$

Comme P_n converge fortement vers I , il suit que K_n converge fortement vers K . Supposons que K_n ne converge pas en norme vers K . Alors il existe $\varepsilon > 0$, une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans H telle que $\|x_n\| = 1$ et $\|(K - K_n)x_n\| \geq \varepsilon$. Si on pose $y_n = (I - P_n)x_n$, on a $\|y_n\| \leq 1$ et $y_n \in F_n^\perp$. Il suit que la suite $\{y_n\}_n$ tend faiblement vers 0 dans H . L'opérateur K étant compact, la suite $\{Ky_n\}_n$ tend fortement vers 0. C'est absurde car

$$\|Ky_n\| = \|(K - K_n)x_n\| \geq \varepsilon > 0.$$

Donc $K_n \rightarrow K$ en norme. $\square$

Corollaire 3.2. Soit $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{L}(H)$ qui converge fortement vers $A \in \mathcal{L}(H)$. Soit $K \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact, alors $A_n K$ converge vers AK en norme.

Preuve. Comme K est compact, on peut l'approcher en norme par une suite d'opérateurs $\{K_n\}_n$ de rang fini. Par ailleurs, par le théorème de Banach-Steinhaus, comme la suite $\{A_n\}_n$ converge fortement, elle est bornée dans $\mathcal{L}(H)$, i.e. il existe $M > 0$ tel que $\|A_n\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit maintenant $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|K - K_{n_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{4M}.$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|A_n K - AK\| &\leq \|(A_n - A)(K - K_{n_0})\| + \|(A_n - A)K_{n_0}\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4M} 2M + \|(A_n - A)K_{n_0}\|. \end{aligned}$$

Soit p la dimension de l'image de K_{n_0} , on considère $\{e_1, \dots, e_p\}$ une base orthogonale de $\text{Im } K_{n_0}$. Soit $x \in H$, on a

$$\begin{aligned} \|(A_n - A)K_{n_0}x\| &= \|(A_n - A) \sum_{j=1}^p \langle K_{n_0}x, e_j \rangle e_j\| \\ &= \left\| \sum_{j=1}^p \langle K_{n_0}x, e_j \rangle (A_n - A)e_j \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^p |\langle K_{n_0}x, e_j \rangle| \|(A_n - A)e_j\| \\ &\leq \|K_{n_0}\| \|x\| \sum_{j=1}^p \|(A_n - A)e_j\| \end{aligned}$$

et comme $(A - A_n)e_j$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$, il suit que

$$\|K_{n_0}\| \sum_{j=1}^p \|(A_n - A)e_j\| \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty,$$

et donc $(A_n - A)K_{n_0}$ tend vers 0 en norme. D'où il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$ on ait

$$\|(A_n - A)K_{n_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ceci conclut la preuve du corollaire. $\square$

Proposition 3.6. *Attention! Soit $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{L}(H)$ qui converge fortement vers $A \in \mathcal{L}(H)$. Soit $K \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact, KA_n ne converge pas a priori vers KA en norme.*

Preuve. On donne un contre-exemple. On considère dans H une famille orthonormale $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. Soit $K \in \mathcal{L}(H)$ défini par

$$Kx = \langle x, e_1 \rangle e_1.$$

Soit la suite d'éléments de $\mathcal{L}(H)$ $\{A_n\}$ définis par

$$A_n x = \langle x, e_n \rangle e_1.$$

Alors A_n converge faiblement vers 0 mais $\|A_n\| = 1$. D'autre part K est compact car de rang fini et $KA_n = A_n$ donc ne converge pas en norme vers 0. $\square$

Corollaire 3.3. *Soit $K \in \mathcal{L}(H)$ compact, alors K^* est compact. En particulier, les opérateurs*

$$\text{Re } K = \frac{1}{2} (K + K^*) \text{ et } \text{Im } K = \frac{1}{2i} (K - K^*),$$

sont auto-adjoints et compacts et on a $K = \text{Re } K + i \text{Im } K$, $K^ = \text{Re } K - i \text{Im } K$.*

Preuve. On considère une suite K_n d'opérateurs de rang fini qui convergent en norme vers K . Alors K_n^* est de rang fini (cf. exercice 3.1) et de plus $\|K_n^* - K^*\| = \|K_n - K\| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. $\square$

Théorème 3.1 (Théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints compacts, dit aussi théorème de Hilbert-Schmidt). *Soit $K \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact tel que $K = K^*$. Alors il existe une famille orthonormale dénombrable dans H , $\{e_n\}_{0 \leq n < N+1}$, $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, constituée de vecteurs propres de K , tels que $Ke_n = \lambda_n e_n$, où la famille $\{|\lambda_n|\}_{0 \leq n < N+1}$ est décroissante. De plus, si $N = +\infty$, alors $\lambda_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. La famille $\{e_n\}_{0 \leq n < N+1}$ constitue une base orthonormale de $\overline{\text{Im} K} = (\text{Ker} K)^\perp$ et pour tout $x \in H$, on a*

$$Kx = \sum_{n=0}^N \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n. \quad (3.1)$$

Preuve. On commence par montrer que $\|K\|$ ou $-\|K\|$ est valeur propre de K . Il suffit pour cela de montrer que $\|K\|^2$ est valeur propre de K^2 , car si $K^2 x = \|K\|^2 x$, avec $x \neq 0$, on pose $y = (K - \|K\|)x$; alors ou bien $y = 0$, ce qui montre que $\|K\|$ est valeur propre de K , ou bien on a $(K + \|K\|)y = 0$ de sorte que $-\|K\|$ est valeur propre de K .

On considère une suite $\{x_n\}_n$, avec $\|x_n\| = 1$, telle que $\|Kx_n\| \rightarrow \|K\|$. Alors

$$\begin{aligned} \|(K^2 - \|K\|^2)x_n\|^2 &= \|K^2 x_n\|^2 + \|K\|^4 \|x_n\|^2 - 2\text{Re} \langle K^2 x_n, \|K\|^2 x_n \rangle \\ &= \|K^2 x_n\|^2 + \|K\|^4 - 2\|K\|^2 \langle Kx_n, Kx_n \rangle \\ &\leq \|K\|^2 (2\|K\|^2 - 2\|Kx_n\|^2) \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Du fait que K est compact et que $\{x_n\}$ est bornée, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $\{Kx_n\}_n$ est convergente. Alors, par continuité de K , la suite $\{K^2 x_n\}_n$ est convergente et d'après l'inégalité précédente, il suit que la suite $\{x_n\}_n$ est aussi convergente ; soit x sa limite, on a $\|x\| = 1$ (i.e. $x \neq 0$) et $K^2 x = \|K\|^2 x$, d'où le résultat.

Considérons maintenant $e_0 \in H$, $\|e_0\| = 1$, tel que $Ke_0 = \lambda_0 e_0$, avec $|\lambda_0| = \|K\|$ (bien sûr λ_0 est réel comme valeur propre d'un opérateur auto-adjoint). On pose $K_0 = K$. On définit maintenant $H_1 := \{e_0\}^\perp$. Du fait que $Ke_0 = \lambda_0 e_0$ et que K est auto-adjoint, H_1 est stable par K . En effet, considérons $x \in H$, $x \perp e_0$ tel que $\langle Kx, e_0 \rangle \neq 0$, alors

$$\langle Kx, e_0 \rangle = \langle x, Ke_0 \rangle = \lambda_0 \langle x, e_0 \rangle = 0$$

ce qui est absurde. On pose alors $K_1 := K|_{H_1}$. Alors $K_1 \in \mathcal{L}(H_1)$, est compact et auto-adjoint sur H_1 . Puis on répète le processus. A l'étape n , on choisit $e_n \in H_n$, $\|e_n\| = 1$, avec $Ke_n = K_n e_n = \lambda_n e_n$, où $K_n = K|_{H_n}$ avec $|\lambda_n| = \|K_n\|$. On définit alors $H_{n+1} := \{e_0, \dots, e_n\}^\perp$, comme $Ke_i = \lambda_i e_i$ pour $i = 0, \dots, n$ et comme K est auto-adjoint, H_{n+1} est stable par K et on peut donc poser $K_{n+1} := K|_{H_{n+1}}$, qui à son tour est un opérateur borné sur H_{n+1} , compact et auto-adjoint.

Comme les K_n sont des restrictions de K sur des espaces de plus en plus petits, leur norme décroît, i.e. $|\lambda_n|$ est décroissante en n .

Ce processus s'arrête si pour un certain $N \in \mathbb{N}$, on a $K_{N+1} = 0$, i.e. on a $H_{N+1} = \text{Ker}K$. On est alors clairement dans le cadre du théorème avec N fini. Si ce processus ne s'arrête pas, alors on obtient une suite $\{\lambda_n\}$, tous les λ_n étant non nuls, telle que $|\lambda_n| = \|K_n\|$ décroît avec n (on est dans le cadre du théorème avec $N = +\infty$). La suite $\{|\lambda_n|\}_n$ admet donc une limite, on la note δ . Supposons que $\delta > 0$, alors $x_n := (\delta/\lambda_n)e_n$ est de norme inférieure ou égale à 1 et $Kx_n = \delta e_n$ n'a pas de sous-suite de Cauchy, car pour $n \neq m$,

$$\|Kx_n - Kx_m\|^2 = \delta^2 (\|e_n\|^2 + \|e_m\|^2) = 2\delta^2$$

du fait que $e_n \perp e_m$. Ceci contredit la compacité de K . D'où $\lambda_n \rightarrow 0$.

Supposons N fini. Pour $x \in H$, on peut décomposer x de façon unique sous la forme suivante :

$$x = \sum_{n=0}^N \langle x, e_n \rangle e_n + P_{H_{N+1}} x$$

où $P_{H_{N+1}}$ est la projection sur $H_{N+1} = \text{Ker}K$. On a donc

$$Kx = \sum_{n=0}^N \langle x, e_n \rangle K e_n = \sum_{n=0}^N \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Ainsi les $\{e_n\}_{0 \leq n \leq N}$ engendrent $\text{Im}K$ qui est de dimension finie $N + 1$ et donc fermée, d'où

$$\text{Im}K = (\text{Ker}K)^\perp.$$

Supposons maintenant que $N = +\infty$. Soit $x \in H$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, en projetant x sur l'espace engendré par $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ puis sur H_{n+1} ,

$$x = \sum_{p=0}^n \langle x, e_p \rangle e_p + P_{H_{n+1}} x$$

et en utilisant que $K P_{H_{n+1}} = K_{n+1} P_{H_{n+1}}$,

$$Kx = \sum_{p=0}^n \langle x, e_p \rangle K e_p + K_{n+1} x = \sum_{p=0}^n \lambda_p \langle x, e_p \rangle e_p + K_{n+1} P_{H_{n+1}} x.$$

Comme $\|K_n\|$ tend vers zéro, on en déduit que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

converge dans H et que sa limite vaut Kx . On obtient donc (3.1), ce qui implique que $\text{Im}K$ est engendré par les e_n et donc que la famille $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormale de

$$\overline{\text{Im}K} = (\text{Ker}K)^\perp.$$

Ceci clot la preuve du théorème. □

Corollaire 3.4. *Si H est séparable, pour $K \in \mathcal{L}(H)$ autoadjoint compact, il existe une base orthonormale de H constituée de vecteurs propres de K .*

Preuve. On considère la famille $\{e_n\}_{0 \leq n < N+1}$ donnée par le théorème de Hilbert-Schmidt et on y ajoute une base orthonormale de $\text{Ker} K$. $\square$

Remarque 3.2. *Attention, si à la fois $\text{Ker} K$ et $\text{Im} K$ sont de dimension infinie, il n'est pas possible de trouver une base orthonormée $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de H de vecteurs propres de H tels que la suite $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ des valeurs propres associés ($Ka_n = \lambda_n a_n$) soit de module décroissant avec n . On peut le faire sur $\overline{\text{Im} K}$ mais pas sur H .*

Le théorème de Hilbert-Schmidt s'étend en fait, avec quelques modifications, au cas d'un opérateur compact non auto-adjoint, mais pour établir le résultat, on a besoin de la théorie de Fredholm.

