Séries de fonctions à une variable

Jean-Philippe Nicolas
LMBA,
Université de Brest, 6 avenue Victor Le Gorgeu,
29200 Brest.
Bureau H109
email : Jean-Philippe.Nicolas@univ-brest.fr

Table des matières

Chapitre 1

Séries de fonctions

Dans ce chapitre, on voit les résultats généraux concernant les séries de fonctions à une variable, leur convergence, la continuité de la somme, la dérivation et l'intégration terme à terme. Commençons par fixer les notations. On travaille sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$, on précisera si nécessaire). On étudie la série

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\,.$$

On notera les sommes partielles

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\,.$$

1.1 Rappels de cours

Rappelons les différents types de convergences des séries de fonctions vues l'année précédente.

- **Convergence en un point**. Soit $x \in I$, on dit que la série $S(x)$ converge si et seulement si la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$. On a le critère de Cauchy de convergence en un point qui vient directement du critère de Cauchy de convergence de la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$: la série $S(x)$ converge si et seulement si

  $$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,;\ \forall n \geq n_0\,,\ \forall p \in \mathbb{N}\,,\ |\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x)| < \varepsilon\,.$$

  Dans ce cas, $S(x)$ est définie comme la limite de la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

- **Convergence simple sur** I. On dit que la série S converge simplement sur I si la série $S(x)$ converge en tout point x de I. Ceci équivaut à dire que

  $$\forall x \in I\,,\ \forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,;\ \forall n \geq n_0\,,\ \forall p \in \mathbb{N}\,,\ |\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x)| < \varepsilon\,. \qquad (1.1)$$

- **Convergence absolue sur** I. On dit que la série S converge absolument sur I si la série
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |f_k(x)|$$
converge simplement sur I. Ceci équivaut à dire que
$$\forall x \in I\,,\ \forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,;\ \forall n \geq n_0\,,\ \sum_{k=n}^{+\infty} |f_k(x)| < \varepsilon\,.$$

- **Convergence uniforme**. On dit que la série S converge uniformément sur I si dans le critère (1.1) on peut choisir n_0 indépendemment de x, i.e.
$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,;\ \forall x \in I\,,\ \forall n \geq n_0\,,\ \forall p \in \mathbb{N}\,,\ |\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x)| < \varepsilon\,.$$

- **Convergence normale**. On dit que la série S converge normalement sur I s'il existe une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à terme positif, telle que
  1. $|f_k(x)| \leq u_k$ $\forall x \in I$, $\forall k \in \mathbb{N}$,
  2. la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ converge.

On a
$$\text{convergence normale} \Rightarrow \text{convergence uniforme} \Rightarrow \text{convergence simple}\,,$$
$$\text{convergence normale} \Rightarrow \text{convergence absolue} \Rightarrow \text{convergence simple}\,,$$
les implications réciproques étant fausses. De plus il n'y a d'implication dans aucun des deux sens entre convergence uniforme et convergence absolue.

Exemple fondamental de série convergeant simplement mais pas normalement. Soit $-\infty < a < b < +\infty$. On considère une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose que la série
$$S(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k(x)$$
converge absolument sur $]a, b[$ mais ne converge pas absolument en b. Alors la série ne converge pas normalement sur $]a, b[$.

Preuve. L'argument est simple, on considère le meilleur majorant de $|f_k|$ sur $]a, b[$: son sup. En utilisant la continuité de f_k sur $[a, b]$, on a :
$$\sup_{x\in]a,b[} |f_k(x)| = \max_{x\in[a,b]} |f_k(x)| \geq |f_k(b)|\,.$$
Il suit que la série de terme général $\sup_{x\in]a,b[} |f_k(x)|$ diverge. Tout autre majorant de $|f_k|$ sur $]a, b[$ sera encore pire. On n'a donc pas convergence normale sur $]a, b[$. □

Remarque 1.1. *Lorsqu'on a une norme sur un espace de fonctions sur un intervalle (l'espace des fonctions continues par exemple) on peut considérer la convergence d'une série de fonctions au sens de cette norme. On verra pour les séries de Fourier que la convergence L^2 est particulièrement utile par exemple.*

On sait que si une suite de fonctions continues converge uniformément, sa limite est continue. Ceci a la conséquence directe suivante.

Théorème 1.1 (Continuité de la série)**.** *Si pour tout $k \in \mathbb{N}$ la fonction f_k est continue sur I et si la série S converge uniformément sur I, alors S est continue sur I.*

On a aussi un théorème d'intégration terme à terme et un théorème de dérivation terme à terme qui sont des conséquences un peu moins directes. Nous donnons le théorème de dérivation terme à terme pour commencer. Le théorème d'intégration terme à terme est un peu restrictif dans sa forme impliquant la convergence uniforme, la version faisant intervenir le théorème de convergence dominée est plus souple. Nous verrons une forme de ce théorème et l'application aux séries de fonctions immédiatement après le théorème de dérivation terme à terme.

Théorème 1.2 (Dérivation terme à terme)**.** *On suppose que :*

1. *pour tout $k \in \mathbb{N}$ la fonction f_k est dérivable sur I ;*
2. *il existe $x_0 \in I$ tel que la série $S(x_0)$ converge ;*
3. *la série $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k'$ converge uniformément sur I.*

Alors : S est dérivable sur I et

$$\forall x \in I\,,\ S'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k'(x)\,.$$

Remarque 1.2. *A noter que sous les hypothèses du théorème ci-dessus, la série S converge uniformément sur tout sous-intervalle borné de I. C'est une conséquence du théorème des accroissements finis.*

Le théorème de convergence dominée est un des théorèmes fondamentaux de la théorie de Lebesgue, qui révolutionna la théorie de l'intégration au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle. En voici une version simple ne faisant pas intervenir la notion de mesurabilité.

Théorème 1.3 (Convergence dominée)**.** *On considère une suite de fonctions $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $]a,b[$ dans $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$), $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. On suppose que les u_k sont toutes continues par morceaux sur $]a,b[$ et qu'il existe une fonction $g\ :\ ]a,b[\to [0,+\infty[$ continue par morceaux telle que :*

1. *$\forall x \in I$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $|u_k(x)| \leq g(x)$;*
2. *$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x < +\infty$;*

3. *pour chaque* $x \in]a, b[$ *la suite* $(u_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ *converge, on note* $u(x)$ *sa limite.*

Alors :

(i) pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_a^b |u_k(x)|\mathrm{d}x < +\infty$ *;*

(ii) u *est intégrable sur* $]a, b[$*, i.e.* $\int_a^b |u_(x)|\mathrm{d}x$ *a un sens et est finie, ce qui implique en particulier que* $\int_a^b u(x)\mathrm{d}x$ *a aussi un sens ;*

(iii) $\lim_{k\to+\infty} \int_a^b u_k(x)\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)\mathrm{d}x$.

On a l'application suivante directe aux séries de fonctions.

Théorème 1.4 (Intégration terme à terme, version 1)**.**
Soit $I =]a, b[$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$*. On suppose que les* f_k *sont toutes continues par morceaux sur* $[a, b]$ *et que*

$$\int_a^b \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |f_k(x)| \right) \mathrm{d}x < +\infty\,.$$

Alors :

(i) S *est intégrable sur* $]a, b[$ *;*

(ii) $\sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x$.

Nous donnons aussi la version du théorème d'intégration terme à terme utilisant la convergence uniforme.

Théorème 1.5 (Intégration terme à terme, version 2)**.**
Soit $I = [a, b]$*, avec* $-\infty < a < b < +\infty$*. On suppose que les* f_k *sont toutes continues sur* $[a, b]$ *et que la série* S *converge uniformément sur* $[a, b]$*. Alors :*

(i) S *est continue sur* $[a, b]$ *donc y est intégrable ;*

(ii) $\sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x$.

1.2 exercices

Exercice 1.1. Montrer que les hypothèses du théorème 1.2 impliquent la conclusion *(i)* du théorème.

Exercice 1.2. Déterminer le domaine de convergence des séries de fonctions suivantes :

$$\sum_{n\geq 0} 3^n x^n \qquad \sum_{n\geq 1} n^2 e^{-nx} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x} \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{1+x^{2n}} \qquad \sum_{n\geq 0} x^n(1-x)^n$$

Exercice 1.3. Démontrer que les séries suivantes convergent uniformément sur le domaine D :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^2+x^2} \quad D=\mathbb{R} \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{n+1} \quad D=[-1,1]$$

$$\sum_{n\geq 0} x^n(1-x)^n \quad D=[0,1] \qquad \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2+\operatorname{Arctg}(nx)} \quad D=R$$

Exercice 1.4.

1. Démontrer que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$$

converge si et seulement si $x \geq 0$.

2. Soit $S(x)$ sa somme, démontrer que $S(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $]0,+\infty[$.

Exercice 1.5. On considère la série de fonctions de terme général

$$u_n(x) = \frac{\sin(n^2x)}{n^2}\,,\ n\geq 1\,.$$

Montrer que cette série converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire de la série de terme général u_n'?

Exercice 1.6. On considère la fonction f définie par la série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)-1\right)\sin(nx)\,.$$

1. Quel est le domaine de définition de f?
2. Montrer que f est continue sur son domaine de définition.
3. Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition.

Exercice 1.7.

1. Montrer que la série de terme général

$$u_n(x) = ne^{-nx}$$

est uniformément convergente sur tout intervalle $[a,+\infty[$.

2. Est-elle uniformément convergente sur $[0,+\infty[$?
3. Calculer sa somme.

Chapitre 2

Séries entières

Définition 2.1. *On appelle série entière une série de la forme*

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \tag{2.1}$$

où les c_n sont des coefficients complexes fixés. Pour une telle série, on définit son rayon de convergence par :

$$R := \sup \{\rho\,;\ \rho \geq 0 \text{ et la suite } c_n \rho^n \text{ est bornée}\}\ .$$

Proposition 2.1. *On considère une série entière*

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

de rayon de convergence $R > 0$. Alors $S(z)$ est absolument convergente dans le disque ouvert $D(0, R)$, normalement convergente dans $\bar{D}(0, r)$ pour $0 < r < R$ et divergente pour $|z| > R$.

