

L3 Mathématiques – Analyse fonctionnelle

Feuille 1

Exercice 1. Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, exprimer le produit scalaire $\langle x, y \rangle$ en n'utilisant que la norme associée.

Même question pour H espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$.

Exercice 2. Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$. Soit x et y deux éléments de H non nuls. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|x\| \leq \|x + \lambda y\|.$$

Exercice 3. Soit H un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de H . Montrer que F est un sous-espace de Hilbert de H .

Exercice 4. Soit $n \geq 1$ et $x_0 \in \mathbb{C}$. Pour tous polynômes $P, Q \in E = \mathbb{C}_n[X]$, on pose $\langle P, Q \rangle := \sum_{k=0}^n P^{(k)}(x_0) \overline{Q^{(k)}(x_0)}$. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .

Exercice 5. Soit $n \geq 2$. Pour toutes matrices $M, N \in E := \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\langle M, N \rangle := \operatorname{tr}({}^t M \bar{N}).$$

1. Exprimer $\langle \cdot, \cdot \rangle$ à l'aide des coefficients matriciels.
2. Montrer (de deux façons) que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .
3. Montrer que pour toutes $M, N \in E$, $\langle M, N \rangle = \langle {}^t \bar{N}, {}^t M \rangle$.

Exercice 6. On munit $\mathbb{C}^3$ du produit scalaire suivant

$$\langle u, v \rangle = {}^t u A \bar{v} \text{ où } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Utiliser le procédé de Gram-Schmidt pour orthonormaliser la base canonique de E .

Exercice 7. On se place sur $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire suivant

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + 4u_2 v_2 + 2u_3 v_3.$$

Soit le sous-espace vectoriel

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}.$$

Déterminer $F^\perp$.

Exercice 8. On munit $E := \mathbb{C}_2[X]$ du produit scalaire : pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$\langle P, Q \rangle := \int_0^1 P(x)Q(x)dx.$$

Utiliser le procédé de Gram-Schmidt pour orthonormaliser la base canonique de E .

Exercice 9. Soit E un espace préhilbertien complexe. Soit $f : E \rightarrow E$ linéaire telle que $f(x) \perp x$, pour tout $x \in E$. Montrer que pour tous $x, y \in E$, $f(x) \perp y$, puis que f est nulle. Que dire dans le cas réel ?

Exercice 10. Soit H un espace de Hilbert et A et B deux parties de H . Démontrer les propriétés suivantes :

1. Si $A \subset B$ alors $B^\perp \subset A^\perp$;
2. $A^\perp = \overline{A}^\perp$;
3. $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$;
4. $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H et $H = \overline{\text{Vect}(A)} \oplus A^\perp$;
5. $(A^\perp)^\perp = \overline{\text{Vect}(A)}$;
6. $\text{Vect}(A)$ est dense dans H si et seulement si $A^\perp = \{0\}$.

Exercice 11. On considère l'espace $l^2(\mathbb{N})$ des suites complexes $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|^2 < +\infty.$$

Pour $u, v \in l^2(\mathbb{N})$, on définit

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \overline{v_n}. \quad (1)$$

1. Montrer que $\langle u, v \rangle$ est bien défini pour tout $u, v \in l^2(\mathbb{N})$.
2. Montrer que $l^2(\mathbb{N})$ est un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$.
3. Donner une base Hilbertienne de $l^2(\mathbb{N})$.
4. Soit F le sous-espace de $l^2(\mathbb{N})$ des suites dont les termes de rang pair sont nuls et dont seul un nombre fini de termes est non nul.
 - (a) F est-il un sous-espace de Hilbert de $l^2(\mathbb{N})$? Quelle est la dimension de F ?
 - (b) Déterminer $F^\perp$ puis $(F^\perp)^\perp$.

Exercice 12. Soit H un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel fermé de H de dimension infinie admettant une base Hilbertienne $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Exprimer la projection sur $F^\perp$ de $x \in H$.

Exercice 13. Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 2]$ à valeurs complexes muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{[0,2]} f(x) \overline{g(x)} dx .$$

Montrer que E est un espace pré-hilbertien de dimension infinie non complet. On pourra considérer une suite de Cauchy dans E qui converge vers une fonction discontinue sur $[0, 2]$, par exemple

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{pour } x \in [0, 1] , \\ 1 - (x - 1)^n & \text{pour } x \in]1, 2] , \end{cases}$$

ou un autre exemple que vous contruiriez.