3.2 Théorie de Fredholm

Etudier le spectre d'un opérateur compact K signifie étudier les valeurs $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquelles l'opérateur $I - \lambda^{-1}K$ est bijectif (le cas $\lambda = 0$ est particulier, comme on le verra avec le théorème de Riesz-Schauder). Il s'agit donc de savoir si, pour K opérateur compact quelconque, l'équation

$$(I - K)x = y$$

admet une unique solution pour tout $y \in H$. La théorie de Fredholm établit que si on peut assurer l'unicité, alors l'existence suit. C'est le résultat appelé "alternative de Fredholm" :

Théorème 3.2 (Alternative de Fredholm). *Soit $K \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact, alors l'une des deux propriétés suivantes est réalisée :*

- (1) *il existe $x_0 \in H$ tel que $x_0 \neq 0$ et $(I - K)x_0 = 0$, i.e. $1 \in \sigma_p(K)$;*
- (2) *pour tout $y \in H$, il existe un unique $x \in H$ tel que $(I - K)x = y$, i.e. $I - K$ est un isomorphisme de H .*

Remarque 3.3. *Quel est le lien entre l'alternative de Fredholm et la description intuitive que nous en avons faite avant de l'énoncer? Tout d'abord on remarque qu'au lieu d'écrire l'alternative en distinguant les deux cas $1 \in \sigma_p(K)$ et $1 \notin \sigma(K)$, on aurait pu distinguer, pour n'importe quel $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ les cas $\lambda \in \sigma_p(K)$ et $\lambda \notin \sigma(K)$. En effet, pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,*

$$\lambda I - K = \lambda \left(I - \frac{1}{\lambda} K \right).$$

On pose $\tilde{K} = \frac{1}{\lambda} K$, $\tilde{K}$ est compact. Distinguer les cas $1 \in \sigma_p(\tilde{K})$ et $1 \notin \sigma(\tilde{K})$ est équivalent à distinguer $\lambda \in \sigma_p(K)$ et $\lambda \notin \sigma(K)$. On voit alors que dans le premier cas ($1 \in \sigma_p(\tilde{K})$, c'est-à-dire $\lambda \in \sigma_p(K)$), le noyau de $\lambda I - K$ est non réduit à $\{0\}$, donc il existe une

infinité de $x \in H$ (les éléments de $\text{Ker}(\lambda I - K)$) tels que $(\lambda I - K)x = 0$. Maintenant, pour $y \in H$, on considère l'équation

$$(\lambda I - K)x = y. \quad (3.2)$$

On voit que si pour $y \in H$ donné, l'équation $(\lambda I - K)x = y$ admet une solution, alors elle en admet une infinité. Autrement dit, dans le premier cas, on n'a pas unicité. Si on est dans le second cas, alors on a existence et unicité des solutions pour tout $y \in H$ car $\lambda I - K$ est bijective. On voit que si on peut montrer l'unicité, alors on n'est forcément pas dans le premier cas et on est donc dans le second, c'est-à-dire qu'on a existence et unicité. Ainsi, si on peut assurer l'unicité des solutions de (3.2), alors on a nécessairement existence.

Remarque 3.4. Le résultat de l'alternative de Fredholm est assez remarquable dans la mesure où on voit que si 1 (ou $\lambda \neq 0$ quelconque) n'est pas dans $\sigma_p(K)$, alors il n'est pas du tout dans le spectre de K ; les éventuelles valeurs spectrales de K en dehors de 0 dans $\mathbb{C}$ sont nécessairement des valeurs propres. C'est-à-dire

$$\sigma(K) \setminus \{0\} \subset \sigma_p(K).$$

L'alternative de Fredholm est un corollaire du théorème de Fredholm analytique :

Théorème 3.3 (Théorème de Fredholm analytique). Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $z \mapsto K(z)$ une fonction analytique de Ω dans $\mathcal{L}(H)$, telle que pour tout $z \in \Omega$, $K(z)$ soit compact. Alors, l'une des deux propriétés suivantes est réalisée :

- (i) $I - K(z)$ n'est inversible pour aucun $z \in \Omega$;
- (ii) il existe une partie discrète D dans Ω telle que $I - K(z)$ soit inversible pour tout $z \in \Omega \setminus D$, $(I - K(z))^{-1}$ est donc analytique dans $\Omega \setminus D$. De plus, si $z_0 \in D$, $1 \in \sigma_p(K(z_0))$ et il existe $r > 0$, $N \in \mathbb{N}$, $A_j \in \mathcal{L}(H)$, $j \geq -N$, tels que, pour $0 < |z - z_0| < r$, on ait

$$(I - K(z))^{-1} = \sum_{j=-N}^{+\infty} (z - z_0)^j A_j$$

la série convergeant dans $\mathcal{L}(H)$ normalement sur tout compact de $C(z_0, 0, r)$ et

$$A_{-1} = \text{Rés}((I - K(z))^{-1}, z_0)$$

est de rang fini. On voit notamment que $(I - K(z))^{-1}$ est méromorphe dans Ω .

Preuve de l'alternative de Fredholm. On considère la fonction $K(z) = zK$, analytique dans $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathcal{L}(H)$. Pour $z = 0$, $I - zK = I$ et est clairement inversible. On est donc dans le cas (ii) du théorème de Fredholm analytique. Alors ou bien 1 appartient à la partie discrète D et on est dans le cas (1) (car $K(1) = K$), ou bien $1 \in \mathbb{C} \setminus D$ et on est dans le cas (2). $\square$

Preuve du théorème de Fredholm analytique. On commence par démontrer le résultat au voisinage d'un $z_0 \in D$ quelconque. Soit $z_0 \in D$, on choisit $r > 0$ tel que $K(z)$ soit analytique dans $D(z_0, r)$ et

$$\text{pour } |z - z_0| < r, \quad \|K(z) - K(z_0)\| < 1/2;$$

on choisit également $F \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur de rang fini tel que $\|K(z_0) - F\| < 1/2$ (ce qui est possible d'après la proposition 3.5 et du fait que $K(z_0)$ est compact). Alors la fonction $z \mapsto K(z) - F$ est analytique dans $D(z_0, r)$ à valeurs dans $\mathcal{L}(H)$, de plus, pour tout $z \in D(z_0, r)$, on a $\|K(z) - F\| < 1$. Il suit que $(I - K(z) + F)^{-1}$ existe et est analytique dans $D(z_0, r)$ (on admet ici que si f est une fonction holomorphe dans $D(0, R)$, $R > 0$, et si g est une fonction analytique sur Ω ouvert de $\mathbb{C}$ à valeurs dans la boule de centre 0 et de rayon R dans $\mathcal{L}(H)$, alors $f \circ g$ est analytique sur Ω à valeurs dans $\mathcal{L}(H)$).

F est de rang fini, soit N la dimension de son image, soit $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ une base de $\text{Im} F$, alors pour tout $x \in H$, on a

$$Fx = \sum_{j=1}^N \alpha_j(x) \psi_j.$$

Les α_j , $j = 1, \dots, N$, sont des formes linéaires continues sur H , donc d'après le théorème de Riesz, il existe des vecteurs ϕ_j , $j = 1, \dots, N$, uniques, tels que

$$\alpha_j(x) = \langle x, \phi_j \rangle \quad \forall x \in H.$$

On a alors, pour tout $x \in H$,

$$Fx = \sum_{j=1}^N \langle x, \phi_j \rangle \psi_j$$

et donc

$$F(I - K(z) + F)^{-1}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^N \langle (I - K(z) + F)^{-1}x, \phi_j \rangle \psi_j.$$

En posant $g(z) = F(I - K(z) + F)^{-1}$ et $\phi_j(z) = ((I - K(z) + F)^{-1})^* \phi_j$, on obtient

$$g(z)x = \sum_{j=1}^N \langle x, \phi_j(z) \rangle \psi_j.$$

On remarque maintenant que

$$\begin{aligned} (I - g(z))(I - K(z) + F) &= (I - K(z) + F) - F(I - K(z) + F)^{-1}(I - K(z) + F) \\ &= I - K(z). \end{aligned}$$

Il suit que $I - K(z)$ est inversible pour z dans $D(z_0, r)$ si et seulement si $I - g(z)$ est inversible pour z dans $D(z_0, r)$ (simplement du fait que $I - K(z) + F$ est inversible

dans ce disque). De même, pour $z \in D(z_0, r)$, $\text{Ker}(I - K(z)) \neq \{0\}$ si et seulement si $\text{Ker}(I - g(z)) \neq \{0\}$, toujours en utilisant le fait que $I - K(z) + F$ est inversible. Si $g(z)x = x$, alors on a

$$x = \sum_{j=1}^N \langle x, \phi_j(z) \rangle \psi_j \quad (3.3)$$

i.e.

$$x = \sum_{j=1}^N \beta_j \psi_j \quad (3.4)$$

et en utilisant (3.3), les β_j sont solution du système

$$\beta_k - \sum_{j=1}^N \langle \psi_j, \phi_k(z) \rangle \beta_j = 0. \quad (3.5)$$

De plus, x vérifie (3.3) si et seulement si (3.4) et (3.5) sont vérifiés. Conséquemment, (3.3) a une solution non nulle si et seulement si le déterminant de la matrice A du système (3.5), de composantes

$$A_{kj} = \delta_{kj} - \langle \psi_j, \phi_k(z) \rangle, \quad (3.6)$$

est nul. On note $d(z)$ ce déterminant ; du fait que $\langle \psi_j, \phi_k(z) \rangle$ est analytique sur $D(z_0, r)$, $d(z)$ y est holomorphe. Il suit que

$$S_r := \{z \in D(z_0, r) ; d(z) = 0\}$$

est ou bien un ensemble discret dans $D(z_0, r)$, ou bien égal à $D(z_0, r)$ tout entier.

- Si $S_r = D(z_0, r)$, alors (3.3) admet une solution non nulle pour tous $z \in D(z_0, r)$ et $I - g(z)$ (et donc aussi $I - K(z)$) n'est jamais inversible.
- Si S_r est discret, pour $z \notin S_r$, alors la matrice A de coefficients (3.6) est inversible et étant donnés α_j , $j = 1, \dots, N$, le système

$$\beta_k - \sum_{j=1}^N \langle \psi_j, \phi_k(z) \rangle \beta_j = \alpha_k, \quad (3.7)$$

admet une unique solution $\{\beta_j\}_{j=1, \dots, N}$. Soit $y \in H$, on pose $\alpha_j = \langle y, \phi_j(z) \rangle$ et, les β_j étant la solution correspondante de (3.7),

$$x := y + \sum_{j=1}^N \beta_j \psi_j.$$

Alors

$$\begin{aligned} (I - g(z))x &= y + \sum_{j=1}^N \beta_j \psi_j - \sum_{j=1}^N \langle y + \sum_{k=1}^N \beta_k \psi_k, \phi_j(z) \rangle \psi_j \\ &= y + \sum_{j=1}^N \left(\beta_j - \sum_{k=1}^N \beta_k \langle \psi_k, \phi_j(z) \rangle - \langle y, \phi_j(z) \rangle \right) \psi_j = y. \end{aligned}$$

Donc $I - g(z)$ est inversible. Et on a bien sûr que si $I - g(z)$ est inversible, alors $z \notin S_r$. L'analyticité et le résidu de rang fini sont obtenus par une expression explicite à l'aide de (3.7) de $(I - g(z))^{-1}$ en termes de cofacteurs.