Preuve.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$, $|z| < R$. Alors on pose $\varepsilon = R - |z|$ et on a
$$|c_n z^n| = |c_n|(R-\varepsilon)^n = |c_n| \left(\frac{R-\varepsilon}{R-\varepsilon/2}\right)^n (R-\varepsilon/2)^n \leq C_\varepsilon \left(\frac{R-\varepsilon}{R-\varepsilon/2}\right)^n ,$$
car $R - \varepsilon/2 < R$ et donc la suite $c_n(R-\varepsilon/2)^n$ est bornée. Comme $R - \varepsilon < R - \varepsilon/2$, on a majoré $|c_n z^n|$ par une quantité de la forme $C\lambda^n$ avec $0 < \lambda < 1$, i.e. par le terme général d'une série convergence. La série $S(z)$ converge donc absolument.

2. Soit $0 < r < R$. Pour tout $z \in \bar{D}(0, r)$, on a la majoration suivante :
$$|c_n z^n| \leq |c_n| r^n \leq C_{R-r} \left(\frac{R-(R-r)}{R-(R-r)/2}\right)^n = C_{R-r} \left(\frac{2r}{R+r}\right)^n$$
et $2r < r + R$, on a donc bien convergence normale dans $\bar{D}(0, r)$.

3. Pour $|z| > R$, par définition de R, la suite $|c_n z^n| = |c_n||z|^n$ n'est pas bornée, le terme général ne tend donc pas vers zéro et la série diverge. $\square$

A noter que la Proposition 2.1 implique que le rayon de convergence peut aussi se définir de la façon suivante :

Corollaire 2.1. *Le rayon de convergence R de (2.1) est aussi caractérisé par*

$$R = \sup\left\{\rho\,;\ \rho \geq 0 \text{ et la série } \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\rho^n < +\infty\right\}.$$

Le rayon de convergence peut se calculer en utilisant la formule de Cauchy-Hadamard :

Théorème 2.1. *Le rayon de convergence de la série entière (2.1) est donné par*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} |c_n|^{1/n}}.$$

Preuve. On note R le rayon de convergence de la série et

$$K = \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} |c_n|^{1/n}}.$$

On rappelle la définition de limite supérieure :

$$\limsup_{n\to+\infty} |c_n|^{1/n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} |c_k|^{1/k} = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} |c_k|^{1/k}.$$

On considère $\rho > 0$ tel que

$$\rho < K\,, \text{ i.e. } \frac{1}{\rho} > \limsup_{n\to+\infty} |c_n|^{1/n}\,,$$

alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pout tout $n \geq N$, on ait

$$\frac{1}{\rho} \geq |c_n|^{1/n} \text{ et donc } |c_n\rho^n| \leq 1\,,$$

d'où la suite $c_n\rho^n$ est bornée et $\rho \leq R$. On en déduit que $R \geq K$.

Soit maintenant $\rho > K$, alors il existe $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geq N$ on ait :

$$\exists k \geq n\,;\ |c_k|^{1/k} \geq \frac{1}{\rho} + \varepsilon\,,$$

autrement dit, on peut extraire une sous-suite c_{n_k} de c_n telle que

$$|c_{n_k}|^{1/n_k} \geq \frac{1}{\rho} + \varepsilon \text{ et donc } |c_{n_k}\rho^{n_k}| \geq (1+\varepsilon\rho)^{n_k} \to +\infty \text{ lorsque } k \to +\infty\,.$$

D'où la suite $c_n\rho^n$ n'est pas bornée et $\rho \geq R$. On en déduit que $R \leq K$.

A noter que si $K = 0$, on n'utilise que la deuxième inégalité et si $K = +\infty$, on n'utilise que la première. $\square$

On a des critères de calcul pour le rayon de convergence qui ne fonctionnent pas systématiquement, contrairement à la formule de Cauchy-Hadamard. Il vaut mieux réfléchir que les utiliser mais si on est pressé ils peuvent parfois être des outils utiles. Des études récentes montrent que leur utilisation systématique est émoliante pour la matière grise.

Théorème 2.2 (Critères de d'Alembert et Cauchy)**.** *On considère la série entière (2.1).*

1. **Critère de d'Alembert.** *Si la suite* $\left(\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une limite* $l \in [0, +\infty]$*, alors* $R = 1/l$*.*
2. **Critère de Cauchy.** *Si la suite* $\left(|c_n|^{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une limite* $l \in [0, +\infty]$*, alors* $R = 1/l$*.*

Preuve en exercice. Basée sur la comparaison avec les séries géométriques. $\square$

Lemme 2.1. *Les séries entières*

$$\sum_{n\geq 0} c_n z^n \text{ et } \sum_{n\geq 1} n c_n z^{n-1}$$

ont le même rayon de convergence.

Preuve. On commence par remarquer que la série $\sum_{n\geq 1} n c_n \rho^{n-1}$ converge si et seulement si $\sum_{n\geq 0} n c_n \rho^n$ converge. La preuve est alors une application directe de la formule de Cauchy-Hadamard et du fait que

$$n^{1/n} \to 1 \text{ lorsque } n \to +\infty\,. \quad \square$$

Si on travaille avec une variable réelle, on en déduit immédiatement le théorème suivant.

Théorème 2.3. *Soit la série entière de variable réelle* x

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$$

de rayon de convergence $R > 0$*. Alors la fonction* f *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur le* $]-R, R[$*. On a*

$$f'(x) = \sum_{n\geq 0} n c_n x^{n-1} \text{ sur }]-R, R[$$

et toutes les dérivées successives de f *qui se calculent en dérivant la série terme à terme.*

Remarque 2.1. *Dans le cas où la variable est complexe, le théorème reste vrai sur le disque ouvert* $D(0, R)$*, il suit presque aussi directement du Lemme 2.1, il faut simplement utiliser en plus que* $f' = \partial f/\partial z$ *et que* $\partial f/\partial \bar{z} = 0$ *dans* $D(0, R)$*. Voir le cours d'analyse complexe pour plus de détails.*

Quelques développements usuels en série entière et leur domaine de validité.

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\,,\ x\in\mathbb{R}\,,\\
\cos x &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,,\ x\in\mathbb{R}\,,\\
\sin x &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,,\ x\in\mathbb{R}\,,\\
\cosh x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,,\ x\in\mathbb{R}\,,\\
\sinh x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,,\ x\in\mathbb{R}\,,\\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n\,,\ x\in]-1,1[\,,\\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n\,,\ x\in]-1,1[\,,\\
\log(1+x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}\,,\ x\in]-1,1[\,,\\
\log(1-x) &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\,,\ x\in]-1,1[\,.
\end{aligned}
$$

Chapitre 3

Séries de Fourier

3.1 Fonctions périodiques

Analogie avec la musique : vibration d'une corde, fréquence dominante et harmoniques. L'idée est qu'on va décomposer le signal en signaux élémentaires qui sont de fréquences pures, des choses de la forme $\sin(\omega t + \phi)$, pour des fréquences ω qui seront des multiples d'une fréquence fondamentale ω_0. Rien ne dit a priori que ce genre de développement doive avoir un nombre fini de termes. Les fonctions qui décrivent des signaux décomposables sous cette forme sont des fonctions périodiques.

Définition 3.1. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $T > 0$. On dit que f est périodique de période T si pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x+T) = f(x)$.*

Une fonction est dite périodique s'il existe $T > 0$ tel que f soit périodique de période T.

Exemples. Exponentielles complexes, sinus, cosinus, les mêmes fonctions dilatées en abscisse pour changer la période, les mêmes fonctions translatées.

Deux famille particulières de fonctions périodiques qui vont nous intéresser sont celles qui sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et celles qui sont intégrables sur tout compact. La première famille est incluse dans la seconde. A noter que supposer qu'une fonction périodique est intégrable sur tout compact revient à supposer qu'elle l'est sur une période. Nous énonçons une première propriété importante qui aura de nombreuses applications dans la suite.

Proposition 3.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction périodique de période $T > 0$, intégrable sur tout compact de $\mathbb{R}$. Alors la valeur de*

$$\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\mathrm{d}x$$

est indépendante du choix de x_0.

Preuve. Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x_0 \leq nT < x_0 + T$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{x_0}^{nT} f(x)\mathrm{d}x + \int_{nT}^{x_0+T} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{x_0}^{nT} f(x)\mathrm{d}x + \int_{(n-1)T}^{x_0} f(y+T)\mathrm{d}y \\
&\qquad \text{par le changement de variable } y = x - T \\
&= \int_{x_0}^{nT} f(x)\mathrm{d}x + \int_{(n-1)T}^{x_0} f(y)\mathrm{d}y \text{ par périodicité de } f \\
&= \int_{(n-1)T}^{nT} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x \text{ par périodicité de } f\,. \quad \square
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant définir des familles de fonctions périodiques qui permettront de décomposer toutes les fonctions périodiques (vérifiant tout de même quelques hypothèses simples).

3.2 Deux systèmes orthogonaux fondamentaux

On travaille avec des fonctions de période $T > 0$ donnée. Le cas le plus fréquent sera $T = 2\pi$ mais nous travaillerons dans le cas général en cours.

