

L3 Mathématiques – Analyse fonctionnelle

Feuille 3

Exercice 1. Déterminer la série de Fourier de la fonction sinus.

Exercice 2. On considère dans $H = \mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ la famille de fonctions

$$\mathcal{F} := \{1, \cos(nt), n \in \mathbb{N}^*, \sin(mt), m \in \mathbb{N}^*\}.$$

1. Montrer qu'il s'agit d'une famille orthogonale.
2. Calculer la norme de chaque élément de $\mathcal{F}$.
3. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ normalisée est une base Hilbertienne de H , en utilisant le résultat du cours disant que la famille $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}, n \in \mathbb{Z} \right\}$ est une base Hilbertienne de H .
4. Retrouver alors l'expression de la série et des coefficients de Fourier sous forme réelle, d'une fonction $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^2(\mathbb{R})$ et 2π -périodique.

Exercice 3.

- Existe-t-il une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in]-\pi, \pi[$ on ait

$$\sin x = a_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n \cos(nx) ?$$

- Existe-t-il une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in]0, \pi[$ on ait

$$\sin x = a_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n \cos(nx) ?$$

- De même peut-on écrire, pour $x \in]0, \pi[$, $\cos x$ comme une série de la forme

$$\cos x = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n \sin(nx) ?$$

Et sur $]0, 2\pi[$?

Exercice 4. Soit f une fonction 2π -périodique de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que les coefficients de Fourier de f vérifient

$$|c_n(f)| \leq \frac{C}{|n|^k}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Exercice 5 (Une réciproque partielle de l'exercice précédent). Soit $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^2(\mathbb{R})$ une fonction 2π -périodique. On suppose qu'il existe $C > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ telle que les coefficients de Fourier de f vérifient

$$|c_n(f)| \leq \frac{C}{|n|^{k+2}}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrer qu'alors la série de Fourier de f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. On considère la série $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{2int}}{n^3}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Étudier la convergence de la série.
2. Que dire de la continuité de la fonction f .
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer, avec un minimum de calculs, les coefficients Fourier de f .

Exercice 7. Soit f la fonction 2π -périodique définie par $f(x) = x$ pour $x \in [0, 2\pi[$.

1. Déterminer les coefficients de Fourier de f dans leur forme complexe.
2. Ecrire la série de Fourier de f comme une somme de fonctions réelles.
3. Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

4. Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 8. Soit $a \in \mathbb{R}$ et f la fonction 2π -périodique définie par $f(t) = e^{iat}$, $t \in]-\pi, \pi]$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f sous leur forme complexe.
2. Si $a \notin \mathbb{Z}$, calculer

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(a-n)^2}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 - n^2}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n-a)^2} + \frac{1}{(n+a)^2} \right).$$