La globalisation de l'argument pour un petit disque à Ω tout entier est basée sur un argument classique de connexité. Nous omettons les détails. $\square$

3.3 Spectre des opérateurs compacts

Théorème 3.4 (Théorème de Riesz-Schauder). *Soit $K \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact, alors :*

1. $0 \in \sigma(H)$ (en dimension finie, bien sûr, ce n'est plus vrai, sinon tout opérateur en dimension finie aurait 0 dans son spectre),
2. $\sigma(K) \setminus \{0\}$ est un ensemble discret dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, si son cardinal est infini, alors $\sigma(K) \setminus \{0\}$ est l'ensemble des éléments d'une suite dans $\mathbb{C}$ tendant vers 0, i.e. on peut écrire $\sigma(K) \setminus \{0\}$ sous la forme suivante

$$\sigma(K) \setminus \{0\} = \{z_n; n \in \mathbb{N}\}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0,$$

3. soit $\lambda \in \sigma(K)$, $\lambda \neq 0$, alors λ est une valeur propre et $\dim \text{Ker}(\lambda I - K) < +\infty$, on voit en particulier que

$$\sigma(K) = \{0\} \cup \sigma_p(K).$$

Remarque 3.5. *Attention! 0 peut être valeur propre de K mais pas nécessairement.*

Preuve.

1. On suppose que $0 \notin \sigma(K)$, alors K est inversible dans $\mathcal{L}(H)$. On considère $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite orthonormale dans H , bien sûr $\{K^{-1}e_n\}_n$ est une suite bornée dans H car

$$\|K^{-1}e_n\| \leq \|K^{-1}\| \|e_n\| = \|K^{-1}\|.$$

D'autre part, la suite $\{e_n = KK^{-1}e_n\}_n$ n'admet pas de sous-suite de Cauchy car pour $n \neq m$

$$\|e_n - e_m\|^2 = 2,$$

ce qui contredit la compacité de K .

2. On considère $K(z) = zK$, c'est une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathcal{L}(H)$ et $K(z)$ est compact pour tout z , de plus $I - K(0) = I$ est inversible. Le théorème de Fredholm analytique dit que

$$\begin{aligned} D &:= \{z \in \mathbb{C}; I - K(z) \text{ non inversible}\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}; \text{Ker}(I - K(z)) \neq \{0\}\} \end{aligned}$$

est un ensemble discret dans $\mathbb{C}$. Donc $(I - K(z))^{-1}$ existe si et seulement si $z \in \mathbb{C} \setminus D$, et si de plus $z \neq 0$,

$$(I - K(z))^{-1} = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{z} I - K \right)^{-1}.$$

Donc, si $z \neq 0$ alors $1/z \in \mathbb{C} \setminus D$ équivaut à dire que $(z - K)^{-1}$ existe. On en déduit donc que

$$\sigma(K) = \{0\} \cup \left\{ \lambda \in \mathbb{C}^*; \frac{1}{\lambda} \in D \right\}.$$

De plus 0 est le seul point d'accumulation possible de $\sigma(K)$ car D étant discret dans $\mathbb{C}$, il n'a aucun point d'accumulation dans $\mathbb{C}$, les seules limites possibles de suites de points de D (deux à deux distincts) sont à l'infini. Et si $\sigma(K) \setminus \{0\}$ est de cardinal infini, comme il est borné du fait que $\sigma(K)$ est borné, il admet forcément une valeur d'adhérence et d'après ce qui précède, c'est 0.

3. Si $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$, alors $1/\lambda \in D$, i.e. $\text{Ker}(\lambda I - K) \neq \{0\}$. Donc $\lambda \in \sigma_p(K)$. Supposons que $\text{Ker}(\lambda I - K)$ soit de dimension infinie, alors on peut trouver $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite orthonormale dans $\text{Ker}(\lambda I - K)$, i.e. on a $Ke_n = \lambda e_n$, mais $\{e_n\}_n$ est bornée (car $\|e_n\| = 1$) et $\lambda \neq 0$, donc $\{Ke_n\}_n$ n'admet pas de sous-suite de Cauchy, ce qui contredit la compacité de K . $\square$

Théorème 3.5 (Forme canonique des opérateurs compacts). *On considère $K \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact. Alors il existe deux familles orthonormales dénombrables*

$$\{x_n\}_{0 \leq n < N+1}, \{y_n\}_{0 \leq n < N+1}, N \leq +\infty,$$

et une famille de nombres positifs décroissants $\{\lambda_n\}_{0 \leq n < N+1}$, avec $\lambda_n \rightarrow 0$ lorsque n tend vers $+\infty$ dans le cas où $N = +\infty$, telles que, pour tout $x \in H$

$$Kx = \sum_{n=0}^N \lambda_n \langle x, x_n \rangle y_n,$$

la somme convergeant dans H .

Preuve. Comme K est compact, K^*K est compact et auto-adjoint et de plus positif. On suppose de plus $K \neq 0$, sans quoi le théorème est trivial. Alors on a aussi $K^*K \neq 0$, car, étant donné $x \in H$ tel que $Kx \neq 0$, on a $\langle K^*Kx, x \rangle = \|Kx\|^2 \neq 0$. Soit $\{x_n\}_{0 \leq n < N+1}$ la famille orthonormale associée à l'opérateur K^*K , donnée par le théorème de Hilbert-Schmidt, et $\{\mu_n\}_{0 \leq n < N+1}$ la famille décroissante de valeurs propres de K^*K associée (a priori, c'est seulement la famille $\{|\mu_n|\}$ qui est décroissante, mais comme K^*K est positif, on a $\mu_n > 0$). On pose alors $\lambda_n = \sqrt{\mu_n}$ et $y_n = \frac{1}{\lambda_n} Kx_n$. La famille $\{y_n\}_{0 \leq n < N+1}$ est bien orthonormale, en effet

$$\langle y_n, y_m \rangle = \frac{1}{\lambda_n \lambda_m} \langle Kx_n, Kx_m \rangle = \frac{1}{\lambda_n \lambda_m} \langle x_n, K^*Kx_m \rangle = \frac{\lambda_m}{\lambda_n} \langle x_n, x_m \rangle = \frac{\lambda_m}{\lambda_n} \delta_{nm} = \delta_{nm}.$$

Maintenant, pour $x \in H$, en utilisant le fait que $\{x_n\}_{0 \leq n < N+1}$ est une base hilbertienne de $\overline{\text{Im}(K^*K)}$, on peut écrire

$$x = \sum_{n=0}^N \langle x, x_n \rangle x_n + P_{\text{Ker}(K^*K)} x.$$

On a alors

$$\|KP_{\text{Ker}(K^*K)}x\|^2 = \langle K^*KP_{\text{Ker}(K^*K)}x, P_{\text{Ker}(K^*K)}x \rangle = 0.$$

De plus si $N = +\infty$, la série

$$\sum_{n=0}^N \langle x, x_n \rangle Kx_n = \sum_{n=0}^N \lambda_n \langle x, x_n \rangle y_n$$

converge dans H du fait que K est continu sur H et que la série

$$\sum \langle x, x_n \rangle x_n$$

converge dans H (car $\{x_n\}_n$ est une suite orthonormale). On a donc

$$Kx = \sum_{n=0}^N \lambda_n \langle x, x_n \rangle y_n. \quad \square$$

3.4 Calcul fonctionnel pour les auto-adjoints compacts

Grâce au théorème de Hilbert-Schmidt, on peut construire un calcul fonctionnel pour les opérateurs auto-adjoints compacts. Soit $K \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint et compact et soit $\{e_n\}_n$ et $\{\lambda_n\}_n$ les familles données par le théorème de Hilbert-Schmidt. Soit f définie en tout point de $\sigma(K) \setminus \{0\}$ et bornée sur $\sigma(K) \setminus \{0\}$, on définit l'opérateur $f(K)$ comme

$$f(K)x := \sum_{n=0}^N f(\lambda_n) \langle x, e_n \rangle e_n.$$

On voit alors que si x est vecteur propre associé à la valeur propre λ_p , alors

$$f(K)x = f(\lambda_p)x.$$

On va voir bientôt que la compacité n'est pas nécessaire.

3.5 Exercices

Exercice 3.1. Construire un opérateur sur H , de rang fini, non borné et non compact.

Exercice 3.2. Vérifier l'équivalence de la définition 3.1.

Exercice 3.3. Démontrer la proposition 3.2.

Exercice 3.4. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ de rang fini, montrer qu'alors A^* est de rang fini et que $\dim(\operatorname{Im}(A^*)) \leq \dim(\operatorname{Im} A)$.

Exercice 3.5. Soit $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$; on considère l'espace $H = L^2(]\alpha, \beta[)$. Soit $a \in L^2(]\alpha, \beta[\times]\alpha, \beta[)$ et l'opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ défini par

$$(Af)(x) = \int_{\alpha}^{\beta} a(x, y)f(y)dy.$$

1. En utilisant la densité de $\mathcal{C}^0([\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta])$ dans $L^2(]\alpha, \beta[\times]\alpha, \beta[)$, puis le théorème de Stone-Weierstrass, montrer que les polynômes sont denses dans $L^2(]\alpha, \beta[\times]\alpha, \beta[)$.
2. En déduire qu'il existe une suite d'opérateurs $P_n \in \mathcal{L}(H)$ de rang fini qui convergent vers A dans $\mathcal{L}(H)$.
3. Montrer que A est un opérateur compact.

Exercice 3.6. On se place dans le cas où H est séparable. Soit $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une base Hilbertienne de H . Soit $A \in \mathcal{L}(H)$.

1. On suppose que

$$\sup_{\psi \in [\phi_1, \dots, \phi_n]^\perp, \|\psi\|=1} \|A\psi\| \longrightarrow 0, \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty. \quad (3.8)$$

Montrer qu'alors A est compact.

2. Montrer que si A est compact, alors (3.8) est vérifiée.

Exercice 3.7. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact. On se propose de montrer que $\operatorname{Im}(I - A)$ est fermée. Soit $\{f_n\}$ une suite dans H ; on suppose que $(I - A)f_n$ converge dans H vers g .

1. Montrer que si $\|Af_n\| \leq C \forall n \in \mathbb{N}$, on a $g \in \operatorname{Im}(I - A)$. Le même résultat est vrai si $\{f_n\}$ admet une sous-suite $\{f_{n_k}\}$ bornée dans H .
2. Supposons que $\|f_n\| \rightarrow +\infty$. Posons

$$d_n = \inf \{ \|f_n - h\| ; h \in H, h = A(h) \}.$$

Montrer que si la suite $\{d_n\}$ est bornée, on a $g \in \operatorname{Im}(I - A)$.

3. Montrer que la suite $\{d_n\}$ est toujours bornée.

Exercice 3.8. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur tel que $\dim(\operatorname{Im} A) < +\infty$.

1. Montrer que $\dim(\operatorname{Ker}(I + A)) = p < +\infty$.
2. Montrer que $\dim(\operatorname{Ker}(I + A^*)) = q < +\infty$.
3. Montrer que $p = q$.

Exercice 3.9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ on considère $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$ là où cette matrice est définie.

1. Montrer que la fonction $\lambda \mapsto R_\lambda(A)$ est définie dans $\mathbb{C}$ privé d'un nombre fini de points et qu'elle admet en chacun de ces points un pôle d'ordre fini.
2. On suppose maintenant A hermitienne. Soit λ une valeur propre de A et soit $x \in \mathbb{C}^n$. On considère l'équation

$$\lambda y - Ay = x.$$

Montrer que si $x \in (\operatorname{Ker}(\lambda I - A))^\perp$, elle admet une quantité infinie de solutions que l'on caractérisera et qu'elle n'en admet aucune dans le cas contraire.