On dira que deux fonctions f et g complexes de période T sont orthogonales si pour un $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque, on a

$$\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x = 0\,.$$

Remarque 3.1. *A noter en conséquence de la proposition 3.1 que si la propriété ci-dessus est vraie pour un certain x_0, elle sera vraie pour tout x_0 du fait de la périodicité. Il suffit donc de la vérifier pour un choix de x_0 qui nous arrange, 0 ou $-T/2$ sont des choix habituels.*

Un premier système orthogonal de période T :

$$\{e^{i\frac{2\pi}{T}nx}\}_{n\in\mathbb{Z}}\,. \tag{3.1}$$

Cette famille de fonctions constitue une famille orthogonale sur $[0, T]$, c'est-à-dire que si $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \neq m$, alors

$$\int_0^T e^{i\frac{2\pi}{T}nx}e^{-i\frac{2\pi}{T}mx}\mathrm{d}x = 0\,.$$

De plus, on a pour $n = m$

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{i\frac{2\pi}{T}nx}e^{-i\frac{2\pi}{T}nx}\mathrm{d}x = 1\,.$$

C'est un système orthonormal pour le produit scalaire hermitien

$$\langle f\ ,\ g\rangle = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x\,. \tag{3.2}$$

Un second système orthogonal de période T important :

$$\{1\} \cup \left\{cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}^*} \cup \left\{sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}\,,$$

où 1 est la fonction constante égale à 1.

Cette famille de fonctions constitue une famille orthogonale sur $[0,T]$, c'est-à-dire que

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}mx\right)\mathrm{d}x = 0\,,\ \forall n,m\in\mathbb{N}^*\,,\ n\neq m\,,$$
$$\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T}mx\right)\mathrm{d}x = 0\,,\ \forall n,m\in\mathbb{N}^*\,,\ n\neq m\,,$$
$$\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T}mx\right)\mathrm{d}x = 0\,,\ \forall n,m\in\mathbb{N}^*\,,$$
$$\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\mathrm{d}x = 0\,,\ \forall n\in\mathbb{N}^*\,,$$
$$\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\mathrm{d}x = 0\,,\ \forall n\in\mathbb{N}^*\,.$$

De plus, on a pour $n=m$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,.$$

Le système orthonormal associé est donc

$$\{1\} \cup \left\{\sqrt{2}\,cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}^*} \cup \left\{\sqrt{2}\,sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}\,. \tag{3.3}$$

Nous allons maintenant décomposer les fonctions périodiques sur ces systèmes orthonormaux. Le principe est le même que pour la décomposition sur une base dans un espace euclidien de dimension finie. On rappelle que dans un espace euclidien E muni d'une base $\{e_1,...,e_n\}$ orthonormale pour $\langle .,.\rangle$, tout $x\in E$ s'écrit sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i\,. \tag{3.4}$$

Nous sommes ici dans le cas d'un espace de dimension infinie, engendré par les systèmes orthonormaux décrits ci-dessus. La théorie générale de ce type de décomposition sera vue au second semestre, dans le cours sur les espaces de Hilbert.

3.3 Coefficients et séries de Fourier

Soit f une fonction périodique de période $T > 0$ à valeurs réelles ou complexes. On suppose que f est intégrable sur tout compact de $\mathbb{R}$.

3.3.1 Forme complexe

Définition 3.2. *On appelle coefficients de Fourier de f forme complexe les nombres $c_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}$ définis par*

$$c_n(f) = \langle f, e^{i\frac{2\pi}{T}nx} \rangle = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)e^{-i\frac{2\pi}{T}nx}\mathrm{d}x\,,$$

où x_0 est un nombre réel quelconque choisi comme on le souhaite.

Proposition 3.2. *La valeurs des coefficients de Fourier de f forme complexe ne dépend pas du choix de x_0.*

Preuve. C'est une conséquence directe de la proposition 3.1.

Définition 3.3 (Série de Fourier)**.** *On appelle série de Fourier de f la série (pour l'instant formelle, on montrera qu'elle a un sens par la suite)*

$$S_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{i\frac{2\pi}{T}nx}\,.$$

C'est une généralisation avec une "base" infinie de la formule (3.4).

3.3.2 Forme réelle

Définition 3.4. *On appelle coefficients de Fourier de f forme réelle les nombres $a_n(f)$, $n \in \mathbb{N}$ et $b_n(f)$, $n \in \mathbb{N}^*$ définis par*

$$a_0(f) = \langle f, 1 \rangle = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\mathrm{d}x\,,$$
$$a_n(f) = \langle f, \sqrt{2}\cos(\frac{2\pi}{T}nx) \rangle = \frac{\sqrt{2}}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\mathrm{d}x\,,\ n \in \mathbb{N}^*\,,$$
$$b_n(f) = \langle f, \sqrt{2}\sin(\frac{2\pi}{T}nx) \rangle = \frac{\sqrt{2}}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\mathrm{d}x\,,\ n \in \mathbb{N}^*\,,$$

où x_0 est un nombre réel quelconque choisi comme on le souhaite.

Proposition 3.3. *La valeurs des coefficients de Fourier de f forme réelle ne dépend pas du choix de x_0.*

Preuve. C'est une conséquence directe de la proposition 3.1.

Remarque 3.2. *Il existe un lien clair entre les formes réelles et complexes des coefficients de Fourier. Il suffit pour le voir d'écrire*

$$e^{-i\frac{2\pi}{T}nx} = \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) .$$

Il suit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$c_n(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_n(f) - ib_n(f)\right) \,,\ c_{-n}(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_n(f) + ib_n(f)\right) \,,$$

autrement dit

$$a_n(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_n(f) + c_{-n}(f)) \text{ et } b_n(f) = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(c_n(f) - c_{-n}(f)\right) .$$

Par ailleurs, $c_0(f) = a_0(f)$.

On en déduit la forme réelle de la série de Fourier de f en terme des coefficients de Fourier réels (évidemment l'égalité n'a de sens que si la série converge).

Définition 3.5 (Série de Fourier forme réelle)**.** *La série de Fourier de f a la forme suivante en termes des coefficients de Fourier réels :*

$$S_f(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)\sqrt{2}\,\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) + b_n(f)\sqrt{2}\,\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\right) .$$

A noter que cette forme peut aussi s'obtenir directement à partir de la formule (3.4). Nous reviendrons sur cette décomposition plus en détails plus loin.

3.4 Cas où $T = 2\pi$

Le cas des fonctions périodiques de période 2π est le plus fréquent et un cas typique où les expressions des coefficients de Fourier et de la série de Fourier deviennent plus simple. Nous les donnons ici.

Les familles orthonormales sont alors :

$$\left\{e^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}} \text{ et } \{1\} \cup \left\{\sqrt{2}\,\cos(nx)\right\}_{n\in\mathbb{N}^*} \cup \left\{\sqrt{2}\,\sin(nx)\right\}_{n\in\mathbb{N}^*} .$$

Les coefficients de fourier deviennent :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x \,,\ n \in \mathbb{Z} \,,$$

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x \,,$$

$$a_n(f) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x \,,\ b_n(f) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x \,,\ n \in \mathbb{N}^* .$$

La série de Fourier prend les formes réelle et complexe :

$$\begin{aligned} S_f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx} \\ &= a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(a_n(f)\sqrt{2}\,\cos(nx) + b_n(f)\sqrt{2}\,\sin(nx) \Big)\,. \end{aligned}$$

3.5 Interprétation des coefficients de Fourier

Nous revenons ici sur le lien entre les coefficients de Fourier et la formule de décomposition (3.4). Les coefficients de Fourier d'une fonction s'interprêtent comme les "composantes" de la fonction sur le système orthonormal de fonctions périodiques considéré. La série de Fourier se comprendra alors comme une décomposition sur la famille orthonormale considérée.

Commençons par une analogie avec un cas usuel bien connu : celui des composantes d'un vecteur sur une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$. On considère le cas le plus simple où la base est $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$. Soit un vecteur $\vec{V} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, sa décomposition sur la base considérée s'écrit :

$$\vec{V} = \langle V, \vec{e}_1\rangle \vec{e}_1 + \langle V, \vec{e}_2\rangle \vec{e}_2 + \langle V, \vec{e}_3\rangle \vec{e}_3\,,$$

où $< .,. >$ désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^3$. On voit ici que $\langle V, \vec{e}_1\rangle = x$, $\langle V, \vec{e}_2\rangle = y$ et $\langle V, \vec{e}_3\rangle = z$.

Remarque 3.3. *Si la base est orthogonale mais pas orthonormale, on a des formules un peu différentes. Prenons la base suivante de* $\mathbb{R}^3$ *:* $\vec{f}_1 = (2,0,0)$*,* $\vec{f}_2 = (0,3,0)$*,* $\vec{f}_3 = (0,0,2)$*. Soit un vecteur* $\vec{V} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$*, sa décomposition sur la base considérée s'écrit :*

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \langle V, \frac{1}{2}\vec{f}_1\rangle \frac{1}{2}\vec{f}_1 + \langle V, \frac{1}{3}\vec{f}_2\rangle \frac{1}{3}\vec{f}_2 + \langle V, \frac{1}{2}\vec{f}_3\rangle \frac{1}{2}\vec{f}_3 \\ &= \frac{\langle V, \frac{1}{2}\vec{f}_1\rangle}{\langle \vec{f}_1, \vec{f}_1\rangle} + \frac{\langle V, \frac{1}{3}\vec{f}_2\rangle}{\langle \vec{f}_2, \vec{f}_2\rangle} + \frac{\langle V, \frac{1}{2}\vec{f}_3\rangle}{\langle \vec{f}_3, \vec{f}_3\rangle}\,. \end{aligned}$$

Les formule "habituelles" pour les séries de Fourier réelles correspondent à une famille orthogonale mais pas orthonormale. Dans ce cours, nous travaillons uniquement avec des systèmes orthonormaux afin d'éviter les incertitudes sur les valeurs des coefficientsdes a_n*,* b_n*, l'expression de la série de Fourier et la formule de Parseval.*

L'idée des séries de Fourier est tout-à-fait analogue avec un produit scalaire qui est celui que nous avons déjà utilisé pour définir la notion d'orthogonalité de deux fonctions périodiques.

