# L3 Mathématiques – Intégration
# Feuille 6 – Lemme de Fatou et convergence monotone

**Exercice 1.** On considère la suite de fonctions $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\phi_n(x) = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[n,+\infty[}\,.$$

1. Montrer que $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de fonctions mesurables positives, qui tend uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathrm{d}x \text{ et } \int_{\mathbb{R}}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x\,.$$
3. Cela contredit-il le Théorème de convergence monotone?

**Exercice 2.** On considère sur $[0,1]$ la suite de fonctions

$$\phi_n(x) = 1 - x^n\,.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\phi_n$ est Borélienne sur $[0,1]$.
2. A l'aide du théorème de Beppo-Levi, calculer
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,1]}\phi_n(x)\mathrm{d}\lambda(x)\,.$$
3. En déduire
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,1]} x^n\mathrm{d}\lambda(x)\,.$$

**Exercice 3.** On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\phi_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

et on pose aussi $\phi(x) = e^x$.

1. Montrer que la suite $(\phi_n)_n$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives sur $\mathbb{R}^+$ et qu'elle converge simplement vers $\phi$.
2. Soit $\alpha > 1$, calculer
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^+}\phi_n(x)e^{-\alpha x}\mathrm{d}x\,.$$

**Exercice 4.** On peut facilement construire des exemples où

$$\int \liminf \phi_n < \liminf \int \phi_n$$

même si la convergence a lieu presque partout. Voici trois situations typiques sur $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue (où dans les trois cas les limites inf sont en fait des limites). Soit $\phi$ une fonction positive, continue, nulle en dehors de $[0,1]$ et non identiquement nulle. On définit les trois suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, par

$$f_n(x) = n\phi(nx)\,,\ g_n(x) = \frac{1}{n}\phi\left(\frac{x}{n}\right)\ ,\ h_n(x) = \phi(x-n)\,.$$

1. Montrer que les trois suites convergent vers 0 partout sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ les intégrales

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathrm{d}x\,,\ \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\mathrm{d}x\,,\ \int_{\mathbb{R}} h_n(x)\mathrm{d}x\,.$$

3. Représenter graphiquement les trois suites de fonctions. La suite $(f_n)_n$ illustre un phénomène de concentration ; toute l'information se concentre en un point. La suite $(g_n)_n$ est au contraire évanescente, l'information se diffuse sur tout le demi-axe réel positif tout en diminuant. Enfin la suite $(h_n)_n$ est ce qu'on appelle une bosse glissante.

**Exercice 5.** On se place sur $(\mathbb{R}\,,\ \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ muni de la mesure de Lebesgue.

1. Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction
$$f_n = n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}[}\,.$$
Est-ce que le Théorème de convergence monotone s'applique? Et le Lemme de Fatou?

2. Mêmes questions avec pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$g_n(x) = \frac{n}{|x|+n}\,.$$

3. Mêmes questions avec pour $n \in \mathbb{N}$, $h_n = \mathbb{1}_{[n,2n[}$.