3. Enoncer un résultat analogue dans le cas où A n'est pas hermitienne.

Exercice 3.10. On considère une fonction

$$A : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

holomorphe, non constante. Montrer que pour $\lambda \in \mathbb{C}$ donné,

$$z \mapsto (\lambda I - A(z))^{-1}$$

est définie dans $\mathbb{C}$ privé d'une partie discrète sans point d'accumulation et qu'elle admet en chacun des points de cette partie un pôle d'ordre fini.

Exercice 3.11. Soit $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormale et $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels tendant vers 0. Démontrer que la relation

$$\forall x \in H, \quad Ax = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n (x, \phi_n) \phi_n$$

définit sur H un opérateur auto-adjoint compact.

Exercice 3.12. Soit $H = L^2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel

$$\langle f, g \rangle_H = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

On considère l'application A de H dans lui-même, définie par

$$(Af)(x) = \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-t^2} dt \right) \frac{1}{1+x^2}.$$

1. *Montrer que $A \in \mathcal{L}(H)$.*
2. *Déterminer A^* .*
3. *A est-il compact?*
4. *Déterminer $\text{Ker } A$ et $\text{Im } A$.*
5. *Trouver un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle de A et déterminer cette valeur propre.*

Chapitre 4

Théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints bornés

4.1 Calcul fonctionnel continu

On considère $A \in \mathcal{L}(H)$, auto-adjoint, et on souhaite définir $f(A)$ pour une fonction f définie et continue sur $\sigma(A)$. Toute l'idée est de définir naturellement $P(A)$ pour $P \in \mathbb{C}[z]$ (i.e. un polynôme en z à coefficients complexes). Puis, en utilisant le théorème de Stone Weierstrass, de définir $f(A)$ pour toutes les fonctions f continues sur $\sigma(A)$.

Lemme 4.1. *Soit*

$$P(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k, \quad c_n \neq 0,$$

Pour $A \in \mathcal{L}(H)$, on définit l'opérateur $P(A) \in \mathcal{L}(H)$ de façon naturelle par

$$P(A) = \sum_{k=0}^n c_k A^k.$$

On a $\sigma(P(A)) = P(\sigma(A))$, i.e.

$$\lambda \in \sigma(P(A)) \Leftrightarrow \exists \mu \in \sigma(A); \lambda = P(\mu).$$

Preuve. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On considère $z_1, \dots, z_n$ les racines de $\lambda - P(z)$ dans $\mathbb{C}$, non nécessairement toutes distinctes. Le polynôme $P(z) - \lambda$ s'écrit sous la forme

$$P(z) - \lambda = c_n \prod_{k=1}^n (z - z_k)$$

et donc

$$P(A) - \lambda = c_n (A - z_1) \dots (A - z_n).$$

On voit donc que $\lambda \in \rho(P(A))$ si et seulement si tous les opérateurs $A - z_k$, $k = 1, \dots, n$, sont inversibles. Dire que l'un de ces opérateurs (disons $A - z_p$) n'est pas inversible, revient à dire que $z_p \in \sigma(A)$. On voit donc que $\lambda \in \sigma(P(A))$ si et seulement si l'une des racines de $P(z) - \lambda$ est dans $\sigma(A)$, ce qui équivaut à dire qu'il existe $\mu \in \sigma(A)$ tel que $P(\mu) = \lambda$. $\square$

Lemme 4.2. *Soit $P \in \mathbb{C}[z]$, $A \in \mathcal{L}(H)$ autoadjoint, alors*

$$\|P(A)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |P(\lambda)|.$$

Preuve. On rappelle que pour tout $B \in \mathcal{L}(H)$, on a $\|B\|^2 = \|B^*B\|$. On a donc

$$\|P(A)\|^2 = \|P(A)^*P(A)\|.$$

Comme A est autoadjoint, on a $P(A)^* = \bar{P}(A)$ et donc $P(A)^*P(A) = \bar{P}P(A)$. Comme de plus $P(A)^*P(A) = \bar{P}P(A)$ est autoadjoint,

$$\begin{aligned} \|\bar{P}P(A)\| &= r(\bar{P}P(A)) = \sup_{\mu \in \sigma(\bar{P}P(A))} |\mu| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\bar{P}P(\lambda)| \\ &= \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\bar{P}(\lambda)P(\lambda)| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |P(\lambda)|^2 \end{aligned}$$

d'après le premier lemme et par le fait que $A = A^*$ et donc $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. □

Théorème 4.1 (Calcul fonctionnel continu). *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint, alors il existe une unique application $\Phi : \mathcal{C}(\sigma(A)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ telle que :*

1.
 - $\Phi(f + g) = \Phi(f) + \Phi(g)$,
 - $\Phi(fg) = \Phi(f) \circ \Phi(g)$,
 - $\Phi(1) = I_H$,
 - $\Phi(\bar{f}) = (\Phi(f))^*$;

2. Φ est continue et

$$\|\Phi(f)\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |f(\lambda)| = \|f\|_{\mathcal{C}(\sigma(A))};$$

3. si f est l'identité, i.e. $f(\lambda) = \lambda$ pour tout $\lambda \in \sigma(A)$, alors $\Phi(f) = A$;
4. si $Ax = \lambda x$, alors, $\Phi(f)x = f(\lambda)x$;
5. $\sigma(\Phi(f)) = f(\sigma(A))$, i.e. $\lambda \in \sigma(\Phi(f))$ si et seulement si il existe $\mu \in \sigma(A)$ tel que $\lambda = f(\mu)$;
6. si $f \geq 0$, alors l'opérateur $\Phi(f)$ est positif.

On notera $\Phi(f) =: f(A)$.

Preuve. Commençons par montrer l'unicité : 1. et 3. entraînent que pour $f = P$ polynôme, $\Phi(P)$ coïncide avec $P(A)$. Soit maintenant $f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$, le théorème de Stone-Weierstrass dit qu'il existe une suite $\{P_n\}$ de polynômes telle que $P_n \rightarrow f$ dans $\mathcal{C}(\sigma(A))$,

i.e. uniformément sur $\sigma(A)$. Supposons maintenant qu'on ait deux fonctions Φ_1 et Φ_2 qui vérifient les hypothèses du théorème. Par la remarque ci-dessus, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Phi_1(P_n) = \Phi_2(P_n) = P(A).$$

De plus, on a

$$\|\Phi_1(f) - \Phi_2(f)\| \leq \|\Phi_1(f) - \Phi_1(P_n)\| + \|\Phi_2(P_n) - \Phi_2(f)\| = 2\|f - P_n\|_{\mathcal{C}(\sigma(A))} \rightarrow 0.$$

Donc $\Phi_1 = \Phi_2$.

Montrons maintenant l'existence. Pour P polynôme, $\Phi(P)$ est donnée par $P(A)$. Soit $f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$, on considère $\{P_n\}$ une suite de polynômes qui converge uniformément vers f sur $\sigma(A)$. On définit

$$\Phi(f) := \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(A).$$

Il faut tout d'abord montrer que c'est bien une définition, i.e. que la limite est indépendante du choix de la suite $\{P_n\}$. On prend pour cela une autre suite $\{Q_n\}$ de polynômes qui converge uniformément vers f sur $\sigma(A)$. Alors

$$\|P_n(A) - Q_n(A)\| = \|P_n - Q_n\|_{\mathcal{C}(\sigma(A))} \rightarrow 0.$$

De plus la limite existe bien dans $\mathcal{L}(H)$, car

$$\|P_n(A) - P_m(A)\| = \|P_n - P_m\|_{\mathcal{C}(\sigma(A))}.$$

Comme $\{P_n\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}(\sigma(A))$, il suit que $\{P_n(A)\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(H)$.

Alors 1., 2. et 3. sont vérifiés par construction, 4. est clairement vrai pour tout polynôme et s'étend donc naturellement par densité. Montrons maintenant 6. : soit $f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$, $f \geq 0$, alors on peut écrire f sous la forme $f = g^2$, où g est à valeurs réelles et continue sur $\sigma(A)$. Comme g est à valeurs réelles, 1. entraîne que $\Phi(g)$ est auto-adjoint. Toujours d'après 1., on a $\Phi(f) = \Phi(g^2) = \Phi(g)^2$. D'où, pour tout $x \in H$

$$\langle \Phi(f)x, x \rangle = \langle \Phi(g)^2 x, x \rangle = \langle \Phi(g)x, \Phi(g)x \rangle = \|\Phi(g)x\|^2 \geq 0.$$

Reste à démontrer la propriété 5., dite d'image spectrale. On note

$$F = \{f(\lambda); \lambda \in \sigma(A)\}.$$

On considère $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus F$ et la fonction $g \in \mathcal{C}(\sigma(A))$ définie par

$$g(\lambda) := \frac{1}{f(\lambda) - \lambda_0}.$$

On a $(f(\lambda) - \lambda_0)g(\lambda) = g(\lambda)(f(\lambda) - \lambda_0) \equiv 1$ et donc

$$(f(A) - \lambda_0 I)g(A) = g(A)(f(A) - \lambda_0 I) = I$$

ce qui montre que $\lambda_0 I - f(A)$ est inversible et que $\lambda_0 \notin \sigma(f(A))$. On a donc $\sigma(f(A)) \subset F$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $\lambda_0 \in F$, il existe $\mu \in \sigma(A)$ tel que $\lambda_0 = f(\mu)$. Deux cas se présentent :

- $\text{Ker}(A - \mu I) \neq \{0\}$. Alors il existe $x \neq 0$ tel que $Ax = \mu x$. On a alors $f(A)x = f(\mu)x$ et donc $\lambda_0 \in \sigma_p(f(A))$.
- $\mu \in \sigma_c(A)$ (on rappelle que le spectre résiduel d'un opérateur auto-adjoint est vide). Alors l'image de $A - \mu I$ est dense dans H mais distincte de H . L'opérateur $(A - \mu I)^{-1}$ est défini sur $\text{Im}(A - \mu I)$ mais n'est pas borné, sinon, il s'étendrait en un opérateur continu sur H qui serait un inverse de $A - \mu I$, ce qui contredirait $\mu \in \sigma(A)$. Donc, il existe une suite $\{x_n\}$ dans $\text{Im}(A - \mu I)$, $\|x_n\| = 1$, telle que $\|(A - \mu I)^{-1}x_n\| \rightarrow +\infty$. Donc si on pose

$$y_n = \frac{(A - \mu I)^{-1}x_n}{\|(A - \mu I)^{-1}x_n\|},$$

ce qui a bien un sens pour n assez grand, car $\|(A - \mu I)^{-1}x_n\| \rightarrow +\infty$ et donc $(A - \mu I)^{-1}x_n \neq 0$ pour n assez grand, on voit que $\|y_n\| = 1$ et de plus

$$\|(A - \mu I)y_n\| = \frac{\|x_n\|}{\|(A - \mu I)^{-1}x_n\|} = \frac{1}{\|(A - \mu I)^{-1}x_n\|} \rightarrow 0, \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Et pour $p \in \mathbb{N}$ quelconque, on a

$$\begin{aligned} \|(A^p - \mu^p)y_n\| &= \|(A^{p-1} + A^{p-2}\mu + \dots + A\mu^{p-2} + \mu^{p-1})(A - \mu)y_n\| \\ &\leq \|A^{p-1} + A^{p-2}\mu + \dots + A\mu^{p-2} + \mu^{p-1}\| \|(A - \mu)y_n\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

On en déduit donc que pour tout polynôme P , on a

$$\|(P(A) - P(\mu))y_n\| \rightarrow 0, \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que $\|f(A) - P(A)\| = \|f - P\|_{\mathcal{C}(\sigma(A))} < \varepsilon/3$ et il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $\|(P(A) - P(\mu))y_n\| < \varepsilon/3$. On a alors pour $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \|(f(A) - f(\mu))y_n\| &\leq \|(f(A) - P(A))y_n\| + \|(P(A) - P(\mu))y_n\| \\ &\quad + \|(P(\mu) - f(\mu))y_n\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

On a donc construit une suite $\{y_n\}$, dont chaque terme est de norme 1 et dont l'image par $f(A) - f(\mu) = f(A) - \lambda_0$ tend vers 0. Si λ_0 n'appartenait pas à $\sigma(A)$, on aurait

$$1 = \|y_n\| = \|(A - \mu I)^{-1}(A - \mu I)y_n\| \leq \|(A - \mu I)^{-1}\| \|(A - \mu I)y_n\| \rightarrow 0,$$

ce qui est absurde. Donc $\lambda_0 \in \sigma(A)$. □

4.2 Décomposition spectrale

On peut étendre le calcul fonctionnel aux fonctions Boréliennes bornées sur $\sigma(A)$. L'intérêt est notamment de définir des opérateurs $\chi(A)$, où χ est l'indicatrice d'une partie du spectre de A ; ces opérateurs sont appelés projecteurs spectraux et permettent une décomposition spectrale de l'opérateur A qui généralise celle des opérateurs auto-adjoints compacts.