Définition 3.6 (Produit scalaire)**.** *Si f et g sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et périodiques de période $T > 0$, on définit le produit scalaire de f et g par*

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x\,.$$

La norme associée à ce produit scalaire est notée de la façon suivante :

$$\|f\|^2_{L^2_T} := \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} |f(x)|^2\mathrm{d}x\,. \tag{3.5}$$

3.5.1 Forme réelle

La famille orthonormale que l'on considère est

$$\phi_0(x) = 1 \text{ et pour } n \in \mathbb{N}^*\,,\ \phi_n(x) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\,,\ \psi_n(x) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\,,$$

on a vu que

$$\langle \phi_n, \psi_m \rangle = 0\,,\ \langle \phi_n, \phi_m \rangle = \delta_{nm}\,,\ \langle \psi_n, \psi_m \rangle = \delta_{nm}\,.$$

Les coefficients de Fourier sont

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\mathrm{d}x = \langle f, \phi_0 \rangle\,, \\ \text{pour } n \in \mathbb{N}^*\,,\ a_n(f) &= \frac{\sqrt{2}}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\mathrm{d}x = \langle f, \phi_n \rangle\,, \\ \text{pour } n \in \mathbb{N}^*\,,\ b_n(f) &= \frac{\sqrt{2}}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\mathrm{d}x = \langle f, \psi_n \rangle\,. \end{aligned}$$

La série de Fourier s'écrit donc :

$$S_f(x) = \langle f, \phi_0 \rangle\,\phi_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\langle f, \phi_n \rangle\,\phi_n(x) + \langle f, \psi_n \rangle\,\psi_n(x)\right)\,.$$

3.5.2 Forme complexe

La famille orthogonale est

$$\chi_n(x) = e^{i\frac{2\pi}{T}nx}\,,\ n \in \mathbb{Z}$$

et on a vu que

$$\langle \chi_n, \chi_n \rangle = 1\,,$$

c'est-à-dire que $\{\chi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est un système orthonormal.

Les coefficients de Fourier s'écrivent

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)e^{-i\frac{2\pi}{T}nx}\mathrm{d}x = \langle f, \chi_n\rangle\,.$$

On a donc l'expression de la forme complexe de la série de Fourier de f :

$$S_f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, \chi_n\rangle\, \chi_n(x)\,.$$

3.6 Propriétés des coefficients de Fourier

Un cas où les coefficients de Fourier prendront une forme plus simple est celui où la fonction f est paire ou impaire. Commençons par rappeler des propriétés sur les fonctions paires et impaires.

Propriétés. Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[-R, R]$, $R > 0$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, continues par morceaux sur $[-R, R]$.

1. Si f est impaire, alors
$$\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x = 0\,.$$

2. Si f est paire, alors
$$\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{R} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

3. Si f est g sont paires alors le produit $f.g$ est une fonction paire.

4. Si f est g sont impaires alors le produit $f.g$ est une fonction paire.

5. Si f est impaire et g est paire alors le produit $f.g$ est une fonction impaire.

Proposition 3.4. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T > 0$. On a les propriétés suivantes :*

- *On suppose que f est paire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$b_n(f) = 0 \ \textit{et}\ c_n(f) = c_{-n}(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}a_n(f)\,.$$

De plus on a l'écriture simplifiée :

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\mathrm{d}x \ \textit{et pour tout}\ n\in\mathbb{N}^*\,,\ a_n = \frac{2\sqrt{2}}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\mathrm{d}x\,.$$

- *On suppose que f est impaire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_n(f) = 0$ (y compris $a_0(f)$), et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*
$$c_n(f) = -c_{-n}(f) = \frac{1}{i\sqrt{2}} b_n(f)\,.$$
De plus on a l'écriture simplifiée : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$b_n = \frac{2\sqrt{2}}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \mathrm{d}x\,.$$

Preuve. On prend $x_0 = -T/2$ dans les formules des coefficients de Fourier et on utilise les propriétés en début de section 3.6. □

Un autre cas où une simplification apparaît est celui où la fonction f est réelle.

Proposition 3.5. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue par morceaux, à valeurs réelles, périodique de période $T > 0$ alors les coefficients de Fourier de f forme complexe vérifient :*
$$c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}\,,\ \ \forall n \in \mathbb{Z}\,.$$

Preuve. Elle est évidente :
$$\begin{aligned}
\overline{c_n(f)} &= \overline{\frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{-i\frac{2\pi}{T}nx} \mathrm{d}x} \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(x)}\,\overline{e^{-i\frac{2\pi}{T}nx}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{i\frac{2\pi}{T}nx} \mathrm{d}x = c_{-n}(f). \quad \square
\end{aligned}$$

3.7 Convergence de la série de Fourier

Le théorème fondamental est le théorème de Jordan-Dirichlet. Il donne un sens à la série de Fourier en chaque point sous des hypothèses générales sur f.

Théorème 3.1 (Jordan-Dirichlet)**.** *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, périodique de période $T > 0$. La série de Fourier de f converge en tout point de $\mathbb{R}$ et les formes réelles et complexes sont bien égales. En tout point $x \in \mathbb{R}$ où f est continue, on a $S_f(x) = f(x)$ et en tout point $x \in \mathbb{R}$ où f est discontinue, on a $S_f(x) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$.*

De plus, on a un théorème d'unicité de la série de Fourier qui peut s'avérer très utile.

Théorème 3.2. *Avec les hypothèses du Théorème de Jordan-Dirichlet, f admet un unique développement de la forme*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx}\,,$$
$$\textit{resp.}\ \ f(x) = a_0 + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + b_n\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\right)\,,$$

en tout point où f est continue (on parle de développement en série trigonométrique), et ce développement est la série de Fourier de f, i.e. $c_n = c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $a_n = a_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $b_n = b_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Corollaire 3.1. *Sous les hypothèses du théorème de Jordan-Dirichlet, il suffit de changer la valeur de f aux points de discontinuité (en nombre fini sur une période) et d'imposer en ces points que*

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0))$$

pour assurer que f est partout égale à sa série de Fourier.

Remarque 3.4. *Le théorème ci-dessus montre que tout moyen est bon pour trouver la série de Fourier de f. S'il en existe de plus simples que le calcul des coefficients, il ne faut pas hésiter, on trouvera la bonne série. On peut à titre d'exemple calculer la série de Fourier de $sin(3x)$.*

Le théorème d'unicité se démontre très facilement dans le cas où on a convergence uniforme de la série. On suppose que la série trigonométrique converge uniformément et on calcule les coefficients de Fourier de la série. On remarque au passage que la fonction f est nécessairement continue sur $\mathbb{R}$ dans un cas pareil. On peut énoncer cette propriété qui est importante et qui est une conséquence directe de théorèmes classiques sur les séries de fonctions :

Proposition 3.6. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, périodique de période $T > 0$. Si la série de Fourier de f converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors f est continue sur $\mathbb{R}$.*

On a une réciproque importante à cette propriété :

Théorème 3.3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, périodique de période $T > 0$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors sa série de Fourier converge uniformément sur $\mathbb{R}$.*

On a un autre théorème important qui est en fait un résultat de convergence de la série de Fourier et qui est vrai sous des hypothèses plus faibles que le théorème de Jordan-Dirichlet.

Théorème 3.4 (Egalité de Parseval)**.** *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, périodique de période $T > 0$, de carré intégrable sur une période (on écrira simplement $f \in L^2_T(\mathbb{R})$), alors*

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{L^2_T} &= \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} |f(x)|^2 \mathrm{d}x \\
&= |\langle f, \phi_0\rangle|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(|\langle f, \phi_n\rangle|^2 + |\langle f, \psi_n\rangle|^2\right) \\
&= |a_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle f, \chi_n\rangle|^2 \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 .
\end{aligned}$$

Remarque 3.5. *Considérons la somme partielle de la série de Fourier de f*

$$\begin{aligned}
S_f^N(x) &= a_0(f) + \sum_{n=0}^{N} (a_n(f)\phi_n(x) + b_n(x)\psi_n(x)) \\
&= \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\chi_n(x) .
\end{aligned}$$

Du fait de l'orthonormalité des familles $\{\phi_0\,,\ \phi_n\,,\ \psi_n\,;\ n \in \mathbb{N}^*\}$ et $\{\chi_n\,;\ n \in \mathbb{Z}\}$, on a

$$\|S_f^N\|^2_{L^2_T} = |a_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{N} \left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right) = \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 .$$

On voit donc que le théorème ci-dessus dit d'une part que si $f \in L^2_T(\mathbb{R})$, sa série de Fourier est absolument convergente pour la norme $\|.\|_{L^2_T}$ (i.e. la série des normes est convergente). En admettant que $L^2_T(\mathbb{R})$ est un espace de Banach, ceci implique que la série de Fourier de f converge dans cet espace et sa norme est alors exactement

$$\begin{aligned}
\|S_f\|^2_{L^2_T} &= |\langle f, \phi_0\rangle|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(|\langle f, \phi_n\rangle|^2 + |\langle f, \psi_n\rangle|^2\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle f, \chi_n\rangle|^2 .
\end{aligned}$$

Le théorème nous dit donc que

$$\|S_f^N\|_{L^2_T} = \|f\|_{L^2_T} .$$

Il y a en fait un résultat plus fort donné par le théorème suivant. Ce type de convergence sera justifié dans le cours sur les espaces de Hilbert. En fait, aussi bien l'égalité *de Parseval que le théorème de Dirichlet sont simplement la décomposition d'un vecteur sur une base dans un espace. Même s'il s'agit ici d'un espace de Hilbert, de dimension infinie, l'idée n'est pas plus difficile que la décomposition dans* $\mathbb{R}^3$ *d'un vecteur sur une base orthonormale et l'écriture du carré de sa norme euclidienne comme la somme des carrés de ses composantes.*

Théorème 3.5 (de Dirichlet)**.** *Soit* $f \in L^2_T(\mathbb{R})$*, alors*

$$\lim_{N \to +\infty} \|f - S_f^N\|_{L^2_T} = 0\,,$$

c'est-à-dire que **la série de Fourier de f converge dans $L^2_T(\mathbb{R})$ vers f***.*

Remarque 3.6. *La convergence ci-dessus peut paraître surprenante alors qu'on a vu dans le théorème de Jordan-Dirichlet que la série de Fourier de* f *ne converge pas vers* f *en tout point. Il n'y a pas de contradiction. La convergence dans* L^2_T *est conrôlée par une norme qui est une intégrale. Pour cette norme, la valeur en des points isolés n'a aucune importance. La convergence dans* L^2_T *n'assure pas une convergence en tout point mais en presque tout point. Ces notions seront vues dans le cours d'intégration.*

3.8 Intégration et dérivation d'une série de Fourier

Sous certaines hypothèses, on a des relations simples entre les coefficients de Fourier forme complexe d'une fonction et de sa dérivée.

