L3 Mathématiques – Intégration
Feuille 4 – Fonctions mesurables

Exercice 1. 1. Fonction constante. Soit $(X, \mathcal{S})$ et $(Y, \mathcal{T})$ deux espaces mesurables, soit $y_0 \in Y$ et soit f la fonction définie sur X à valeurs dans Y par $f(x) = y_0$ pour tout $x \in X$. Montrer que f est mesurable.

2. Fonction indicatrice. Soit $(X, \mathcal{S})$ un espace mesurable et $A \subset X$. Montrer que

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{1}_A : (X, \mathcal{S}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R})) \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si}\, x \in A \\ 0 & \text{si}\, x \notin A \end{cases} \end{array}$$

est mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{S}$.

Exercice 2. Soit $(X, \mathcal{S})$ et $(Y, \mathcal{T})$ deux espaces mesurables.

1. On suppose que $\mathcal{S} = \mathcal{P}(X)$. Quelles applications de X dans Y sont mesurables?
2. On suppose que $\mathcal{S} = \{\emptyset, X\}$. Quelles applications de X dans Y sont mesurables?
3. On suppose que $\mathcal{S} = \sigma(\{A\})$ pour une partie A de X donnée. Quelles applications de X dans Y sont mesurables?
4. Soit $f : X \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Quelle est la plus petite tribu sur X telle que f soit mesurable?

Exercice 3. Prouver que les fonctions suivantes sont mesurables (Boréliennes):

1. la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$;
2. la fonction
$$f : x \mapsto \left| \begin{array}{lll} x+1 & \text{si} & x > 0, \\ -x & \text{si} & x \leq 0; \end{array} \right.$$
3. la dérivée f' d'une fonction dérivable f;
4. la projection :
$$\begin{array}{rccc} \pi_1 : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x, y) & \mapsto & x. \end{array}$$

Exercice 4. Soit $f : (X, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable, montrer que $|f|$, $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \min(-f, 0)$ sont mesurables.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ est mesurable. Est-ce que f est mesurable?

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction monotone.

1. Montrer que, pour tout $c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, c[)$ est convexe.

2. On admet que les ensembles convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. En déduire que f est mesurable.

Exercice 7. Donner un exemple d'espace mesurable $(E, \mathcal{T})$ et d'application $f : E \to \mathbb{R}$ tels que $|f|$ soit mesurable mais pas f.

Exercice 8. Soit $n \geq 1$. On note f_n l'application de $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe la n-ième décimale de x dans son développement décimal propre. Démontrer que f_n est mesurable.

Exercice 9. On note $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R}\,;\ x \in A \Longrightarrow -x \in A\}$. On rappelle (voir exercice 1 feuille 1) que $\mathcal{A}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{F}_1) \to (\mathbb{R}, \mathcal{F}_2)$ définie par $f(x) = x^3$. Vérifier si f est mesurable dans les cas suivant:

   (a) $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}_2 = \mathcal{A}$.

   (b) $\mathcal{F}_1 = \mathcal{A}$ et $\mathcal{F}_2 = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

   (c) $\mathcal{F}_1 = \mathcal{A}$ et $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

   (d) $\mathcal{F}_1 = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2. Même question avec $g(x) = x^2$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sauf en un nombre dénombrable de points. On veut montrer que f est Borélienne.

1. Soit A un borélien, montrer que f est Borélienne si et seulement si $f|_A$ et $f|_{A^c}$ sont Boréliennes.

2. Conclure.