

L3 Mathématiques – Intégration

Feuille 2 – Tribu Borélienne et fonctions mesurables

Exercice 1. Montrer que la tribu des Boréliens sur $\mathbb{R}$ est engendrée indifféremment par l'un des sous-ensembles de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ suivants :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1 &= \{]a, b[/ a, b \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{M}_2 = \{]a, b] / a, b \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{M}_3 = \{[a, b] / a, b \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{M}_4 &= \{[a, b[/ a, b \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{M}_5 = \{]-\infty, b[/ b \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{M}_6 = \{]-\infty, b] / b \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{M}_7 &= \{]a, +\infty[/ a \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{M}_8 = \{[a, +\infty[/ a \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Exercice 2 (Exemples de boréliens).

1. Démontrer que $A = \{x \in \mathbb{R}; \exists n \in \mathbb{N}^*, |x - n| < 1/n\}$ est un borélien de $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que les ensembles suivants sont des boréliens de $\mathbb{R}^2$.
 - (a) La diagonale $\Delta = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$.
 - (b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1 \text{ et } x \notin \mathbb{Q}\}$.

Exercice 3. Prouver que les fonctions suivantes sont mesurables (Boréliennes) :

1. la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$;
2. la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} x + 1 & \text{si } x > 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0; \end{cases}$$

3. la dérivée f' d'une fonction dérivable f ;
4. la projection :

$$\begin{aligned}\pi_1 : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y) &\mapsto x.\end{aligned}$$

Exercice 4. Soit $f : (X, \mathcal{S}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable, montrer que $|f|$, $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \min(-f, 0)$ sont mesurables.

Exercice 5. Donner un exemple d'espace mesurable $(E, \mathcal{T})$ et d'application $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ tels que $|f|$ soit mesurable mais pas f .

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ est mesurable. Est-ce que f est mesurable ?

Exercice 7. 1. Fonction constante. Soit $(X, \mathcal{S})$ et $(Y, \mathcal{T})$ deux espaces mesurables, soit $y_0 \in Y$ et soit f la fonction définie sur X à valeurs dans Y par $f(x) = y_0$ pour tout $x \in X$. Montrer que f est mesurable.

2. Fonction indicatrice. Soit $(X, \mathcal{S})$ un espace mesurable et $A \subset X$. Montrer que

$$\begin{aligned} \text{Id}_A : (X, \mathcal{S}) &\longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R})) \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

est mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{S}$.

Exercice 8. Soit $(X, \mathcal{S})$ et $(Y, \mathcal{T})$ deux espaces mesurables.

1. On suppose que $\mathcal{S} = \mathcal{P}(X)$. Quelles applications de X dans Y sont mesurables ?
2. On suppose que $\mathcal{S} = \{\emptyset, X\}$ et $(Y, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Quelles applications de X dans $\mathbb{R}$ sont mesurables ?
3. On suppose que $\mathcal{S} = \sigma(\{A\})$ pour une partie A de X donnée et $(Y, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Quelles applications de X dans Y sont mesurables ?
4. Soit $f : X \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Quelle est la plus petite tribu sur X telle que f soit mesurable ?

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone.

1. Montrer que, pour tout $c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, c])$ est convexe.
2. On admet que les ensembles convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. En déduire que f est mesurable.

Exercice 10. Soit $n \geq 1$. On note f_n l'application de $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe la n -ième décimale de x dans son développement décimal propre. Démontrer que f_n est mesurable.

Exercice 11. On note $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R}; x \in A \implies -x \in A\}$. On rappelle (voir feuille 1) que $\mathcal{A}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{F}_1) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{F}_2)$ définie par $f(x) = x^3$. Vérifier si f est mesurable dans les cas suivant :
 - (a) $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}_2 = \mathcal{A}$.
 - (b) $\mathcal{F}_1 = \mathcal{A}$ et $\mathcal{F}_2 = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
 - (c) $\mathcal{F}_1 = \mathcal{A}$ et $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
 - (d) $\mathcal{F}_1 = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2. Même question avec $g(x) = x^2$.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sauf en un nombre dénombrable de points. On veut montrer que f est Borélienne.

1. Soit A un borélien, montrer que f est Borélienne si et seulement si $f|_A$ et $f|_{A^c}$ sont Boréliennes.
2. Conclure.

Exercice 13 (Mesurable et limite simple de fonctions étagées). On veut montrer que toute fonction mesurable $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow ([0, +\infty], \mathcal{B}([0, +\infty]))$ est limite simple d'une suite croissante de fonctions étagées. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \geq 1$:

$$A_{n,k} = \left\{ x \in X / \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\}, \quad 1 \leq k \leq n2^n$$

$$B_n = \{x \in X / f(x) \geq n\}.$$

1. Pourquoi les ensembles $A_{n,k}$ et B_n sont-ils mesurables ?
2. On pose $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \text{Id}_{A_{n,k}} + n \text{Id}_{B_n}(x)$. Montrer que les fonctions f_n sont étagées.
3. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et converge simplement vers f .

Exercice 14 (Partie de $\mathbb{R}$ non Borélienne). On note λ mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et on considère sur $[0, 1]$ la relation d'équivalence R définie par

$$x R y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

On considère une partie A de $[0, 1]$ qui contient exactement un élément de chaque classe d'équivalence (on utilise ici l'axiome du choix).

1. Pour $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ distincts, montrer que $(A + q_1) \cap (A + q_2) = \emptyset$.
2. Notons $B = \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, 2]} (A + q)$.
 - (a) Que vaut $\lambda(B)$ en fonction de $\lambda(A)$?
 - (b) Montrer que $[1, 2] \subset B \subset [0, 3]$.
 - (c) En déduire que A n'est pas un borélien.
 - (d) En déduire une fonction non borélienne sur $\mathbb{R}$?