L3 Mathématiques – Intégration
Feuille 2 – Mesures

Exercice 1 (Questions de cours et exemples)**.**

1. Rappeler la définition d'une mesure.
2. Montrer que la mesure de comptage définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ par $m(A) = card(A)$ est une mesure. Quelles sont les parties négligeables pour m ?
3. Montrer que la mesure de Dirac en un point $a \in \mathbb{R}$, notée δ_a et définie par

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\,,\ \delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{si } a \notin A \end{cases}$$

   est une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Quelles sont les parties négligeables pour δ_a ?
4. Soit $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré.
   (a) **(croissance)** Soit $A, B \in \mathcal{T}$ avec $A \subset B$. Montrer que $m(A) \leq m(B)$.
   (b) **(additivité)** Soit $A, B \in \mathcal{T}$ tels que $m(A \cap B) < +\infty$, montrer que :

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

   (c) **(sous-additivité dénombrable)** Pour toutes suites $\Big(A_n\Big)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$, montrer que :

$$m\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n).$$

   (d) **(continuité 1)** Soit $\Big(A_n\Big)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante (i.e. $A_n \subset A_{n+1}$), montrer que :

$$m\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} m(A_n).$$

   (e) **(continuité 2)** Soit $\Big(B_n\Big)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante (i.e. $B_{n+1} \subset B_n$). Si $m(B_1)$ finie, montrer que :

$$m\Big(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} m(B_n).$$

   (f) Cette dernière propriété est-elle vraie si on retire l'hypothèse $m(B_1)$ finie ?

Exercice 2. On considère sur $\mathbb{R}$ la tribu $\mathcal{A}$ définie par

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) | \text{A est fini ou dénombrable ou } A^c \text{ est fini ou dénombrable}\}.$$

Pour $A \in \mathcal{A}$, on pose $m(A) = 0$ si A est fini ou dénombrable et $m(A) = +\infty$ sinon. Montrer que m est une mesure.

Exercice 3. Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure de probabilité. On note $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{B};\ \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = 1\}$. Démontrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur X.

Exercice 4 (Combinaison convexe de mesures)**.** Soient $\mu_1, \ldots, \mu_n$ des mesures définies sur un même espace mesurable $(X, \mathcal{T})$. Soient également $a_1, \ldots, a_n$ des réels positifs. On définit une application $\nu : \mathcal{T} \to [0, +\infty]$ par, pour tout $T \in \mathcal{T}$,

$$\nu(T) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu_k(T).$$

Démontrer que ν est une mesure sur la tribu $\mathcal{T}$.

Exercice 5 (Mesure trace)**.** Soit $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré

1. Soit $F \in \mathcal{T}$. Montrer que la tribu trace de $\mathcal{T}$ sur F, notée $\mathcal{T}_F$, est incluse dans $\mathcal{T}$ (cette tribu est une tribu sur F). Montrer que la restriction de m à $\mathcal{T}_F$ est une mesure sur $\mathcal{T}_F$. On l'appellera la trace de m sur F. Si $m(F) < +\infty$, cette mesure est finie.
2. Soit $\mathcal{A}$ une tribu incluse dans $\mathcal{T}$. La restriction de m à $\mathcal{A}$ est une mesure sur $\mathcal{A}$. Est-elle finie (resp. σ-finie) si m est finie (resp. σ-finie) ?

Exercice 6. Soit $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré fini et $\Big(A_n\Big)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m(A_n) = m(E)$. Montrer que $m\Big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) = m(E)$. Donner un contre-exemple dans le cas où $m(E) = +\infty$.

Exercice 7. Soit $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré fini et $\Big(A_n\Big)_{n \in \mathbb{N}}, \Big(B_n\Big)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites d'ensembles mesurables tels que $B_n \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) - \Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\Big) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Big(A_n - B_n\Big)$.
2. Montrer que $m\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) - m\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\Big) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \Big(m(A_n) - m(B_n)\Big)$.