L3 Mathématiques – Intégration
Feuille 3 – Mesure de Lebesgue

Exercice 1 (Exemples de boréliens)**.**

1. Démontrer que $A = \{x \in \mathbb{R};\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ |x-n| < 1/n\}$ est un borélien de R.
2. Démontrer que les ensembles suivants sont des boréliens de $\mathbb{R}^2$.
   (a) La diagonale $\Delta = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$.
   (b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 = 1 \text{ et } x \notin \mathbb{Q}\}$.

Exercice 2. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

1. Si A est une partie Lebesgue-mesurable de $\mathbb{R}$ et $\lambda(A) > 0$, alors il existe un ouvert non vide $U \subset \mathbb{R}$ tel que $U \subset A$. Et réciproquement ?
2. Si $B \subset \mathbb{R}$ est une partie Lebesgue-mesurable, et si $A \subset B$, alors A est Lebesgue-mesurable.
3. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, $\lambda(U) = 0$ si et seulement si $U = \emptyset$.
4. Une partie Lebesgue-mesurable de $\mathbb{R}$ de mesure finie est-il forcément borné ?
5. Un ouvert de $\mathbb{R}$ de mesure finie est-il forcément borné ?

Exercice 3. Montrer que la tribu des Boréliens sur $\mathbb{R}$ est engendrée indifféremment par l'un des sous-ensembles de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ suivants :

$$\mathcal{M}_1 = \{]a,b[/a,b \in \mathbb{R}\},\ \mathcal{M}_2 = \{]a,b]/a,b \in \mathbb{R}\},\ \mathcal{M}_3 = \{[a,b]/a,b \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{M}_4 = \{[a,b[/a,b \in \mathbb{R}\},\ \mathcal{M}_5 = \{]-\infty,b[/b \in \mathbb{R}\},\ \mathcal{M}_6 = \{]-\infty,b]/b \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{M}_7 = \{]a,+\infty[/a \in \mathbb{R}\},\ \mathcal{M}_8 = \{[a,+\infty[/a \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 4. Soit (X,d) un espace métrique. Une mesure borélienne μ est « régulière » si $\forall A \in \mathcal{B}(X)$:

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F); F \subset A \quad F \text{ fermé}\} = \inf\{\mu(U); A \subset U \quad U \text{ ouvert}\}.$$

On rappelle (ou on admettra) que la mesure de Lebesgue est régulière.

1. Montrer que pour tout borélien A de mesure finie, et pour tout $\epsilon > 0$, il existe un fermé F_ϵ et un ouvert U_ϵ tels que :
$$F_\epsilon \subset A \subset U_\epsilon \text{ avec } \mu(U_\epsilon \setminus F_\epsilon) \leq \epsilon$$
2. Donner des exemples explicites de K_ϵ et U_ϵ dans les trois cas suivant : $A = [0,1]$, $B = \mathbb{Q}$, $C = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 5.

1. On sait que les rationnels et les irrationnels sont denses dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble
$$A = \left(\mathbb{Q} \cap [0,1]^c\right) \cup [0,1]$$
est dense dans $\mathbb{R}$ et de mesure 1.
2. Cet ensemble est-il ouvert ?
3. Donner un exemple d'ouvert dense dans $\mathbb{R}$ de mesure 1.

Exercice 6.

1. Quelle est la mesure de Lebesgue de $\mathbb{N}$ et de $\mathbb{Q}$?
2. Plus généralement, montrer que toute partie dénombrable de $\mathbb{R}$ est un Borélien et que sa mesure de Lebesgue est nulle.

Exercice 7.

1. Montrer que si un ensemble est de mesure nulle alors il est d'intérieur vide.
2. Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 8 (Ensemble de Cantor)**.** On définit une suite d'intervalle $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit :

- On considère ici $A_0 = [0,1]$.
- On coupe cet intervalle en trois et on retire la partie centrale, on obtient
$$A_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1].$$
- Pour A_2, on recommence sur chacun des intervalles : on coupe cet intervalle en trois et on retire la partie centrale.
- On continue ainsi par récurrence notre construction.

1. Montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. On notera K la "limite" de cette suite : $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
2. Montrer que K est un compact de $\mathbb{R}$.
3. K est-il mesurable, si oui que vaut la mesure de Lebesgue de K ?
4. Vérifier que $K = \left\{ x \in [0,1] / x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{3^n} / a_n \in \{0,2\} \right\}$.
5. En déduire que K n'est pas dénombrable.
Indication. On pourra raisonner par l'absurde, considérer $\varphi : \mathbb{N} \to K$ et le point $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{3^n}$ où $a_n \neq \varphi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. On voit qu'il existe des Boréliens négligeables et non dénombrables.

Exercice 9 (Partie de $\mathbb{R}$ non Borélienne)**.** On note λ mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et on considère sur $[0,1]$ la relation d'équivalence R définie par

$$x \, R \, y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

On considère une partie A de $[0,1]$ qui contient exactement un élément de chaque classe d'équivalence (on utilise ici l'axiome du choix).

1. Pour $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ distincts, montrer que $(A + q_1) \cap (A + q_2) = \emptyset$.
2. Notons $B = \displaystyle\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,2]} (A + q)$.
   (a) Que vaut $\lambda(B)$ en fonction de $\lambda(A)$?
   (b) Montrer que $[1,2] \subset B \subset [0,3]$.
   (c) En déduire que A n'est pas un borélien.
   (d) En déduire une fonction non borélienne sur $\mathbb{R}$?