Proposition 3.7. *Soit* f *une fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, de classe* $\mathcal{C}^1$*, périodique de période* $T > 0$*, alors on a*

$$c_n(f') = i\frac{2\pi}{T} n c_n(f)\,.$$

Preuve. Il s'agit simplement d'une intégration par parties. Les hypothèses sur f rendent une telle opération licite. Les termes de bord disparaissent du fait de la périodicité. □

Si on veut intégrer une fonction, les choses sont plus délicates ; il faut s'assurer que sa primitive est encore périodique.

Proposition 3.8. *Soit* f *une fonction continue sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, périodique de période* $T > 0$*. On considère* g *une primitive de* f *sur* $\mathbb{R}$ *et on suppose que* g *est également périodique de période* T *(ce qui équivaut à dire que la moyenne de* f *sur une période est nulle), alors on a*

$$c_n(g) = \frac{c_n(f)T}{i2\pi n}\,,\ \forall n \in \mathbb{Z}^*$$

et $c_0(g)$ *est la moyenne de* g *sur une période.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente. □

On remarque tout de même que pour que la relation ci-dessus ait un sens, il vaut mieux avoir $c_0(f) = 0$, i.e. f est de moyenne nulle. On a le résultat général suivant qui assure qu'on a bien $c_0(f) = 0$ et qui dit un peu plus.

Proposition 3.9. *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, périodique de période $T > 0$. On considère g une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) f est de moyenne nulle ;

(ii) g est périodique de période T.

Preuve. Pour $x \in \mathbb{R}$ quelconque, on a

$$g(x+T) - g(x) = \int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t \,.$$

On voit donc que g est périodique de période T si et seulement si pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\mathrm{d}x = 0\,,$$

i.e. si et seulement si f est de moyenne nulle. □

En combinant ces résultats et le théorèmes de dérivation et d'intégration terme à terme des séries de fonctions, on peut en déduire des résultats de dérivation et d'intégration terme à terme des séries de Fourier en spécifiant simplement des hypothèses sur la fonction f.

Théorème 3.6 (Dérivation terme à terme de la série de Fourier)**.** *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, périodique de période $T > 0$. Alors la série de Fourier de f est égale à f et est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. De plus sa dérivée première se calcule en dérivant terme à terme :*

$$\begin{aligned} S_f'(x) = f'(x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} i\frac{2\pi}{T} n c_n(f) e^{i\frac{2\pi}{T}nx}\,, \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-a_n(f)\frac{2\pi}{T}n\sqrt{2}\sin(\frac{2\pi}{T}nx) + b_n(f)\frac{2\pi}{T}n\sqrt{2}\cos(\frac{2\pi}{T}nx) \right)\,. \end{aligned}$$

Preuve. Laissée en exercice. □

Pour l'intégration terme à terme, on peut énoncer le résultat suivant.

Théorème 3.7 (Intégration terme à terme de la série de Fourier)**.** *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, périodique de période $T > 0$, de moyenne nulle. Soit g une primitive de f. Alors la série de Fourier de g se calcule en intégrant celle de f terme à terme :*

$$\begin{aligned} S_g(x) = g(x) &= c_0(g) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{T}{2in\pi} c_n(f) e^{i\frac{2\pi}{T}nx}\,, \\ &= a_0(g) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n(f)\frac{T}{2n\pi}\sqrt{2}\sin(\frac{2\pi}{T}nx) - b_n(f)\frac{T}{2n\pi}\sqrt{2}\cos(\frac{2\pi}{T}nx) \right)\,. \end{aligned}$$

Preuve. C'est une conséquence directe du théorème précédent. □

3.9 Décroissance des coefficients de Fourier

L'idée intuitive est que plus les coefficients de Fourier décroissent vite, plus la fonction est régulière, c'est-à-dire plus on peut la dériver un grand nombre de fois.

Commençons par une première estimation des coefficients de Fourier d'une fonction qui est simplement continue par morceaux.

Proposition 3.10. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période $T > 0$, intégrable sur une période. Alors la suite de ses coefficients de Fourier est bornée. Plus précisément, on a*

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} |f(x)|\mathrm{d}x\,.$$

A noter qu'on a également pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} |a_n(f)| &\leq \frac{\sqrt{2}}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} |f(x)|\mathrm{d}x\,, \\ |b_n(f)| &\leq \frac{\sqrt{2}}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} |f(x)|\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Preuve. C'est immédiat. On écrit

$$\begin{aligned} |c_n(f)| &= \left|\frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(t)e^{i\frac{2\pi}{T}x}f(x)\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} \left|e^{i\frac{2\pi}{T}x}\right| |f(x)|\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} |f(x)|\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

La preuve est analogue pour la forme réelle. □

Nous avons donc d'une part ce résultat qui nous dit que

$$f \in L^1(]0,T[) \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{N})\,,\ (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^\infty(\mathbb{N}^*)\,,\ (c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{Z})\,.$$

Si maintenant on considère des fonctions plus régulières, on va pouvoir établir des décroissances plus fortes.

Théorème 3.8. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, périodique de période $T > 0$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*

$$|c_n(f)| \leq \frac{C}{n^k}\,,\ |c_{-n}(f)| \leq \frac{C}{n^k}\,,\ |a_n(f)| \leq \frac{C}{n^k}\,,\ |b_n(f)| \leq \frac{C}{n^k}\,.$$

Preuve. On fait k intégrations par parties successives. La régularité de la fonction le permet. Les termes de bord disparaissent du fait de la périodicité. On obtient pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$c_n(f) = \frac{T^k}{(i2\pi n)^k}c_n(f^{(k)}$$

et donc

$$|c_n(f)| \leq \frac{T^k}{(2\pi)^k}\frac{1}{n^k}\frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} |f^{(k)}(x)|\mathrm{d}x\,.$$

La preuve est analogue pour les trois autres inégalités. □

Il est intéressant de pouvoir lire directement la régularité de la fonction sur ses coefficients de Fourier. On a malheureusement une perte d'information du fait du cadre dans lequel nous travaillons ; ceci empêche d'écrire des équivalences, il faudrait pour cela travailler dans des espaces de Sobolev qui sont plus compliqués que les espaces $\mathcal{C}^k$.

Théorème 3.9. *Soit $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite dans $\mathbb{C}$, on suppose qu'il existe une constante $C > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que*

$$|c_n| \leq \frac{C}{|n|^{k+2}} \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}^*\,,$$

alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la série

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$$

est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.

On a un résultat analogue pour la forme réelle. Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites dans $\mathbb{C}$, on suppose qu'il existe une constante $C > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$|a_n| \leq \frac{C}{|n|^{k+2}}\,,\ |b_n| \leq \frac{C}{|n|^{k+2}}\,,\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*\,,$$

alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la série

$$f(x) = a_0 + \sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left[a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\right]$$

est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.

Preuve. Il s'agit d'une application du théorème de dérivation des séries de fonctions. On peut dériver tant qu'il reste un puissance de n supérieure à 2 au dénominateur pour assurer la convergence normale. □

3.10 Exercices

Exercice 3.1. Donner un exemple de fonction périodique qui n'est pas paire et dont la série de Fourier est paire. Peut-on trouver une fonction périodique paire dont la série de Fourier converge simplement sur $\mathbb{R}$ et n'est pas paire?

Exercice 3.2. Soit f une fonction périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ mais non continue sur $\mathbb{R}$. Quitte à changer un nombre fini de valeurs de f sur une période, on suppose qu'aux points de discontinuite $f(x) = (f(x-0)+f(x+0))/2$ et que ceci ne rend pas f continue sur $\mathbb{R}$. Sa série de Fourier converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$? Converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$? Converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3.3. Soit $f \in L^2_1(\mathbb{R})$ définie par $f(x) = x$ pour $x \in [0,1]$.

1. Déterminer les coefficients de Fourier de f dans leur forme complexe.

2. Ecrire la série de Fourier de f comme une somme de fonctions réelles.

3. Calculer
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

4. Calculer
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 3.4. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f \in L^2_{2\pi}$ la fonction définie par $f(t) = e^{iat}$, $t \in]-\pi, \pi]$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f sous leur forme complexe.

2. Si $a \notin \mathbb{Z}$, calculer
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(a-n)^2}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^2-n^2}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n-a)^2} + \frac{1}{(n+a)^2} \right).$$

Exercice 3.5. Soit $0 < a < \pi/2$, on considère la fonction 2π-périodique et impaire définie par
$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur} \quad]0, 2a[\,, \\ 0 & \text{sur} \quad [2a, \pi[\,. \end{cases}$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier de f_a sous forme réelle.

