

L3 Mathématiques – Analyse fonctionnelle

Feuille 2

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, on considère le premier quadrant fermé

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}.$$

Déterminer la projection sur C d'un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ quelconque.

Exercice 2. Soit H un espace de Hilbert, soit B la boule unité de H . Montrer l'existence de la projection sur B et la déterminer.

Exercice 3. Soit $E = l^2(\mathbb{N})$ construit sur $\mathbb{R}$ et muni du produit scalaire usuel. On considère dans E l'ensemble

$$C = \{u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}; u_{2k} \geq 0 \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

1. Montrer que C est une partie convexe fermée de E .
2. Déterminer la projection sur C d'un élément u de E .

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle A, B \rangle = \int_{[-1,1]} A(x)B(x)dx.$$

Soit F le sous-espace vectoriel de E des polynômes impairs.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel fermé de E .
2. Déterminer la projection orthogonale sur F .

Exercice 5. H un espace de Hilbert, F et G deux sous-espaces vectoriels fermés et non réduits à $\{0\}$ de H , P_F et P_G les projections orthogonales respectives sur F et G .

1. Montrer que si F et G sont orthogonaux, $F + G$ est fermé.
2. Montrer que si $P_F + P_G$ est une projection, alors elle est orthogonale.
3. Montrer que $P_F + P_G$ est une projection si et seulement si F et G sont orthogonaux.

Exercice 6. Dans chacun des cas suivants, décrire explicitement le projecteur P_F sur le sous-espace vectoriel F de H .

1. $H = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - 2y = 0\}$;
2. $H = \mathbb{R}^3$, $F = \text{Im}(A)$ où A est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Soit H un espace de Hilbert et $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormale. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une base Hilbertienne ;
2. si pour un $x \in H$ donné on a $\langle x, e_n \rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $x = 0$;
3. pour tout $x \in H$, on a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|x\|^2.$$

Exercice 8 (distance à une droite ou à un plan). Calculer la distance d'un point à une droite (dans le plan) et d'un point à un plan (dans l'espace).

Exercice 9 (distance à un hyperplan). Soit $E = \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, muni de son produit scalaire usuel. Soit $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Soit $H := \{(x_1, \dots, x_n) \in E : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$ et $\mathcal{H} := \{(x_1, \dots, x_n) \in E : a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_{n+1} = 0\}$.

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E dimension $n-1$. Un tel sous-espace est appelé un hyperplan.
2. Soit $B(x_1(B), \dots, x_n(B)) \in \mathcal{H}$. Montrer que $\mathcal{H} = B + H$. On dit alors que $\mathcal{H}$ est un hyperplan affine de direction H .
3. Soit $M(x_1(M), \dots, x_n(M)) \in E$. Calculer $d(M, \mathcal{H}) := \inf_{u \in \mathcal{H}} \|M - u\|$.
4. Calculer $d(M, H^\perp)$.

Exercice 10. Soit $E := \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle M, N \rangle := \text{tr}(M^t N)$ pour tous $M, N \in E$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) et $F := \{M \in E : \text{tr } M = 0\}$.

1. Rappeler la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
3. Trouver les projetés orthogonaux de $M \in E$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer que pour tout $M \in E$,

$$(d(M, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})))^2 = \frac{-1}{4} \text{tr}((M - {}^t M)^2).$$

5. Trouver la dimension de F , puis identifier $F^\perp$, à moins que vous ne trouviez que c'est plus naturel dans l'autre sens.
6. Décomposer $M \in E$ dans $F \oplus F^\perp$.
7. Calculer, pour tout $M \in E$, $d(M, F)$ à l'aide de 6., puis retrouver le résultat grâce à l'exercice 9.