Théorème 4.2 (Calcul fonctionnel Borélien). *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint. On note $\mathcal{B}(\sigma(A))$ l'ensemble des fonctions Boréliennes bornées sur $\sigma(A)$. Il existe une unique application $\Phi : \mathcal{B}(\sigma(A)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ (une nouvelle fois on notera usuellement $f(A)$ l'image de f par Φ) telle que :*

1.
 - $\Phi(f + g) = \Phi(f) + \Phi(g)$,
 - $\Phi(fg) = \Phi(f) \circ \Phi(g)$,
 - $\Phi(1) = I_H$,
 - $\Phi(\bar{f}) = (\Phi(f))^*$;
2. $\Phi(I_{\mathbb{R}}) = A$;
3. si $Ax = \lambda x$, alors $\Phi(f)x = f(\lambda)x$;
4. si $f \geq 0$ alors $\Phi(f)$ est un opérateur positif ;
5. $\|\Phi(f)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \sup \{|f(\lambda)| ; \lambda \in \sigma(A)\}$;
6. si $f \in \mathcal{B}(\sigma(A))$ et $\{f_n\}$ est une suite de fonctions boréliennes bornées sur $\sigma(A)$ telles que $f_n \rightarrow f$ simplement et $\sup_n \sup \{|f_n(\lambda)| ; \lambda \in \sigma(A)\} < +\infty$, alors, pour tout $x \in H$, on a $\Phi(f_n)x \rightarrow \Phi(f)x$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ (i.e. $\Phi(f_n)$ converge fortement vers $\Phi(f)$) ;
7. si $B \in \mathcal{L}(H)$ commute avec A , alors B commute avec $\Phi(f)$ pour tout $f \in \mathcal{B}(\sigma(A))$.

Preuve. Pour f une fonction Borélienne bornée sur $\sigma(A)$, on notera

$$\|f\|_{\sup} = \sup \{|f(\lambda)| ; \lambda \in \sigma(A)\} .$$

On commence par montrer l'unicité. On remarque que 1. et 2. déterminent Φ pour les polynômes. Le théorème de Stone-Weierstrass permet alors d'étendre de façon unique la fonction Φ à $\mathcal{C}(\sigma(A))$. Ensuite, on utilise la densité de $\mathcal{C}(\sigma(A))$ dans $\mathcal{B}(\sigma(A))$, plus précisément, pour $f \in \mathcal{B}(\sigma(A))$, il existe une suite $\{f_n\}_n \subset \mathcal{C}(\sigma(A))$ telle que $\|f_n\|_{\sup} \leq \|f\|_{\sup}$ et $f_n \rightarrow f$ simplement sur $\sigma(A)$. On voit donc que 1., 2. et 6. déterminent Φ de façon unique.

Reste à montrer l'existence. Par le théorème du calcul fonctionnel continu, Φ est déjà définie sur $\mathcal{C}(\sigma(A))$, on la prolonge à $\mathcal{B}(\sigma(A))$. Pour $x \in H$ donné, on considère l'application

$$f \in \mathcal{C}(\sigma(A)) \longmapsto \langle f(A)x, x \rangle .$$

C'est une forme linéaire continue positive sur $\mathcal{C}(\sigma(A))$, donc par le théorème de Riesz-Markov, il existe une unique mesure Borélienne régulière sur $\sigma(A)$, notée μ_x , telle que, pour tout $f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$, on ait

$$\langle f(A)x, x \rangle = \int_{\sigma(A)} f(\lambda) d\mu_x .$$

On peut alors utiliser l'identité de polarisation pour exprimer $\langle f(A)x, y \rangle$, on obtient

$$\langle f(A)x, y \rangle = \int_{\sigma(A)} f(\lambda) \underbrace{\frac{1}{4} (\mathrm{d}\mu_{x+y} - \mathrm{d}\mu_{x-y} - i\mathrm{d}\mu_{x+iy} + i\mathrm{d}\mu_{x-iy})}_{:=\mathrm{d}\mu_{x,y}}.$$

Soit maintenant $f \in \mathcal{B}(\sigma(A))$, il existe une suite $\{f_n\}_n \subset \mathcal{C}(\sigma(A))$ telle que $\|f_n\|_{\sup} \leq \|f\|_{\sup}$ et $f_n \rightarrow f$ simplement sur $\sigma(A)$. Le théorème de convergence dominée assure alors que

$$\langle f_n(A)x, y \rangle = \int_{\sigma(A)} f_n(\lambda) \mathrm{d}\mu_{x,y} \rightarrow \int_{\sigma(A)} f(\lambda) \mathrm{d}\mu_{x,y}.$$

L'application

$$y \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle f_n(A)x, y \rangle \quad (4.1)$$

est anti-linéaire sur H et de plus

$$|\langle f_n(A)x, y \rangle| \leq \|f_n(A)x\| \|y\| \leq \|f_n\|_{\sup} \|x\| \|y\| \leq \|f\|_{\sup} \|x\| \|y\|,$$

l'application (4.1) est donc continue sur H . Par le théorème de Riesz, il existe donc un unique élément de H , que l'on notera $f(A)x$, tel que

$$\langle f(A)x, y \rangle = \int_{\sigma(A)} f(\lambda) \mathrm{d}\mu_{x,y} \quad \forall y \in H.$$

On voit donc que

$$f_n(A)x \rightarrow f(A)x \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty. \quad (4.2)$$

Par ailleurs, on a également

$$\|f_n(A)x\|^2 = \langle f_n(A)x, f_n(A)x \rangle = \langle (f_n(A))^* f_n(A)x, x \rangle = \langle |f|^2(A)x, x \rangle = \int_{\sigma(A)} |f_n(\lambda)|^2 \mathrm{d}\mu_x$$

et cette quantité, par le théorème de convergence dominée, converge vers

$$\int_{\sigma(A)} |f(\lambda)|^2 \mathrm{d}\mu_x = \langle |f|^2(A)x, x \rangle.$$

On a également

$$\begin{aligned} \langle f_n(A)x, y \rangle &\rightarrow \langle f(A)x, y \rangle = \langle x, (f(A))^* y \rangle, \\ \langle f_n(A)x, y \rangle &= \langle x, (f_n(A))^* y \rangle = \langle x, \bar{f}_n(A)y \rangle \rightarrow \langle x, \bar{f}(A)y \rangle. \end{aligned}$$

Donc $(f(A))^* = \bar{f}(A)$. On en déduit que

$$\|f(A)x\|^2 = \langle (f(A))^* f(A)x, x \rangle = \langle |f|^2(A)x, x \rangle$$

et donc

$$\|f_n(A)x\| \rightarrow \|f(A)x\|.$$

Ceci et (4.2) entraînent que $f_n(A)x \rightarrow f(A)x$ et de plus

$$\|f(A)x\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n(A)x\| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n(A)\| \|x\| \leq \sup_n \|f_n\|_{\text{sup}} \|x\| \leq \|f\|_{\text{sup}} \|x\|.$$

On a donc construit une fonction Φ vérifiant 5. et 6. et les autres propriétés sont vérifiées pour les fonctions continues et s'étendent par densité (pour 7., elle est clairement vérifiée pour les polynômes et s'étend par densité). $\square$

Remarque 4.1. On peut en fait travailler avec des fonctions sur $\mathbb{R}$ au lieu de $\sigma(A)$ de la façon suivante :

- Φ s'étend naturellement en une fonction $\tilde{\Phi}$ définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ en posant

$$\tilde{\Phi}(f) = \Phi\left(f|_{\sigma(A)}\right)$$

car pour $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, la restriction de f à $\sigma(A)$ appartient naturellement à $\mathcal{B}(\sigma(A))$;

- μ_x s'étend en une mesure Borélienne positive sur $\mathbb{R}$ en posant $\tilde{\mu}_x(\Omega) = \mu_x(\Omega \cap \sigma(A))$;
- $\tilde{\mu}_x$ est une mesure Borélienne bornée supportée dans $\sigma(A)$ (et donc dans l'intervalle $[-\|A\|, \|A\|]$) ;
-

$$\int_{\mathbb{R}} d\tilde{\mu}_x = \int_{\sigma(A)} 1 d\mu_x = \langle x, x \rangle = \|x\|^2.$$

A l'aide du calcul fonctionnel Borélien, on commence par définir la notion de projecteurs spectraux. On rappelle la propriété suivante utile pour la suite.

Propriété. Un opérateur $P \in \mathcal{L}(H)$ est un projecteur orthogonal (et c'est alors le projecteur orthogonal sur son image qui est un sous-espace vectoriel fermé de H), si et seulement si $P^2 = P$ et $P^* = P$.

Preuve. Voir exercice 2.3.

Définition 4.1. On note $\mathcal{T}$ la tribu des Boréliens de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions Boréliennes bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes. Pour $\Omega \in \mathcal{T}$, on notera $\mathbf{1}_\Omega$ l'indicatrice de Ω , i.e.

$$\mathbf{1}_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint, on appelle famille des projecteurs spectraux associée à A , la famille d'opérateurs bornés sur H :

$$\{P_\Omega := \mathbf{1}_\Omega(A)\}_{\Omega \in \mathcal{T}}.$$

Proposition 4.1. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint.

1. Pour tout $\Omega \in \mathcal{T}$, P_Ω est un projecteur orthogonal.
2. $P_\emptyset = 0$, $P_\mathbb{R} = I_H$.
3. Si $\Omega \in \mathcal{T}$ est tel que $\sigma(A) \subset \Omega$, alors $P_\Omega = I_H$. En particulier, si $|\lambda| > \|A\|$, $P_{]-\lambda, \lambda[} = I_H$.
4. On suppose que $\Omega \in \mathcal{T}$ est réunion dénombrable disjointe de parties Boréliennes de $\mathbb{R}$, i.e.

$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n, \quad \Omega_n \cap \Omega_m = \emptyset \text{ si } n \neq m, \quad \Omega_n \in \mathcal{T},$$

alors pour tout $x \in H$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N P_{\Omega_n} x = P_\Omega x.$$

5. Pour tous $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{T}$, $P_{\Omega_1} P_{\Omega_2} = P_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$.