2. Calculer les sommes des séries suivantes :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^4(na)}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^3(na)}{n}.$$

Exercice 3.6. Soit la fonction $f(x) = x - E(x)$. Déterminer sa série de Fourier, dire si elle converge simplement et si oui vers quelle fonction. Quelles séries peut-on calculer à l'aide du théorème de Jordan-Dirichlet et de l'égalité de Parseval?

Exercice 3.7. Soit $r \in \mathbb{R}$ et la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par $c_n = 0$ pour $n < 0$ et $c_n = r^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. On considère la série
$$S(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}.$$

1. Sur quels domaines converge-t-elle simplement, uniformément, normalement?

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $r \in]-1,1[$ on a

$$r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-int}}{1-re^{it}}\mathrm{d}t\,.$$

Exercice 3.8. Soit $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ et soit $(c_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des coefficients de Fourier de f dans leur forme complexe. Pour $N \in \mathbb{N}$ on pose

$$S_N(x) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{N}\left(c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx}\right)\,.$$

1. Montrer que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S_N(x)|^2\mathrm{d}x = |c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{N}\left(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2\right)\,.$$

2. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} (f(x) - S_N(x))\overline{S_N(x)}\mathrm{d}x = 0$$

Exercice 3.9. Démontrer le Théorème 3.6.

Exercice 3.10.

- Existe-t-il une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in]0,\pi[$ on ait

$$\sin x = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cos(nx)\,?$$

- Existe-t-il une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in]-\pi,\pi[$ on ait

$$\sin x = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cos(nx)\,?$$

- Existe-t-il une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in]-\pi,\pi[$ on ait

$$\cos x = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \sin(nx)\,?$$

Exercice 3.11. Déterminer la série de Fourier de la fonction sinus.

Exercice 3.12. Soit la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x^2$ sur $]-\pi,\pi]$.

1. Développer f en série de Fourier.

2. Calculer les sommes des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\,, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\,, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\,, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}\,, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}\,.$$

Exercice 3.13. Soit la série

$$S(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \ln(1+n^2) e^{n(ix-1)}\,.$$

1. Quel est son domaine de convergence simple, normale?
2. Montrer que sa somme est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur ce domaine.

Exercice 3.14. On considère les fonctions 2π périodiques suivantes :

- $f_1(x) = \cos x$;
- $f_2(x) = 1 + cos(2x)$;
- f_3 paire, $f_3(x) = x^2$ sur $[0, \pi[$;
- $f_4(x) = x$ sur $]-\pi, \pi[$.

1. Pour chacune des quatre fonctions f_i, dire si sa primitive F_i s'annulant en 0 peut être développée en série de Fourier sur $\mathbb{R}$ et si on peut utiliser le théorème 3.7 pour calculer ce développement.
2. Pour les fonctions pour lesquelles la réponse à la première question est positive, calculer les développements en série de Fourier de F_i et de f_i. Le résultat correspond-il à la conclusion du théorème 3.7?

Exercice 3.15. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T > 0$, intégrable sur une période. On suppose que $c_n(f) = O(e^{-|n|})$. Montrer que la somme de la série de Fourier de f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.16. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et T-périodique. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que la série suivante converge :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{c_n(f)}{\sqrt{1+n^2}}\,.$$

Exercice 3.17. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite définie par

$$c_n = \frac{1}{1+n^4}\,.$$

On considère la série trigonométrique

$$S(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}\,.$$

1. La série converge-t-elle sur $\mathbb{R}$?
2. Sa somme S est-elle une fonction réelle? imaginaire pure? paire? impaire?
3. Montrer que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 4

Résolution d'équations

4.1 Solutions périodiques d'équations différentielles ordinaires, séries de Fourier

4.1.1 Méthode générale

On considère des équations différentielles à coefficients constants avec un second membre périodique. Les séries de Fourier fournissent une méthode générale pour trouver une solution particulière périodique de ces équations, la solution générale peut alors être obtenue en ajoutant la solution générale de l'équation homogène. Nous expliquons la méthode dans le cas d'une équation d'ordre 2 :

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)\,, \tag{4.1}$$

où a et b sont des nombres réels ou complexes fixés et f est une fonction périodique de période $T > 0$ sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On cherche une solution y périodique de période T. Comme y sera de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$, on peut la développer en série de Fourier ainsi que ses deux première dérivées dont les séries de Fourier s'obtiennent par dérivations terme à terme successives à partir de celle de f.

On utilise la forme complexe qui est plus facile à manipuler pour ce type de questions. On décrit la méthode dans le cas où $T = 2\pi$ par souci de simplicité des formules.

- **Etape 1.** On développe f en série de Fourier sous forme complexe :

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt}\,. \tag{4.2}$$

- **Etape 2.** On écrit le développement en série de Fourier de y, y' et y'' sous forme complexe :

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}\,, && (4.3)\\
y'(t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} inc_n e^{int}\,, && (4.4)\\
y''(t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-n^2)c_n e^{int}\,,. && (4.5)
\end{aligned}
$$

- **Etape 3.** On remplace (4.2)-(4.5) dans l'équation (4.1) et on calcule les c_n :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-n^2+ian+b)c_n e^{int} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n e^{int}\,.$$

On voit que s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $-n_0^2 + ian_0 + b = 0$ et si le coefficient γ_{n_0} est non nul, alors on ne peut pas résoudre et l'équation (4.1) n'admet pas de solution périodique. Dans le cas contraire, qui se décompose en les deux cas suivants :

1. l'équation $-r^2 + iar + b = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$,
2. si l'équation $-r^2 + iar + b = 0$ admet une solution dans $\mathbb{Z}$, ou même deux, les coefficients γ_n associés sont nuls,

alors on peut résoudre et on a

$$
\begin{gathered}
c_n = \frac{\gamma_n}{-n^2+ian+b} \text{ si } -n^2+ian+b \neq 0\,,\\
c_n \text{ quelconque si } -n^2+ian+b = 0\,.
\end{gathered}
$$

4.1.2 Exemple

On cherche les solutions périodiques de période 2π de l'équation différentielle

$$f'' + 2f' + f = \sin x\,.$$

Tout d'abord, la théorie générale des équations différentielles nous dit que les solutions sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donc si f est une solution 2π-périodique, on peut la développer en série de Fourier et on peut dériver la série de Fourier terme à terme. Soit donc f une telle solution, on l'écrit sous forme de série de Fourier complexe

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}\,.$$

De plus, on a

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} inc_n(f)e^{inx}\,,\\
f''(x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (in)^2 c_n(f)e^{inx}\,.
\end{aligned}
$$

On peut donc écrire l'équation sous la forme

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left((-n^2+2in+1)c_n(f)\right) e^{inx} = \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\,.$$

En utilisant le théorème d'unicité de la série de Fourier, on obtient une égalité terme à terme :

$$\begin{aligned}(-n^2+2in+1)c_n(f) &= 0 \text{ pour } n\neq 1 \text{ et } n\neq -1\,,\\ -2ic_{-1}(f) &= -\frac{1}{2i}\,,\\ 2ic_1(f) &= \frac{1}{2i}\,.\end{aligned}$$

Comme $1-n^2+2in$ n'est nul pour aucun $n\in\mathbb{Z}$, il suit que

$$c_1(f) = c_{-1}(f) = -\frac{1}{4}\,,\ c_n(f) = 0 \text{ pour } n\neq 1 \text{ et } n\neq -1\,,$$

c'est-à-dire,

$$f(x) = \frac{-1}{4}(e^{ix}+e^{-ix}) = -\frac{1}{2}\cos x\,.$$

On vérifie ensuite que f ainsi donnée est bien solution de cette équation différentielle. On voit que cette équation admet une unique solution 2π périodique. La solution générale de l'équation est donnée comme la somme de la solution générale de l'équation homogène et de la solution périodique qu'on vient de trouver, c'est-à-dire

$$f(x) = (ax+b)e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x\,,\ a,b\in\mathbb{C}\,.$$

Remarque 4.1. *Dans certains cas, la solution générale de l'équation homogène est elle-même périodique. Par exemple*

$$y''+y=0\,.$$

Voir exercice 4.4.

4.2 Résolution de problèmes aux limites par les séries de Fourier

Supposons qu'on cherche à résoudre une équation aux dérivées partielles sur $\mathbb{R}_t\times I$ où I est un intervalle borné de $\mathbb{R}$. Les données du problèmes sont des "données de Cauchy", c'est-à-dire la donnée de la solution à un instant initial, $t=0$ par exemple, et des "conditions aux limites", c'est-à-dire la spécification des valeurs de la solution ou de sa dérivée au bord de l'intervalle I pour tous temps. Selon les conditions aux limites considérées, on pourra parfois représenter le problème considéré comme une recherche de solutions périodiques en espace définies sur $\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}$. La méthode utilise alors les séries de Fourier de façon tout à fait analogue à ce que nous avons fait à la section précédente. Plutôt que de décrire une méthode générale, nous allons traiter deux exemples.

4.2.1 Conditions de Dirichlet homogènes

On considère le problème aux limites pour l'équation de la chaleur sur l'intervalle $[0,\pi]$ avec des conditions de Dirichlet homogènes, c'est-à-dire qu'on impose que la solution soit nulle aux bords de l'intervalle :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times [0,\pi] \ \forall x \in [0,\pi]\,, \\ \phi(0,x) = f(x)\,, \\ \phi(t,0) = \phi(t,\pi) = 0\,, \end{cases} \tag{4.6}$$

où f est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,\pi]$ et qui s'annule en 0 et en π.

