

Feuille 4 : transformation de Fourier

Exercice 2 :

- Calcul de la transformée de Fourier de $\mathbb{1}_{[-1,1]}$.

$f = \mathbb{1}_{[-1,1]} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ donc sa transformée de Fourier est bien définie et est donnée par l'intégrale

$$\begin{aligned}\hat{f}(t) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) e^{itx} dx = \int_{-1}^1 e^{itx} dx \\ &= \left[\frac{1}{it} e^{itx} \right]_{-1}^1 = \frac{e^{it} - e^{-it}}{it} = 2 \frac{\sin t}{t}\end{aligned}$$

- Calcul de la transformée de Fourier de $g(x) = (1-|x|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$.
La fonction g appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ donc $\hat{g}$ est bien définie

$$\begin{aligned}\hat{g}(t) &= \int_{\mathbb{R}} (1-|x|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x) e^{itx} dx = \int_{-1}^1 (1-|x|) e^{itx} dx \\ &= \int_{-1}^1 e^{itx} dx + \int_{-1}^0 x e^{itx} dx - \int_0^1 x e^{itx} dx \\ &= 2 \frac{\sin t}{t} + \left[x \frac{e^{itx}}{it} \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \frac{e^{itx}}{it} dx \\ &\quad - \left[x \frac{e^{itx}}{it} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{itx}}{it} dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \frac{\sin t}{t} - 2 \frac{\sin t}{t} - \left[\frac{e^{itx}}{-t^2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{e^{itx}}{-t^2} \right]_0^1 \\
&= \frac{1 - e^{-it}}{t^2} + \frac{1 - e^{it}}{t^2} = \frac{2}{t^2} (1 - \cos t)
\end{aligned}$$

Exercice 3.

1. On a vu à l'exercice 2 que

$$\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-1,1]})(t) = 2 \frac{\sin t}{t} = 2f(t)$$

D'après le Théorème 9.8 du cours étendu à des fonctions dans $L^2(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{[-1,1]}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{2 \sin t}{t} e^{-itx} dt \\
&= \frac{1}{\pi} \mathcal{F}\left(\frac{\sin t}{t}\right)(-x)
\end{aligned}$$

Et comme $\mathbb{1}_{[-1,1]}$ est paire, on voit que

$$\hat{f}(t) = \pi \mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$$

2. $|f(x)|^2 = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ fonction continue sur $\mathbb{R}$
 (tend vers 1 en 0)
 donc intégrable sur tout compact de $\mathbb{R}$.

De plus $|f(x)|^2 \leq \frac{1}{x^2}$ donc $|f|^2$ est intégrable au voisinage de l'infini.

Il suit donc que $f \in L^2(\mathbb{R})$. Montrons maintenant que $f \notin L^1(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx &\geq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}^{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \\ &\geq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}^{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{x} dx \\ &\geq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi} \end{aligned}$$

et comme

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi} \sim \frac{\sqrt{2}}{8k} \quad \text{terme général de série divergente,}$$

il suit que $\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty$ et $f \notin L^1(\mathbb{R})$.

3. On sait que pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ on a

$$\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_{L^2}^2$$

On a donc

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (\pi \mathbb{1}_{[-1,1]}(t))^2 dt = \frac{\pi^2}{2\pi} \int_{-1}^1 dt = \pi$$

4. Pour un calcul direct de $\hat{f}$, il faudrait tronquer f sur un compact pour avoir une fonction L^1 puis passer à la limite :

$$\hat{f}(t) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-R,R]}(x) f(x) e^{itx} dx$$

C'est bien une égalité mais le calcul de l'intégrale pour $R > 0$ donné n'est pas forcément simple.

Exercice 4. Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ on a

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{-itx} dt$$

Comme $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, on déduit du théorème de continuité des intégrales à paramètre que l'intégrale est continue sur $\mathbb{R}$, i.e. f est continue sur $\mathbb{R}$. De plus

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

donc f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Comme $\mathbb{1}_{[0,1]}$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que sa transformée de Fourier n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$.