Remarque 4.2. Si $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, on a $P_{\Omega_1 \cup \Omega_2} = P_{\Omega_1} + P_{\Omega_2}$.

Preuve.

1. $P_\Omega^2 = P_\Omega$ est un cas particulier de 5., reste à montrer que P_Ω est auto-adjoint, c'est une conséquence du calcul fonctionnel et du fait que $\mathbf{1}_\Omega$ est à valeurs réelles.
2. $\mathbf{1}_\emptyset \equiv 0$ donc $\mathbf{1}_\emptyset(A) = 0$. De même $\mathbf{1}_\mathbb{R} \equiv 1$ donc $\mathbf{1}_\mathbb{R}(A) = I_H$.
3. Si $\Omega \in \mathcal{T}$ est tel que $\sigma(A) \subset \Omega$, alors

$$\langle \mathbf{1}_\Omega(A)x, x \rangle = \int_{\sigma(A)} \mathbf{1}_\Omega(\lambda) d\mu_x = \int_{\sigma(A)} d\mu_x = \langle x, x \rangle,$$

et par l'identité de polarisation, on a donc $\mathbf{1}_\Omega(A) = I_H$. Plus simplement, on peut aussi utiliser le calcul fonctionnel continu : $\mathbf{1}_\Omega$ est continue et identiquement égale à 1 sur $\sigma(A)$, donc $\mathbf{1}_\Omega(A) = I_H$.

4. L'indicatrice de la réunion $\bigcup_{n=0}^N \Omega_n$, qui est égale à

$$\sum_{n=0}^N \mathbf{1}_{\Omega_n},$$

converge simplement vers l'indicatrice de Ω lorsque $N \rightarrow +\infty$ et sa norme sup sur $\sigma(A)$ est inférieure à celle de $\mathbf{1}_\Omega$ car la suite de fonctions est croissante et positive. On conclut donc par le calcul fonctionnel.

5. On a $\mathbf{1}_{\Omega_1} \mathbf{1}_{\Omega_2} = \mathbf{1}_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$, d'où le résultat par le calcul fonctionnel. □

Les projecteurs spectraux associés à un opérateur auto-adjoint borné sont un exemple de mesure Borélienne bornée à valeurs projecteurs, dont voici la définition :

Définition 4.2. *Une mesure Borélienne bornée à valeurs projecteurs est une famille $\{P_\Omega\}_{\Omega \in \mathcal{T}}$ telle que*

1. *pour tout $\Omega \in \mathcal{T}$, P_Ω est un projecteur orthogonal ;*
2. *$P_\emptyset = 0$;*
3. *il existe $a > 0$ tel que $P_{]-a, a[} = I$;*
4. *si*

$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n, \quad \Omega_n \cap \Omega_m = \emptyset \text{ si } n \neq m, \quad \Omega_n \in \mathcal{T},$$

alors pour tout $x \in H$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N P_{\Omega_n} x = P_\Omega x ;$$

5. *pour tous $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{T}$, $P_{\Omega_1} P_{\Omega_2} = P_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$.*

Remarque 4.3. *Si on n'a pas la propriété 3., on parle de mesure borélienne à valeurs projections.*

On va montrer que toutes les mesures Boréliennes bornées à valeurs projections sont en fait des familles de projecteurs spectraux associées à un opérateur autoadjoint borné. De plus, la donnée de l'opérateur est équivalente à celle de sa famille de projections spectrales. Autrement dit, l'application qui à $A \in \mathcal{L}(H)$ autoadjoint, associe sa famille de projecteurs spectraux, est une bijection de l'ensemble des opérateurs auto-adjoints bornés sur H dans l'ensemble des mesures Boréliennes bornées à valeurs projecteurs.

Proposition 4.2. *Soit $\{P_\Omega\}_{\Omega \in \mathcal{T}}$ une mesure Borélienne bornée à valeurs projecteurs, alors pour tout $x \in H$,*

$$\mu_x : \Omega \in \mathcal{T} \longmapsto \langle P_\Omega x, x \rangle =: \mu_x(\Omega), \quad (4.3)$$

est une mesure borélienne régulière positive bornée sur $\mathbb{R}$ et pour tout $\lambda \geq a$,

$$\int_{]-\lambda, \lambda[} d\mu_x = \mu_x(]-\lambda, \lambda[) = \|x\|^2.$$

Preuve. On a

$$\mu_x(\Omega) = \langle P_\Omega x, x \rangle = \langle P_\Omega^2 x, x \rangle = \langle P_\Omega x, P_\Omega x \rangle \geq 0.$$

Le reste de la preuve est conséquence du calcul fonctionnel Borélien. □

Définition 4.3. Soit $\{P_\Omega\}_{\Omega \in \mathcal{T}}$ une mesure Borélienne bornée à valeurs projections, on va utiliser une notation différente pour la mesure μ_x définie ci-dessus. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note

$$P_\lambda := P_{]-\infty, \lambda]}.$$

La fonction $F_x(\lambda) = \langle P_\lambda x, x \rangle = \mu_x(]-\infty, \lambda])$ est la fonction de répartition de la mesure μ_x . On notera $d\langle P_\lambda x, x \rangle$ au lieu de $d\mu_x$, en accord avec la notation employée pour l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes (intégrale associée à une mesure Borélienne positive définie par sa fonction de répartition).

Lorsque $\{P_\Omega\}_{\Omega \in \mathcal{T}}$ est la famille des projecteurs spectraux associés à $A \in \mathcal{L}(H)$ autoadjoint, la mesure $d\langle P_\lambda x, x \rangle$ est appelée mesure spectrale associée à A et x .

Le résultat suivant est une conséquence de la preuve du théorème 4.2.

Proposition 4.3. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ autoadjoint, soit $\{P_\Omega\}_{\Omega \in \mathcal{T}}$, la famille des projecteurs spectraux associés à A . Pour toute fonction $f \in \mathcal{B}(\sigma(A))$ et pour tout $x \in H$, on a

$$\langle f(A)x, x \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\langle P_\lambda x, x \rangle.$$

En particulier

$$\langle Ax, x \rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle P_\lambda x, x \rangle.$$

De façon abrégée, on notera

$$f(A) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dP_\lambda, \quad A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dP_\lambda.$$

On a le résultat important suivant :

Théorème 4.3. Soit $\{P_\Omega\}_{\Omega \in \mathcal{T}}$ une mesure Borélienne bornée à valeurs projections, alors il existe un unique $A \in \mathcal{L}(H)$ autoadjoint tel que $P_\Omega = \mathbf{1}_\Omega(A)$ pour tout $\Omega \in \mathcal{T}$; il est donné par

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dP_\lambda. \tag{4.4}$$

Idée de la preuve. Pour l'unicité, on suppose que A et B sont deux opérateurs comme dans le théorème, alors on a

$$\langle \mathbf{1}_\Omega(A)x, x \rangle = \langle \mathbf{1}_\Omega(B)x, x \rangle = \langle P_\Omega x, x \rangle,$$

et donc les mesures spectrales μ_x^A et μ_x^B , associées à A et B sont les mêmes. Il suit que

$$\langle Ax, x \rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\mu_x^A = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\mu_x^B = \langle Bx, x \rangle$$

et par l'identité de polarisation, $A = B$.

La preuve de l'existence consiste à donner formuler l'expression (4.4) d'une façon qui permette de vérifier que les projecteurs spectraux associés à A coïncident avec les P_Ω . On écrit

$$\langle Ax, x \rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle P_\lambda x, x \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{k}{n} \langle P_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[} x, x \rangle,$$

autrement dit

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n, \quad A_n := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{k}{n} P_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[}.$$

Il faut d'abord vérifier que $\{A_n\}$ est une suite de Cauchy. Pour plus de simplicité (de façon à ce que les intervalles restent inclus les uns dans les autres d'une étape à l'autre), on travaille avec

$$B_n := A_{2^n}$$

au lieu de A_n . Ensuite, comme B_n est en fait défini par une somme finie (d'après les propriétés des P_Ω), il est facile de calculer les puissances de B_n et par convergence dominée, d'en déduire que

$$A^N = \int_{\mathbb{R}} \lambda^N dP_\lambda,$$

ce qui entraîne que la mesure spectrale associée à A coïncide avec dP_λ sur les polynômes ; par densité, on en déduit l'égalité des deux mesures. $\square$

La famille de projecteurs spectraux associée à un opérateur auto-adjoint permet de caractériser précisément les éléments du spectre de l'opérateur.

Théorème 4.4. *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ autoadjoint et $\{P_\Omega\}_{\Omega \in \mathcal{T}}$ la famille des projecteurs spectraux associée. Alors :*

1. $\lambda \in \sigma(A)$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, $P_{]\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon[} \neq 0$;
2. $\lambda \in \sigma_p(A)$ si et seulement si $P_{\{\lambda\}} \neq 0$, on a alors $P_{\{\lambda\}} = P_{\text{Ker}(\lambda I - A)}$;
3. $\lambda \in \sigma_c(A)$ si et seulement si $P_{\{\lambda\}} = 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$, $P_{]\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon[} \neq 0$.

Preuve.

1. Soit $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Dire que pour tout $\varepsilon > 0$, $P_{]\lambda_0-\varepsilon, \lambda_0+\varepsilon[} \neq 0$, équivaut à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, $P_{\lambda_0+\varepsilon} - P_{\lambda_0-\varepsilon} \neq 0$. On suppose que $P_{\lambda_0+\varepsilon} - P_{\lambda_0-\varepsilon} = 0$ pour $\varepsilon > 0$ donné.

Alors

$$\begin{aligned}
\|(A - \lambda_0)x\|^2 &= \langle (A - \lambda_0)x, (A - \lambda_0)x \rangle \\
&= \langle (A - \lambda_0)^2 x, x \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} (\lambda - \lambda_0)^2 d\langle P_\lambda x, x \rangle \\
&\geq \int_{\mathbb{R} \setminus]\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon]} (\lambda - \lambda_0)^2 d\langle P_\lambda x, x \rangle \\
&\geq \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R} \setminus]\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon]} d\langle P_\lambda x, x \rangle \\
&\geq \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}} d\langle P_\lambda x, x \rangle - \varepsilon^2 \int_{]\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon]} d\langle P_\lambda x, x \rangle \\
&\geq \varepsilon^2 \|x\|^2 - \varepsilon^2 \langle (P_{\lambda_0 + \varepsilon} - P_{\lambda_0 - \varepsilon})x, x \rangle = \varepsilon^2 \|x\|^2.
\end{aligned}$$

Donc $A - \lambda_0$ est injective, i.e. $\lambda_0 \notin \sigma_p(A)$. L'opérateur A étant auto-adjoint, son spectre résiduel est vide. Supposons que $\lambda_0 \in \sigma_c(A)$, alors, l'opérateur $(A - \lambda_0)^{-1}$ est défini et non borné sur $Im(A - \lambda_0)$ qui est dense dans H et distincte de H . On en déduit, comme on l'a déjà fait précédemment, qu'il existe une suite $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans H , telle que $\|y_n\| = 1$ et $\|(A - \lambda_0)y_n\| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, ce qui est en contradiction avec $\|(A - \lambda_0)x\| \geq \varepsilon\|x\|$. On en déduit donc que $\lambda_0 \in \rho(A)$.