L'idée est de prolonger f comme une fonction $\tilde{f}$ impaire, 2π périodique sur $\mathbb{R}$ (ce qui assure en particulier que $f(0) = f(\pi) = 0$), et de chercher une solution ψ impaire et 2π-périodique au problème d'évolution suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,, \\ \psi(0,x) = \tilde{f}(x) \ \forall x \in \mathbb{R}\,. \end{cases} \tag{4.7}$$

Remarque 4.2. *Comme ψ est 2π-périodique et impaire en x, il suit en particulier que $\psi(t,0) = \psi(t,\pi) = 0$ pour tout t, c'est-à-dire que la solution de (4.7) vérifie bien les conditions aux limites. Sa restriction à $\mathbb{R} \times [0,\pi]$ est donc solution de (4.6).*

On développe $\tilde{f}$ en série de Fourier en utilisant la forme réelle qui nous permet facilement d'exprimer que $\tilde{f}$ est impaire. Comme $\tilde{f}$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$, elle est partout égale à sa série de Fourier :

$$\tilde{f}(x) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)\,.$$

On cherche ψ sous la forme d'une série de Fourier en sinus dont les coefficients dépendent de t :

$$\psi(t,x) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(t) \sin(nx)\,. \tag{4.8}$$

On remplace le développement (4.8) dans (4.7) en supposant qu'on peut dériver par rapport à t terme à terme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \sqrt{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n'(t) \sin(nx)\,, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \sqrt{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(t) (\sin(nx))'' = -\sqrt{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(t) n^2 \sin(nx)\,, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \sqrt{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\psi_n'(t) + n^2 \psi_n(t)\big) \sin(nx)\,, && (4.9) \\ \psi(0,x) &= \sqrt{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(0) \sin(nx) = \tilde{f}(x) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)\,. && (4.10) \end{aligned}$$

L'équation (4.9) est équivalente à

$$\psi_n'(t) = -n^2\psi_n(t) \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

et la condition initiale (4.10) équivaut à

$$\psi_n(0) = b_n \ \forall n \in \mathbb{N}^* .$$

On est donc ramené à résoudre le problème de Cauchy pour une infinité d'équations différentielles en t : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\psi_n'(t) = -n^2\psi_n(t)\,,\ \psi_n(0) = b_n\,.$$

Les solutions sont évidentes et données par

$$\psi_n(t) = e^{-n^2t}b_n\,.$$

On obtient donc une expression de la solution de (4.7) sous forme de série de Fourier

$$\psi(t,x) = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2t}b_n\sin(nx)$$

dont la restriction à $x \in [0,\pi]$ nous donne la solution de (4.6).

On constate en particulier que le facteur e^{-n^2t} dans la série de Fourier de la solution assure que la solution est $\mathcal{C}^\infty$ en x pour tout $t > 0$ même si f est simplement continue, par contre pour $t < 0$ les choses se passent nettement moins bien. C'est l'aspect irréversible de l'équation de la chaleur.

Considérons un exemple explicite et vérifions que nous avons effectivement une solution : prenons $f(x) = \sin 2x - sin4x$ sur $[0,\pi]$. Le prolongement $\tilde{f}$ de f en une fonction impaire est 2π périodique est donné par $\tilde{f}(x) = \sin 2x - sin4x$ sur $\mathbb{R}$. On obtient

$$b_2 = -b_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,\ b_n = 0 \text{ pour les autres valeurs de } n\,.$$

Il suit que

$$\psi_2(t) = e^{-4t}\sin(2x) - e^{-16t}\sin(4x)\,.$$

On peut vérifier que sa restriction à $\mathbb{R}\times[0,\pi]$ donne bien une solution du problème aux limites initial.

4.2.2 Conditions de Neumann homogènes

On étudie maintenant le problème aux limites pour l'équation de Schrödinger sur l'intervalle $[0,\pi]$ avec des conditions de Neumann homogènes, c'est-à-dire qu'on impose que la dérivée de la solution soit nulle aux bords de l'intervalle :

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0 \text{ sur } \mathbb{R}\times[0,\pi]\ \forall x\in[0,\pi]\,, \\ \phi(0,x) = f(x)\,, \\ \frac{\partial\phi}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial\phi}{\partial x}(t,\pi) = 0\,, \end{cases} \tag{4.11}$$

où f est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,\pi]$ telle que $f'(0) = f'(\pi) = 0$.

Etant données les conditions aux limites, on choisit cette fois de prolonger f comme une fonction $\tilde{f}$ paire et 2π périodique sur $\mathbb{R}$ et on cherche une solution ψ paire et 2π-périodique au problème d'évolution suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,, \\ \psi(0,x) = \tilde{f}(x) \ \forall x \in \mathbb{R}\,. \end{cases} \tag{4.12}$$

Remarque 4.3. *Si une fonction est paire et dérivable sur $\mathbb{R}$, alors sa dérivée est impaire. Pour le montrer il suffit d'écrire la dérivée comme limite du taux de variation et d'utiliser la parité de f. Donc si une fonction est paire, T-périodique et dérivable sur $\mathbb{R}$, alors on a nécessairement les propriétés suivantes.*

- $f'(0) = 0$ *par parité, en effet*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(-x)-f(0)}{x} = -\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x}\,,$$

  c'est-à-dire que la dérivé de f à gauche en 0 et sa dérivée à droite sont opposées, d'où $f'(0) = 0$. Plus simplement, $f'(0) = 0$ car f' est impaire.

- $f'(T/2) = 0$ *du fait que f' est impaire et T-périodique.*

Dans notre cas, la solution ψ de (4.12) vérifie nécessairement les conditions aux limites et donc sa restriction à $\mathbb{R} \times [0,\pi]$ est bien solution de (4.11).

On développe $\tilde{f}$ en série de Fourier en utilisant la forme réelle. Comme $\tilde{f}$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$, elle est partout égale à sa série de Fourier :

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx)\,.$$

On cherche ψ sous la forme d'une série de Fourier en cosinus dont les coefficients dépendent de t :

$$\psi(t,x) = \psi_0(t) + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(t)\cos(nx)\,. \tag{4.13}$$

On remplace le développement (4.13) dans (4.12) en supposant qu'on peut dériver par rapport à t terme à terme :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n'(t)\cos(nx)\,,$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(t)(\cos(nx))'' = -\sqrt{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(t) n^2\cos(nx)\,,$$

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \big(i\psi_n'(t) + n^2\psi_n(t)\big)\cos(nx)\,, \tag{4.14}$$

$$\psi(0,x) = \psi_0(0) + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(0)\cos(nx) = \tilde{f}(x) = a_0 + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nx)\,. \tag{4.15}$$

L'équation (4.14) est équivalente à

$$\psi_n'(t) = -in^2\psi_n(t)\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

et la condition initiale (4.15) à

$$\psi_n(0) = a_n\ \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

dont les solutions sont :

$$\psi_0(t) = a_0\,,\ \psi_n(t) = e^{-in^2t}a_n\,,\ n \in \mathbb{N}^*\,.$$

On obtient l'expression de la solution de (4.12) sous forme de série de Fourier

$$\psi(t,x) = a_0 + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-in^2t}a_n\cos(nx)$$

dont la restriction à $x \in [0,\pi]$ nous donne la solution de (4.11).

On observe que l'équation de Schrödinger a des propriétés très différentes de l'équation de la chaleur, malgré leurs écritures proches. En effet, le facteur e^{-in^2t} est toujours de module 1, la régularité de la solution à un instant t est donc toujours la même que celle de la donnée initiale f, aussi bien dans le passé que dans le futur (la décroissance avec n des coefficients de Fourier ne change pas lorsque t varie).

4.3 Solutions locales, séries entières

On considère des équations différentielles de la forme

$$p(x)u''(x) + q(x)u'(x) + r(x)u(x) = 0 \tag{4.16}$$

où p, q, r sont des fonctions analytiques, i.e. développables en série entière, dans un certain intervalle I contenant 0, à valeurs réelles. Nous allons chercher des solutions sous forme de série entière (peut-être au prix d'une petite modification) au voisinage de 0. On commence par ré-écrire l'équation (4.16) sous la forme

$$u''(x) + a(x)u'(x) + b(x)u(x) = 0\,, \tag{4.17}$$

où $a = q/p$ et $b = r/p$. Comme p, q, r sont analytiques dans I, elles n'ont que des zéros isolés dans I, d'où a et b n'ont que des singularités isolées et non essentielles (des pôles) dans I.

Définition 4.1 (Points ordinaires et singuliers)**.**

- *On dira que $x_0 \in I$ est un point ordinaire pour (4.17) si x_0 n'est une singularité ni de a ni de b, i.e. si a et b se développent en série entière au voisinage de x_0.*
- *Un point qui n'est pas ordinaire est dit singulier.*

Un type particulier de point singulier va nous intéresser : les points singuliers réguliers.

Définition 4.2 (Points singuliers réguliers et essentiels)**.**

- *Si x_0 est un point singulier pour (4.17), on dira qu'il est régulier si a admet au plus un pôle d'ordre 1 en x_0 et b admet au plus un pôle d'ordre 2 en x_0, i.e. si les fonctions $(x - x_0)a(x)$ et $(x - x_0)^2 b(x)$ se développent en série entière au voisinage de x_0.*
- *Un point singulier qui n'est pas régulier est dit essentiel.*

4.3.1 Au voisinage d'un point régulier

Dans le cas d'un point régulier, on peut trouver une solution au problème de Cauchy en x_0 sous forme de série entière convergente au voisinage de x_0.

Théorème 4.1. *Si x_0 est un point régulier pour (4.17) et si $\delta > 0$ est tel que a et b se développent en série entière dans $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, alors pour tout $u_0 \in \mathbb{C}$ et $u_1 \in \mathbb{C}$, le problème de Cauchy*

$$u''(x) + a(x)u'(x) + b(x)u(x) = 0\,,\ u(x_0) = u_0\,,\ u'(x_0) = u_1\,, \tag{4.18}$$

admet dans $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ une unique solution sous forme de série entière

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n (x - x_0)^n\,. \tag{4.19}$$

La méthode de construction de la solution est de remplacer (4.19) dans l'équation et de calculer les coefficients u_n (sauf les deux premiers qui sont les données de Cauchy) de proche en proche. Nous traitons deux exemples.

