L3 Mathématiques – Intégration
Feuille 1 – Tribus

Exercice 1 (Dénombrabilité)**.**

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.
2. On veut montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. On le démontre par l'absurde. On suppose donc que $\mathbb{R}$ est dénombrable, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
$$\mathbb{R} = \{x_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}\,.$$
On construit alors les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence de la façon suivante :
   (i) $a_0 = 0$, $b_0 = 1$,
   (ii) $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$ et de plus $x_n \notin [a_{n+1}, b_{n+1}]$.
   (a) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent dans $[0,1]$.
   (b) Utiliser la limite de a_n par exemple pour établir une contradiction.
3. On veut montrer que l'ensemble F des fonctions de $\mathbb{N}$ dans lui-même n'est pas dénombrable. Pour cela on suppose qu'il est dénombrable puis on utilise l'argument diagonal de Cantor. On suppose donc qu'il existe une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathbb{N}$ dans lui-même telle que
$$F = \{\phi_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}\,.$$
On considère alors la fonction $f \ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = \phi_n(n) + 1$. Montrer que cela conduit à une absurdité.

Exercice 2. On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des parties A de $\mathbb{R}$ qui satisfont la propriété suivante :
$$x \in A \quad \text{implique} \quad -x \in A.$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est une tribu.
2. Parmi les ensembles suivants, quels sont ceux qui appartiennent à cette tribu ?
$$\mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ [0,1],\ \mathbb{Q},\ \{x \in \mathbb{R} \mid x^6 - 9x^2 + 1 = 0\},\ \emptyset,\ ]-2,2[.$$

Exercice 3. Soit E un ensemble.

1. Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur E, montrer qu'elle est stable par intersection dénombrable.
2. L'ensemble des parties finies de E est-il une tribu ?

Exercice 4 (Tribu engendrée)**.** Soit E un ensemble.

1. Montrer qu'une intersection quelconque de tribus sur E est une tribu sur E.
2. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$. On note $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ l'intersection de toutes les tribus sur E contenant $\mathcal{A}$ (une partie de E appartient donc à $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ si et seulement si elle appartient à toutes les tribus contenant $\mathcal{A}$, on remarquera qu'il y a toujours au moins une tribu contenant $\mathcal{A}$, c'est la tribu $\mathcal{P}(E)$). Montrer que $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ est la plus petite des tribus contenant $\mathcal{A}$: c'est la tribu engendrée par $\mathcal{A}$.
3. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ inclus dans $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ les tribus engendrées par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Montrer que si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ alors $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.
4. Quelle est la tribu engendrée par un sous-ensemble I de E ? C'est-à-dire déterminer $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ si $\mathcal{A} = \{I\}$.
5. Soit E un ensemble infini et $\mathcal{A} = \{\{x\}, x \in E\}$. Déterminer la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ (distinguer les cas E dénombrable et non dénombrable).
6. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux tribus sur E. Est-ce que $\mathcal{E} \cap \mathcal{F}$ et $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ sont des tribus ?

Exercice 5 (Tribu trace)**.** Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur un ensemble E et $F \subset E$. Montrer que $\mathcal{T}_F = \{A \cap F\,;\ A \in \mathcal{T}\}$ est une tribu sur F : c'est la tribu trace de $\mathcal{T}$ sur F.

Exercice 6. Rappeler les axiomes définissant une topologie. Donner un exemple de topologie qui n'est pas une tribu et de tribu qui n'est pas une topologie.

Exercice 7 (Image directe et réciproque d'une tribu.)**.** Soit X et Y deux ensembles et soit $f : X \to Y$ une application. Soit $\mathcal{T}$ une tribu de Y et $\mathcal{A}$ une tribu sur X.

1. Montrer que $\{f^{-1}(B) \in \mathcal{P}(X)/\ B \in \mathcal{T}\}$ est une tribu de X. On la notera $f^{-1}(\mathcal{T})$.
2. Est-ce que $\{f(B) \in \mathcal{P}(Y)/B \in \mathcal{A}\}$ est une tribu ?
3. Montrer que $\{B \in \mathcal{P}(Y)/\ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur Y. On la note $f(\mathcal{A})$.

Exercice 8. Soit X et Y deux ensembles, $b \in Y$ et $f\ :\ X \to Y$ l'application définie par $f(x) = b$ pour tout $x \in X$.

1. Déterminer $f^{-1}(B)$ pour toute partie B de Y.
2. Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur Y, déterminer $f^{-1}(\mathcal{T})$.

Exercice 9. Soit X un ensemble, $A \subset X$ et $f\ :\ X \to \mathbb{R}$ définie par $f = \mathbb{1}_A$.

1. Déterminer $f^{-1}(B)$ pour toute partie B de $\mathbb{R}$.
2. Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur $\mathbb{R}$, déterminer $f^{-1}(\mathcal{T})$.

Exercice 10. Si X est un ensemble et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-ensemble de X, on rappelle que :

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k; \quad \liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k.$$

On dit que $(A_n)_{n\geq 1}$ tend vers A si :

$$\liminf_{n\to+\infty} A_n = \limsup_{n\to+\infty} A_n = A.$$

1. Que signifie que $x \in \liminf_{n\to+\infty} A_n$?
2. Que signifie que $x \in \limsup_{n\to+\infty} A_n$?
3. Montrer que $\liminf_{n\to+\infty} A_n \subset \limsup_{n\to+\infty} A_n$.
4. Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante, montrer que $\lim_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n$.
5. Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante, montrer que $\lim_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1} A_n$.
6. Déterminer les limites supérieure et inférieure de la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ lorsque :

$$B_{2n-1} = \left]-2 - \frac{1}{n}, 1\right] \text{ et } B_{2n} = \left[-1, 2 + \frac{1}{n^2}\right].$$

7. On pose $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $b_n = 1$.
   (a) Les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent-elles ?
   (b) La suite $[a_n, b_n]$ converge-t-elle ?