Réciproquement, supposons que $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ est un élément de $\rho(A)$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\|(A - \lambda_0)^{-1}\| \leq 1/\varepsilon$, ce qui entraîne que pour tout $x \in H$, $\|(A - \lambda_0)x\| \geq \varepsilon\|x\|$. C'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}} d\langle P_\lambda x, x \rangle &= \varepsilon^2 \|x\|^2 \\
&\leq \|(A - \lambda_0)x\|^2 = \langle (A - \lambda_0)^2 x, x \rangle = \int_{\mathbb{R}} (\lambda - \lambda_0)^2 d\langle P_\lambda x, x \rangle.
\end{aligned}$$

Supposons que $P_{\lambda_0 + \eta} - P_{\lambda_0 - \eta} \neq 0$ pour un certain $\eta \in]0, \varepsilon[$, alors il existe $y \in H$ tel que $x = (P_{\lambda_0 + \eta} - P_{\lambda_0 - \eta})y \neq 0$. Pour $\lambda < \lambda_0 - \eta$, on a $P_\lambda(P_{\lambda_0 + \eta} - P_{\lambda_0 - \eta}) = 0$ et donc

$$\langle P_\lambda x, x \rangle = 0$$

et pour $\lambda > \lambda_0 + \eta$, $P_\lambda(P_{\lambda_0 + \eta} - P_{\lambda_0 - \eta}) = P_{\lambda_0 + \eta} - P_{\lambda_0 - \eta}$ et donc

$$\langle P_\lambda x, x \rangle = \|x\|^2.$$

On en déduit que la mesure μ_x (où on note $d\mu_x = d\langle P_\lambda x, x \rangle$), restreinte à l'ensemble $] - \infty, \lambda_0 - \eta[\cup]\lambda_0 + \eta, +\infty[$ est nulle, car

$$\mu_x(] - \infty, \lambda_0 - \eta]) = 0 \text{ et } \mu_x(] - \infty, \lambda_0 + \eta]) = \|x\|^2 = \mu_x(\mathbb{R}).$$

Il suit

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (\lambda - \lambda_0)^2 d\mu_x &= \int_{[\lambda_0 - \eta, \lambda_0 + \eta]} (\lambda - \lambda_0)^2 d\mu_x \\ &\leq \eta^2 \int_{[\lambda_0 - \eta, \lambda_0 + \eta]} d\mu_x = \eta^2 \int_{\mathbb{R}} d\mu_x = \eta^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

On voit donc que $\eta \geq \varepsilon$ ce qui est en contradiction avec la définition de η . D'où la réciproque.

2. Soit $\lambda_0 \in \sigma_p(A)$. Alors pour tout vecteur propre x de A associé à la valeur propre λ_0 , on a

$$P_{\{\lambda_0\}}x = \mathbf{1}_{\{\lambda_0\}}(\lambda_0)x = x,$$

donc $P_{\{\lambda_0\}} \neq 0$ et $\text{Ker}(\lambda_0 - A) \subset \text{Im}P_{\{\lambda_0\}}$. Soit maintenant $x \in \text{Im}P_{\{\lambda_0\}}$, $\|x\| = 1$. Alors $x = P_{\{\lambda_0\}}x$ et donc

$$\langle \mathbf{1}_{\{\lambda_0\}}(A)x, x \rangle = \langle P_{\{\lambda_0\}}(A)x, x \rangle = \|x\|^2 = 1 = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{\lambda_0\}}(\lambda) d\mu_x.$$

On en déduit que $\mu_x = \delta_{\lambda_0}$. On peut décomposer Ax sous la forme suivante, de manière unique :

$$Ax = \alpha x + y \text{ où } y \perp x.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \langle Ax, x \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \lambda d\mu_x = \lambda_0 \\ &= \langle \alpha x + y, x \rangle = \alpha \end{aligned}$$

d'où $\alpha = \lambda_0$. De plus

$$\begin{aligned} \langle A^2x, x \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\mu_x = \lambda_0^2 \\ &= \langle \alpha Ax + Ay, x \rangle = \alpha \langle Ax, x \rangle + \langle y, Ax \rangle = \alpha^2 + \|y\|^2 \end{aligned}$$

ce qui implique $y = 0$. On a donc bien $\text{Im}P_{\{\lambda_0\}} = \text{Ker}(\lambda_0 - A)$. La réciproque est évidente.

3. C'est une conséquence triviale des points 1. et 2. □

On a une conséquence triviale du théorème ci-dessus :

Corollaire 4.1. *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ autoadjoint et $\{P_\Omega\}_{\Omega \in \mathcal{T}}$ la famille des projecteurs spectraux associée. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$, alors $P_\Omega = 0$ si et seulement si $\Omega \cap \sigma(A) = \emptyset$.*

4.3 Exercices

Exercice 4.1. Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H . On note P la projection orthogonale sur F .

1. Quelles sont les fonctions continues sur $\sigma(P)$?
2. Soit $f \in \mathcal{C}(\sigma(P))$, déterminer $f(P)$.

Exercice 4.2. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. On veut montrer que tout point isolé du spectre de A est une valeur propre de A . Pour cela, on considère λ un point isolé dans $\sigma(A)$ et f la fonction définie sur $\sigma(A)$ par

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = \lambda, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $\sigma(A)$ et que $f(A) \neq 0$.
2. Montrer que $(\lambda I - A)f(A) = 0$ et en déduire que $\lambda \in \sigma_p(A)$.
3. Montrer que $f(A)$ est le projecteur orthogonal sur $\text{Ker}(\lambda I - A)$.

Exercice 4.3. Soit $H = L^2(\mathbb{R})$ et $\phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ une fonction à valeurs réelles. On définit l'opérateur A sur H par

$$\forall u \in H, \quad Au = \phi u.$$

Déterminer, pour n'importe quelle fonction f continue sur $\mathbb{R}$, l'opérateur $f(A)$.

Exercice 4.4. Soit A un opérateur auto-adjoint compact sur un espace de Hilbert H de dimension infinie. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f(A)$ est compact si et seulement si $f(0) = 0$ (en particulier, si A est positif et compact, alors $\sqrt{A}$ est compact). Indication. Si $f(0) \neq 0$, alors $f(A)$ est inversible sur un sous-espace fermé de dimension infinie de H et donc n'est pas compact. Pour la réciproque, on pourra utiliser l'exercice 3.11.

Exercice 4.5. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, $A \geq 0$.

1. Montrer en utilisant le calcul continu que $\sqrt{A}$ est un élément de $\mathcal{L}(H)$ auto-adjoint, positif et qui commute avec tout opérateur qui commute avec A .
2. Soit $B \in \mathcal{L}(H)$, $B \geq 0$, tel que $B^2 = A$. Montrer que $B = \sqrt{A}$.

Exercice 4.6 (Décomposition polaire d'un opérateur borné.). Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, on note $|A| = \sqrt{A^*A}$.

1. Démontrer que $\text{Ker}(|A|) = \text{Ker}(A)$ et que $\overline{\text{Im}(|A|)} = (\text{Ker}(A))^\perp$.
2. Démontrer qu'il existe un unique opérateur $U \in \mathcal{L}(H)$ tel que :

- (a) pour tout $x \in (\text{Ker}(A))^\perp$, $\|Ux\| = \|x\|$;
- (b) pour tout $x \in \text{Ker}(A)$, $Ux = 0$;
- (c) $A = U|A|$.

Remarque : un opérateur vérifiant les deux premières propriétés ci-dessus (c'est-à-dire un opérateur qui, restreint à l'orthogonal de son noyau, est une isométrie) s'appelle une isométrie partielle.

3. Démontrer que U^*U est le projecteur orthogonal sur $(\text{Ker}(A))^\perp$.

Exercice 4.7 (Exemple d'application des résultats de l'exercice précédent.). Soit $H = L^2(\mathbb{R})$. On considère l'opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ défini par

$$\forall f \in H, Af = af$$

où $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Déterminer la décomposition polaire de A , c'est-à-dire calculer $|A|$ et l'isométrie partielle U définie à l'exercice précédent.

Exercice 4.8. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint sur H et $\lambda \in \sigma(A)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) λ est isolé et λ est une valeur propre de multiplicité finie ;
- (ii) $\forall \varepsilon > 0$ petit, $P_{]\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon[}$ est compact ;
- (iii) $\forall \varepsilon > 0$ petit, $P_{]\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon[}$ est de rang fini.

Chapitre 5

Opérateurs à résolvante compacte

Dans ce chapitre, nous allons considérer des opérateurs non bornés dont la résolvante est compacte. C'est une situation assez classique dans l'analyse des équations aux dérivées partielles usuelles. En utilisant les résultats vus sur les opérateurs compacts, on peut obtenir une décomposition spectrale de ces opérateurs qui est ensuite utilisée pour l'étude de certains problèmes d'évolution. Dans tout le chapitre, on travaillera sur H espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ de dimension infinie.

5.1 Rudiments sur les opérateurs non bornés

Définition 5.1. *Un opérateur non borné sur H est la donnée d'un sous-espace vectoriel $D(A)$ de H et d'une application linéaire $A : D(A) \rightarrow H$. L'opérateur est usuellement noté $(A, D(A))$. L'espace $D(A)$ s'appelle le domaine de A .*

Remarque 5.1. *Si $D(A)$ est dense dans H et si A est borné sur $D(A)$ alors A se prolonge de façon unique en un opérateur borné sur H . Les exemples qui nous intéressent sont ceux où $D(A)$ est dense dans H et A n'est pas borné, i.e. pas continu (pour la topologie de H), sur $D(A)$.*

Exemple. *On considère*

$$H = L^2(\mathbb{R}), \quad D(A) = H^1(\mathbb{R}), \quad A = \frac{d}{dx}.$$

Cet opérateur n'est pas borné, sinon on aurait pour tout $f \in H^1(\mathbb{R})$,

$$\|f'\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

où $C > 0$ est indépendante de f , i.e. $L^2(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^1(\mathbb{R})$, ce qui est bien sûr faux.

Définition 5.2. *Un opérateur $(A, D(A))$ est dit symétrique si, pour tous $u, v \in D(A)$,*

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle.$$

Définition 5.3. On considère un opérateur $(A, D(A))$ avec $D(A)$ dense dans H (on dit que $(A, D(A))$ est de domaine dense). L'adjoint de $(A, D(A))$ est l'opérateur $(A^*, D(A^*))$ défini par :

$$D(A^*) = \{y \in H ; \exists z \in H ; \forall x \in H \langle Ax, y \rangle = \langle x, z \rangle\}$$

et

$$A^*y = z.$$

Remarque 5.2. Le fait que ceci soit bien une définition repose sur la propriété que $D(A)$ étant dense dans H , pour y donné dans H , si z tel que ci-dessus existe, alors il est unique.

On a la propriété évidente suivante :

Proposition 5.1. Si $(A, D(A))$ est symétrique de domaine dense, alors $D(A) \subset D(A^*)$ et

$$A^*|_{D(A)} = A.$$

Définition 5.4. On dit que $(A, D(A))$ est auto-adjoint si $D(A)$ est dense dans H et $(A^*, D(A^*)) = (A, D(A))$ (ce qui revient simplement à dire, d'après la proposition précédente, que $D(A^*) = D(A)$).

On a un critère fondamental pour vérifier qu'un opérateur est auto-adjoint ; il nécessite de définir la notion d'opérateur fermé.

Définition 5.5. On considère un opérateur $(A, D(A))$, son graphe Γ_A est défini comme la partie de $H \times H$ suivante :

$$\Gamma_A := \{(x, Ax) ; x \in D(A)\}.$$

On dit que A est fermé si Γ_A est une partie fermée de $H \times H$.

Théorème 5.1. Soit $(A, D(A))$ un opérateur symétrique de domaine dense, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $(A, D(A))$ autoadjoint ;
2. $(A, D(A))$ est fermé et $\text{Ker}(A^* \pm iI) = \{0\}$;
3. $\text{Im}(A \pm iI) = H$.

