

L3 Mathématiques – Analyse fonctionnelle

Feuille 4

Exercice 1. Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-ax^2}$. On note $\hat{f}$ sa transformée de Fourier.

1. Montrer que $\hat{f}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\hat{f}$ satisfait l'équation différentielle

$$\hat{f}'(t) = -\frac{t}{2a} \hat{f}(t).$$

3. En déduire que

$$\hat{f}(t) = \hat{f}(0) e^{-t^2/4a}.$$

4. Montrer que

$$\hat{f}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-t^2/4a}.$$

Exercice 2. Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes

$$\phi(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]}, \quad \psi(x) = (1 - |x|) \mathbb{1}_{[-1,1]}(x).$$

Exercice 3. On considère la fonction

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

aussi appelée sinus cardinal.

1. Calculer la transformée de Fourier de f en utilisant l'exercice 2.
2. Montrer que $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$.
3. Déduire de la question 1. la valeur de

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx.$$

4. Si on devait calculer la transformée de Fourier de f directement, sans utiliser l'exercice 2, comment ferait-on?

Exercice 4. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors f est continue et bornée sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire de la transformée de Fourier de l'indicatrice de $[0, 1]$?

Exercice 5. Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$. Montrer que l'équation

$$f - f'' = g$$

admet une solution dans $L^2(\mathbb{R})$ et indiquer comment la calculer.

Exercice 6. En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$, montrer qu'il n'existe pas de fonction $\delta \in L^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\delta * f = f \text{ pour tout } f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Résoudre dans $L^1(\mathbb{R})$ l'équation $f * f = f$.

Exercice 7. Soit pour $\alpha > 0$ la fonction $f(x) = e^{-\alpha|x|}$.

1. Calculer la transformée de Fourier de f .
2. En déduire celle de

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

3. Calculer $f * f$ et en déduire la transformée de Fourier de $(g(x))^2$.
4. Déterminer la transformée de Fourier de $x(g(x))^2$.