L3 Mathématiques – Intégration
Feuille 5 – Fonctions positives intégrables

Exercice 1. On notera dx la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{]0,3[} \frac{1}{x^\alpha} \mathrm{d}x \text{ pour } \alpha \in \mathbb{R}\,,$$
$$\int_{]1,+\infty[} \frac{1}{x^\alpha} \mathrm{d}x \text{ pour } \alpha \in \mathbb{R}\,,$$
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} \mathrm{d}x\,, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{|x|} \mathrm{d}x\,.$$

Exercice 2. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f, g : (X, \mathcal{A}) \to ([0, +\infty], \mathcal{B}([0, +\infty]))$ des applications mesurables et positives. Montrer que :

1. Pour tout $a > 0$, $\mu(\{f > a\}) \leq \dfrac{1}{a} \displaystyle\int_X f \mathrm{d}\mu$.

2. Si $\displaystyle\int_X f \mathrm{d}\mu < +\infty$, alors f est finie μ presque partout.

3. Si $\mu(E) = 0$ alors $\displaystyle\int_E f \mathrm{d}\mu = 0$.

4. $\displaystyle\int_X f \mathrm{d}\mu = 0$ si et seulement si f est nulle μ presque partout.

5. Si $f = g$ μ-presque partout, alors $\displaystyle\int_X f \mathrm{d}\mu = \int_X g \mathrm{d}\mu$.

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes

$$\int_{\mathbb{R}} e^{x^2} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) \mathrm{d}\lambda(x)\,, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} \mathrm{d}\mu(x)\,,$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et

$$\mu = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n\,.$$

Exercice 4 (Mesure de densité)**.** Soit $f : (X, \mathcal{T}, \mu) \longrightarrow [0, +\infty]$ mesurable. On définit la fonction ϕ sur $\mathcal{T}$ par

$$\phi(E) = \int_E f \mathrm{d}\mu$$

1. Montrer que ϕ est une mesure sur $(X, \mathcal{T})$ et qu'elle est finie si et seulement si f est intégrable.

2. Montrer que si g est mesurable et positive :

$$\int_X g \, \mathrm{d}\phi = \int_X g f \mathrm{d}\mu.$$

Exercice 5 (Mesurable et limite simple de fonctions étagées)**.** On veut montrer que toute fonction mesurable $f : (X, \mathcal{T}) \to \Big([0, +\infty], \mathcal{B}([0, +\infty])\Big)$ est limite simple d'une suite croissante de fonctions étagées. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et pour tout $k \geq 1$:

$$A_{n,k} = \left\{ x \in X / \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\}, \quad 1 \leq k \leq n2^n$$

$$B_n = \{x \in X / f(x) \geq n\}.$$

1. Pourquoi les ensembles $A_{n,k}$ et B_n sont mesurables?
2. On pose $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{1}_{A_{n,k}} + n\mathbb{1}_{B_n}(x)$. Montrer que les fonctions f_n sont étagées.
3. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge simplement vers f.

Exercice 6 (Famille sommable)**.** On considère l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, où μ désigne la mesure de comptage.

1. Qu'est-ce qu'une fonction mesurable sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$?
2. Soit f une fonction mesurable positive sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,
$$f_N(n) = f(n)\mathbb{1}_{[0,N]}(n), n \in \mathbb{N},$$
est une fonction étagée et que la suite des fonctions $(f_N)_{N\in\mathbb{N}}$ croît vers f.
3. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} f_N \mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{N} f(n)$.
4. A l'aide du théorème de Beppo-Levi, en déduire que $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} f \mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$.
5. **Application 1.** Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection. Déterminer une suite croissante de fonctions simples $(g_N)_{N\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $f \circ \varphi$ et telle que
$$\int_{\mathbb{N}} g_N \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{N}} f_N \mathrm{d}\mu.$$
En déduire que
$$\sum_{n=0}^{\infty} f(\varphi(n)) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n).$$
6. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives sur un espace mesuré $(E, \mathcal{T}, \mu)$.

(a) **Application 2.** Montrer que la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est mesurable positive et que

$$\int_E \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_E f_n \mathrm{d}\mu \right).$$

(b) Soit $(u_{n,p})_{n,p\in\mathbb{N}}$ une suite double de réels positifs. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p} \right).$$

(c) Calculer

$$\sum_{p=2}^{+\infty} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \right).$$