Définition 5.6. Soit $(A, D(A))$ un opérateur fermé, l'ensemble résolvant de A , noté $\rho(A)$, est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que

$$\lambda I - A : D(A) \longrightarrow H$$

est un isomorphisme, où $D(A)$ est muni de la norme du graphe

$$\|x\|_{D(A)}^2 = \|x\|^2 + \|Ax\|^2$$

ce qui lui donne une structure d'espace de Hilbert et garantit que $\lambda I - A$ est continu de $D(A)$ dans H (il suffit donc de vérifier la bijectivité). Pour $\lambda \in \rho(A)$, on note $R_\lambda(A) := (\lambda I - A)^{-1}$ et on l'appelle la résolvante de A en λ . Le spectre de A est défini par $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Proposition 5.2. *Soit $(A, D(A))$ un opérateur fermé, pour $\lambda \in \rho(A)$, $R_\lambda(A) \in \mathcal{L}(H)$ simplement par le fait que $R_\lambda(A) \in \mathcal{L}(H, D(A))$ et que $D(A) \hookrightarrow H$. De plus, $\rho(A)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ dans lequel $\lambda \mapsto R_\lambda(A)$ est analytique à valeurs dans $\mathcal{L}(H)$ et vérifie l'identité de la résolvante*

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda) R_\lambda(A) R_\mu(A). \quad (5.1)$$

On voit notamment que $\sigma(A)$ est fermé.

Proposition 5.3. *Soit $(A, D(A))$ un opérateur fermé, d'après l'identité de la résolvante (5.1) si $R_\lambda(A)$ est compacte pour un $\lambda \in \rho(A)$, elle l'est pour tous les $\lambda \in \rho(A)$.*

Définition 5.7. *Soit $(A, D(A))$ un opérateur fermé, on peut décomposer le spectre de A en trois parties disjointes :*

- $\sigma_p(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de A , i.e. les $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que

$$\text{Ker}(\lambda I - A) = \{x \in D(A); (\lambda I - A)x = 0\} \neq \{0\};$$

- $\sigma_c(A)$ est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda I - A$ est injectif et son image est dense dans H , distincte de H , i.e. $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur non borné de domaine $\text{Im}(\lambda I - A)$ dense ;
- $\sigma_r(A)$ est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda I - A$ est injectif et son image n'est pas dense dans H , i.e. $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur non borné de domaine $\text{Im}(\lambda I - A)$ non dense.

5.2 Opérateurs à résolvante compacte

Dans cette section, on considère des opérateurs $(A, D(A))$ auto-adjoints tels que l'injection de $D(A)$ dans H est compacte.

Exemple. *On considère sur $H = L^2(]0, 1[)$ l'opérateur*

$$A = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad D(A) = H^2(]0, 1[) \cap H_0^1(]0, 1[) = H^2(]0, 1[) \cap \overline{\mathcal{C}_0^\infty(]0, 1[)}^{H^1(]0, 1[)}.$$

Il s'agit d'un opérateur auto-adjoint positif et l'injection de $D(A)$ dans H est compacte par le théorème de Kato-Rellich.

De tels opérateurs sont à résolvante compacte, et de plus, pour $\lambda \in \mathbb{R} \cap \rho(A)$, $R_\lambda(A)$ est un opérateur compact auto-adjoint. D'après le théorème de Hilbert-Schmidt, il existe donc une famille orthonormale dénombrable $\{e_n\}_{0 \leq n < N+1}$ ($N \leq +\infty$) et une famille de nombres réels $\{\lambda_n\}_{0 \leq n < N+1}$, avec $|\lambda_n|$ décroissante avec n , telles que, $\{e_n\}_{0 \leq n < N+1}$ est une base Hilbertienne de $\overline{\text{Im}((\lambda I - A)^{-1})} = \overline{D(A)} = H$ (on voit donc qu'on est nécessairement dans le cas séparable) et pour tout $x \in H$

$$(\lambda I - A)^{-1} x = \sum_{n=0}^N \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

De plus, comme $\lambda \in \rho(A)$, $\lambda I - A$ est un isomorphisme de $D(A)$ sur H et on a donc $\text{Ker}((\lambda I - A)^{-1}) = \{0\}$. Comme H est de dimension finie et que la dimension du noyau de chaque valeur propre λ_n de $(\lambda I - A)^{-1}$ est finie, il suit que $N = +\infty$ et que $\lambda_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. On en déduit le théorème suivant.

Théorème 5.2. *Soit $(A, D(A))$ un opérateur auto-adjoint tel que l'injection de $D(A)$ dans H est compacte. On suppose que $\rho(A) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Alors il existe une base Hilbertienne $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de H et une famille de nombres réels $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, avec $|\mu_n| \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, telles que,*

$$x \in D(A) \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n \langle x, e_n \rangle e_n \text{ converge dans } H$$

et pour $x \in D(A)$,

$$Ax = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Preuve. C'est une conséquence directe des remarques précédentes. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(\lambda I - A)^{-1} e_n = \lambda_n e_n \text{ donc } (\lambda I - A) e_n = \frac{1}{\lambda_n} e_n.$$

On en déduit que

$$Ae_n = \left(\lambda - \frac{1}{\lambda_n} \right) e_n = \frac{\lambda \lambda_n - 1}{\lambda_n} e_n =: \mu_n e_n.$$

On a alors bien $|\mu_n| \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. De plus, pour $x \in H$, on a

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle e_k$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n := \sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle e_k \in D(A) \text{ et } Ax_n = \sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle Ae_k = \sum_{k=0}^n \mu_k \langle x, e_k \rangle Ae_k.$$

On voit donc que $x \in D(A)$ si et seulement si la suite $\{Ax_n\}_n$ converge dans H , le graphe de A étant fermé, sa limite est nécessairement Ax . $\square$

5.3 Un exemple

On se place sur $H = L^2(]0, 1[)$ et on considère l'opérateur

$$A = I - \frac{d^2}{dx^2}, \quad D(A) = H^2(]0, 1[) \cap H_0^1(]0, 1[).$$

Cet opérateur est auto-adjoint et de plus, pour tout $f \in D(A)$,

$$\langle Af, f \rangle = \|f\|_H^2 + \|f'\|_H^2 \geq \|f\|_H^2,$$

i.e. $A \geq 1$. Le spectre de A est donc inclus dans $[1, +\infty[$. D'autre part, l'injection de $D(A)$ dans H est compacte par le théorème de Kato-Rellich. On est donc dans le cadre du théorème précédent. On va calculer explicitement les valeurs propres et les fonctions propres de A . Soit $\lambda \geq 1$ tel qu'il existe une fonction $f \in D(A)$ vérifiant

$$f - f'' = \lambda f.$$

Les solutions de cette équation sont les fonctions

$$f(t) = \alpha \cos(\sqrt{\lambda - 1} t) + \beta \sin(\sqrt{\lambda - 1} t)$$

et ces fonctions sont dans $D(A)$ si et seulement si

$$f(0) = \alpha = 0, \quad f(1) = \alpha \cos \sqrt{\lambda - 1} + \beta \sin \sqrt{\lambda - 1} = 0,$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$f(t) = \beta \sin(\sqrt{\lambda - 1} t), \quad \sin \sqrt{\lambda - 1} = 0.$$

Les valeurs propres de A sont donc les $\lambda_k = k^2\pi^2 + 1$, $k \in \mathbb{N}$ et les fonctions propres associées (de norme 1 dans H) sont

$$\psi_k(t) = \sqrt{2} \sin(k\pi t).$$

Supposons maintenant qu'on veuille résoudre dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_t; D(A))$ le problème de Cauchy suivant, pour $\phi_0 \in D(A)$ donné :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = iA\phi(t), \\ \phi(0) = \phi_0 \end{cases} \quad (5.2)$$

On décompose $\phi(t)$ sur la base Hilbertienne ψ_n :

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \psi_n,$$

et ϕ est solution de (5.2) si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et vérifie

$$f'_n(t) = \lambda_n f_n(t), \quad \text{et } f_n(0) = \phi_0^n := \langle \phi_0, \psi_n \rangle,$$

ce qui revient à dire

$$f_n(t) = \phi_0^n e^{i\lambda_n t}.$$

La solution de (5.2) est donc donnée par

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_0^n e^{i\lambda_n t} \psi_n.$$

On remarque que la solution ϕ vérifie $\|\phi(t)\| = \|\phi_0\|_H$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

5.4 Harmoniques sphériques

Un exemple important d'opérateur auto-adjoint à résolvante compacte est le Laplacien sur la sphère en dimension 3. Nous présentons ici sans justification certaines propriétés de cet opérateur qui amènent à la notion d'harmoniques sphériques. L'espace de Hilbert considéré est $L^2(S^2)$ pour la mesure euclidienne sur la sphère, décrite en coordonnées sphériques $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi[\times [0, \pi]$ par $d\mu_{S^2} = \sin \theta d\theta d\varphi$. Le Laplacien sur S^2 , dans ces coordonnées, s'écrit

$$A = -\Delta_{S^2} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Muni du domaine $D(A) = H^2(S^2)$ (défini par exemple comme l'ensemble des traces sur S^2 des fonctions dans $H^{5/2}(\mathbb{R}^3)$, ou encore par redressement local de S^2 à partir de la définition de $H^2(\Omega)$ pour Ω ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^2$), cet opérateur est auto-adjoint positif. De plus, la sphère étant un compact, le théorème de Kato-Rellich assure que l'injection de $D(A)$ dans H est compacte. On est donc dans le cadre d'application du théorème général.

Les valeurs propres de A sont $\lambda_l = l(l+1)$, $l \in \mathbb{N}$. Chaque valeur propre λ_l a pour multiplicité $2l+1$, c'est-à-dire que le sous-espace propre associé à λ_l est de dimension $2l+1$. La base orthonormale de H de fonctions propres associées est notée $\{Y_{ln}\}_{l \in \mathbb{N}, -l \leq n \leq l}$, on les appelle les harmoniques sphériques. Ces fonctions s'écrivent sous la forme

$$\begin{aligned} Y_{ln}(\theta, \varphi) &= e^{in\varphi} u_{ln}(\theta), \\ -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} u_{ln} &= \left(l(l+1) - \frac{n^2}{\sin^2 \theta} \right) u_{ln}, \\ \int_0^\pi |u_{ln}(\theta)|^2 \sin \theta d\theta &= \frac{1}{2\pi}. \end{aligned}$$

On peut par exemple utiliser ces fonctions pour exprimer les fonctions harmoniques sur la boule unité dans $\mathbb{R}^3$ ayant pour trace sur S^2 une fonction $\phi \in L^2(S^2)$. L'équation

$$-\Delta f = 0 \text{ sur } B_{\mathbb{R}^3}(0, 1), \quad f|_{S^2} = \phi,$$

est équivalent à

$$\begin{aligned} \forall l \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad -l \leq n \leq l, \\ -\frac{\partial^2 f_{ln}}{\partial r^2}(r) - \frac{2}{r} \frac{\partial f_{ln}}{\partial r}(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} f_{ln}(r) = 0, \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$f_{ln}(1) = \phi_{ln}, \tag{5.4}$$

où on a décomposé f et ϕ sur la base des harmoniques sphériques

$$f(r, \theta, \varphi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{n=-l}^l f_{ln}(r) Y_{ln}(\theta, \varphi), \quad \phi(\theta, \varphi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{n=-l}^l \phi_{ln} Y_{ln}(\theta, \varphi)$$

et utilisé l'expression du laplacien sur $\mathbb{R}^3$ en coordonnées sphériques :

$$-\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r) - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r) - \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2}.$$

On voit qu'on est ramené à la résolution des équations différentielles ordinaires (5.3) avec donnée initiale en $r = 1$ (5.4).