- **Exemple 1.** On considère des fonctions a et b polynômiales, dans ce cas on peut prendre $\delta = +\infty$ ce qui revient à résoudre sur $\mathbb{R}$. Prenons l'exemple de l'équation

$$u'' + x^3 u' + x^2 u = 0\,,\ u(0) = 1\,,\ u'(0) = 0\,. \tag{4.20}$$

On cherche la solution u sous la forme

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n\,,\ u_0 = 1\,,\ u_1 = 0\,.$$

On a

$$\begin{aligned} u'' &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)u_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)u_{n+2}x^n\,,\\ x^3u'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n+2} = \sum_{n=3}^{+\infty} n u_{n-2} x^n\,,\\ x^2u(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+2} = \sum_{n=2}^{+\infty} u_{n-2}x^n\,. \end{aligned}$$

L'équation nous dit que la somme des trois séries entières est nulle, ce qui revient à dire que le coefficient de x^n est nul pour tout n, i.e. :

$$\begin{aligned} &n = 0\,, \quad 2u_2 = 0\,,\\ &n = 1\,, \quad 6u_3 = 0\,,\\ &n = 2\,, \quad 12u_4 + u_0 = 0\,,\\ &n \geq 3\,, \quad (n+1)(n+2)u_{n+2} + (n+1)u_{n-2} = 0\,. \end{aligned}$$

La suite des coefficients de la série entière de u est donc donnée par la récurrence suivante

$$u_2 = u_3 = 0\,,\ u_4 = -\frac{1}{12}u_0\,,\ u_n = -\frac{1}{n}u_{n-4}\,,\ n \geq 4\,.$$

Ici comme $u_1 = 0$, seuls les coefficients $u_{4k} = 0$ seront non nuls. Reste à étudier leur comportement pour montrer que la série converge bien sur $\mathbb{R}$:

$$u_{4k} = \frac{(-1)^k}{3(4k)(4(k-1))...(4\times 2)4} = \frac{(-1)^k}{3\times 4^k k!}\,.$$

En particulier on a

$$|u_{4k}| \leq \frac{1}{k!}$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n x^n| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|x^4|^k}{k!} = e^{|x^4|}\,.$$

La série entière définissant u est donc bien convergente sur $\mathbb{R}$ et en particulier normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{R}$. En fait on peut même calculer u explicitement ici :

$$u(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{3 \times 4^k k!} x^{4k} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{+\infty} \big(\frac{-x^4}{4}\big)^k \frac{1}{k!} = \frac{1}{3} e^{-x^4/4} \,.$$

Vérifions que c'est bien la solution de (4.20) :

$$\begin{aligned} u' &= -\frac{x^3}{3} e^{-x^4/4} \,, \\ u'' &= \Big(-x^2 + \frac{x^6}{3} \Big) e^{-x^4/4} \,, \\ u'' + x^3 u' + x^2 u &= 0 \,, \ u(0) = 1 \,, \ u'(0) = 0 \,. \end{aligned}$$

- **Exemple 2.** Nous considérons cette fois-ci des fonctions a et b analytiques sur $\mathbb{R}$ qui se développent en série entière au voisinage de 0 mais qui ne sont pas des polynômes :

$$u'' + \frac{4x}{1+x^2} u' + \frac{2}{1+x^2} u = 0 \,, \ u(0) = u_0 \,, \ u'(0) = u_1 \,. \tag{4.21}$$

Les fonctions

$$a(x) = \frac{4x}{1+x^2} \text{ et } b(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

se développent en série entière au voisinage de 0 avec un rayon de convergence égal à 1.

Encore une fois, on cherche la solution u sous la forme

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \,, \ u_0 = 1 \,, \ u_1 = 0 \,.$$

Pour faire les calculs, il est plus facile d'écrire l'équation sous la forme

$$(1 + x^2) u'' + 4x u' + 2u = 0 \,.$$

On voit que même si a et b ne sont pas des polynômes, comme ce sont des fractions rationnelles, on peut se ramener à travailler avec une équation dont les coefficients sont des polynômes et on n'a pas besoin d'utiliser les séries entières de a et de b.

On a

$$\begin{aligned}
u'' &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)u_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)u_{n+2}x^n\,, \\
x^2u'' &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)u_n x^n\,, \\
(1+x^2)u'' &= 2u_2 + 6u_3 x + \sum_{n=2}^{+\infty}\big(n(n-1)u_n + (n+1)(n+2)u_{n+2}\big)x^n\,, \\
4xu'(x) &= 4\sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^n\,, \\
2u(x) &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n\,.
\end{aligned}$$

On en déduit que le coefficient de x^n dans $(1+x^2)u'' + 4xu' + 2u$ est donné par

$$\begin{aligned}
&n = 0\,, \quad 2(u_2 + u_0)\,, \\
&n = 1\,, \quad 6u_3 + 4u_1 + 2u_1 = 6(u_3 + u_1)\,, \\
&n \geq 2\,, \quad n(n-1)u_n + (n+1)(n+2)u_{n+2} + 4nu_n + 2u_n \\
&\qquad\quad = (n^2 - n + 4n + 2)u_n + (n+1)(n+2)u_{n+2} \\
&\qquad\quad = (n+1)(n+2)(u_{n+2} + u_n)\,.
\end{aligned}$$

On voit donc que

$$u_{2k} = (-1)^k u_0 \text{ et } u_{2k+1} = (-1)^k u_1\,.$$

La série entière de u est donc donnée par

$$u(x) = u_0 \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{2k} + u_1 \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{2k+1} = u_0 \frac{1}{1+x^2} + u_1 \frac{x}{1+x^2} \text{ pour } |x| < 1\,,$$

le rayon de convergence est 1.

4.3.2 Au voisinage d'un point singulier régulier

Soit x_0 un point singulier régulier, l'équation différentielle (4.18) s'écrit

$$(x - x_0)^2 u''(x) + (x - x_0)A(x)u'(x) + B(x)u(x) = 0\,, \tag{4.22}$$

où $A(x) = (x - x_0)a(x)$ et $B(x) = (x - x_0^2)b(x)$ sont analytiques au voisinage de x_0. La méthode est la suivante.

- **Première étape.** Lorsque x est proche de x_0, on approche l'équation (4.22) par

$$(x-x_0)^2 u''(x) + (x-x_0)A(x_0)u'(x) + B(x_0)u(x) = 0\,. \tag{4.23}$$

La première étape consiste à résoudre cette équation. Pour cela on cherche des solutions sous la forme $u(x) = (x-x_0)^\nu$. Si on reporte cette expression dans (4.23), on obtient l'équation indicielle

$$\nu(\nu-1) + \nu A(x_0) + B(x_0) = 0\,,$$

i.e.

$$\nu^2 + (A(x_0)-1)\nu + B(x_0) = 0\,. \tag{4.24}$$

On note ν_1 et ν_2 les racines (éventuellement confondues et a priori complexes) de (4.24).

- **Deuxième étape.** On construit deux solutions linéairement indépendantes de (4.22). La méthode dépend de la différence $\nu_2 - \nu_1$.

  - **Premier cas : $\nu_1 - \nu_1 \notin \mathbb{Z}$.** On cherche les deux solutions sous la forme

$$\begin{aligned} u_1(x) &= (x-x_0)^{\nu_1} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (x-x_0)^k\,, \\ u_2(x) &= (x-x_0)^{\nu_2} \sum_{k=0}^{+\infty} d_k (x-x_0)^k\,. \end{aligned}$$

  - **Second cas : $\nu_2 - \nu_1 \in \mathbb{Z}$.** Du fait que les fonctions A et B sont à valeurs réelles, si les solutions ν_1, ν_2 de (4.24) sont complexes alors elles sont complexes conjuquées et leur différence ne peut pas être un entier. On a donc forcément que ν_1 et ν_2 sont réelles. Quitte à échanger ν_1 et ν_2, on suppose que $\nu_1 \leq \nu_2$. On cherche alors les solutions sous la forme

$$\begin{aligned} u_1(x) &= (x-x_0)^{\nu_1} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (x-x_0)^k\,, \\ u_2(x) &= (x-x_0)^{\nu_2} \sum_{k=0}^{+\infty} d_k (x-x_0)^k + \alpha u_1(x)\log(x-x_0)\,. \end{aligned}$$

4.4 Exercices

Exercice 4.1. On considère l'équation différentielle

$$y'' - 3y' + 2y = \cos^2 x + \sin(4x)\,. \tag{4.25}$$

1. Trouver une solution 2π périodique de (4.25).

2. Trouver la solution générale de (4.25).

Exercice 4.2. On considère l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + y = \sin^3 x \,. \tag{4.26}$$

1. Trouver une solution 2π périodique de (4.26).
2. Trouver la solution générale de (4.26).

Exercice 4.3. Déterminer la solution du problème aux limites suivant, pour l'équation des ondes (aussi appelée équation des cordes vibrantes en dimension 1 d'espace) avec conditions de Dirichlet homogènes :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times [0,\pi] \; \forall x \in [0,\pi]\,, \\ \phi(0,x) = 4\sin(2x)\,, \; \frac{\partial\phi}{\partial t}(0,x) = \sin x - \sin(2x)\,, \\ \phi(t,0) = \phi(t,\pi) = 0\,. \end{cases}$$

Exercice 4.4. Trouver une solution périodique, si elle existe, à l'équation différentielle

$$y''(x) + y(x) = \cos(kx)\,, \; k \in \mathbb{N} \text{ fixé}\,.$$