

Feuille 1 - Exercices corrigés

Exercice 11 -

1. La transposée de u est définie par

$$\forall x \in E, \forall l \in E^* \quad \langle {}^t u(l), x \rangle_{E^*, E} = \langle l, u(x) \rangle_{E^*, E}$$

$$u(x) = u(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3)$$

$$= (2x + y) e_1 + (-x + y + 3z) e_2 + (-y + z) e_3$$

On note $\mathcal{E}^* = (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3)$ la base canonique de E^* , duale de $\mathcal{E}$, i.e. $\mathcal{L}_i(e_j) = \delta_{ij}$.

$$\text{Soit } l \in E^*, \quad l = l_1 \mathcal{L}_1 + l_2 \mathcal{L}_2 + l_3 \mathcal{L}_3$$

$$\langle l, u(x) \rangle = l_1 \times (2x + y) + l_2 (-x + y + 3z) + l_3 (-y + z)$$

$$= (2l_1 - l_2)x + (l_1 + l_2 - l_3)y + (3l_2 + l_3)z$$

Donc

$${}^t u(l) = (2l_1 - l_2) \mathcal{L}_1 + (l_1 + l_2 - l_3) \mathcal{L}_2 + (3l_2 + l_3) \mathcal{L}_3$$

autrement dit

$${}^t u(\mathcal{L}_1) = 2\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2, \quad {}^t u(\mathcal{L}_2) = -\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + 3\mathcal{L}_3,$$

$${}^t u(\mathcal{L}_3) = -\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3.$$

2. La matrice de ${}^t u$ dans la base E^* est donc

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

et celle de u dans la base E est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On constate que $B = {}^t A$.

3. $l \in \text{Ker } {}^t u \Leftrightarrow \begin{cases} 2l_1 - l_2 = 0 \\ l_1 + l_2 - l_3 = 0 \\ 3l_2 + l_3 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} l_2 = 2l_1 \\ l_3 = -3l_2 = -6l_1 \\ l_1 + l_2 - l_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} l_2 = 2l_1 \\ l_3 = -6l_1 \\ 9l_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow l = 0 \quad \text{Donc } \text{Ker } {}^t u = \{0\}$$

$$l \in (\text{Im } u)^\circ \Leftrightarrow \forall x \in E \langle l, u(x) \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in E \langle {}^t u(l), x \rangle = 0 \Leftrightarrow {}^t u(l) = 0$$

$$\Leftrightarrow l \in \text{Ker } ({}^t u). \quad \text{Donc } (\text{Im } u)^\circ = \text{Ker } {}^t u = \{0\}.$$

Exercice 15.

1. Supposons que H soit stable par u .

H° est un sous-espace vectoriel de E^* de dimension 1, soit $\{\varphi\}$ une base de H° . Alors φ restreinte à H est nulle, en effet

$$\varphi \in H^\circ \iff \forall x \in H \quad \langle \varphi, x \rangle = 0$$

c'est-à-dire : $\forall x \in H \quad \varphi(x) = 0$.

Comme H est un hyperplan, $\dim H = n-1$ et comme $\varphi \neq 0$, $\dim \text{Ker } \varphi = n-1$, on a donc $\text{Ker } \varphi = H$.

Montrons que φ est un vecteur propre de ${}^t u$.
Considérons une base $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de E telle que $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ soit une base de H .
Soit $x \in E$, $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$
 $= \tilde{x} + x_n e_n$, $\tilde{x} \in H$.

On a

$$\langle {}^t u(\varphi), x \rangle = \varphi(u(x)) = \varphi(u(\tilde{x})) + x_n \varphi(u(e_n))$$

et $u(\tilde{x}) \in H$ car $\tilde{x} \in H$ et H est stable par u ,
donc $\varphi(u(\tilde{x})) = 0$.

On en déduit

$$\langle {}^t u(\varphi), x \rangle = \varphi(u(e_n)) x_n$$

d'autre part $\langle \varphi, x \rangle = \varphi(x) = x_n \varphi(e_n)$
et $\varphi(e_n) \neq 0$ sinon $\varphi = 0$ ce qui est contraire
à l'hypothèse sur φ ($\{\varphi\}$ base de H°).

$$\text{Donc } {}^t u(\varphi) = \frac{\varphi(u(e_n))}{\varphi(e_n)} \varphi, \text{ i.e. } \varphi \text{ vecteur propre de } {}^t u$$

Réciproquement, supposons que $H = \text{Ker } \mathcal{L}$ où $\mathcal{L}$ est un vecteur propre de ${}^t u$.
Soit $x \in H$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u(x)) &= \langle \mathcal{L}, u(x) \rangle \\ &= \langle {}^t u(\mathcal{L}), x \rangle = \langle \lambda \mathcal{L}, x \rangle = \lambda \mathcal{L}(x) = 0\end{aligned}$$

donc $\forall x \in H, u(x) \in \text{Ker } \mathcal{L} = H$, c'est-à-dire que H est stable par u .

2. Soit e un élément non nul de E , on a $u(e)$ proportionnel à e , c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(e) = \lambda e$. Par linéarité on a $u(x) = \lambda x$ pour tout x colinéaire à e .

Considérons une base de E : $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$
il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$u(e_1) = \lambda_1 e_1, \quad u(e_2) = \lambda_2 e_2, \quad u(e_3) = \lambda_3 e_3.$$

Maintenant prenons $e = e_1 + e_2 + e_3$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$u(e) = \lambda e = \lambda e_1 + \lambda e_2 + \lambda e_3$$

mais on a aussi

$$\begin{aligned}u(e) &= u(e_1) + u(e_2) + u(e_3) \\ &= \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3\end{aligned}$$

Par unicité de la décomposition d'un vecteur sur une base, on a $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$. Donc u est l'homothétie de rapport λ .

3. Soit $\varphi \in E^*$, $\varphi \neq 0$. Alors $H = \text{Ker } \varphi$ est un hyperplan de E , donc stable par u .

D'après le 1. il suit que φ est vecteur propre de ${}^t u$, c'est-à-dire que ${}^t u$ laisse stable la droite engendrée par φ .

Donc ${}^t u$ laisse stable toutes les droites de E^* . Par un raisonnement analogue au 2., on en déduit que ${}^t u$ est une homothétie et donc que u est une homothétie.