L3 Mathématiques Université de Brest

Intégration

Feuille 7
Intégrabilité et convergence dominée

Exercice 1 *Soit les fonctions d'une variable*

$$f(x)=\frac{(\sin x)(e^{-x}-1)}{x^2}\,,\ g(x)=\frac{x^2+x^6}{x^{5/2}+x^9}\,,\ h(x)=\frac{\sin(x^2)}{x^2}\,,\ \phi(x)=\frac{1}{x^2}\,.$$

1. *La fonction f est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?*
2. *La fonction g est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?*
3. *La fonction h est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?*
4. *La fonction ϕ est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$? Sur $[0,+\infty[$? Sur $]0,+\infty[$?*

Exercice 2 *Les fonctions suivantes sont-elles mesurables et Lebesgue-intégrables sur $\mathbb{R}$?*

1. $x\longmapsto x^2\mathbb{I}_{(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[0,1]}(x)$
2. $x\longmapsto\begin{cases}100 & \textit{si } x=0\\ \frac{1}{\sqrt{x}}\mathbb{I}_{]0,1]}(x) & \textit{sinon}\end{cases}$
3. $x\longmapsto\begin{cases}100 & \textit{si } x=0\\ \sin(\frac{1}{x}) & \textit{sinon}\end{cases}$

Exercice 3 *Etudier la convergence simple des suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes, l'intégrabilité de chaque f_n sur I, puis la limite de $\int_I f_n(x)dx$ lorsque n tend vers $+\infty$.*

1. $f_n(x)=x^n\Big(1+3x^2+8\sin(nx)\Big),\quad I=]0,1].$
2. $f_n(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt[n]{1+x^n}},\quad I=]0,+\infty[.$

Exercice 4 *Déterminer les limites suivantes :*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{]1,2[}\frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x\,,\ \lim_{n\to+\infty}\int_{]0,+\infty[}x^2e^{-nx}\mathrm{d}x\,,\ \lim_{n\to+\infty}\int_{]0,n[}\left(1-\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x\,.$$

Exercice 5 *Etudier:*

1. $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos x\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^{1}\frac{1+nx}{(1+x)^n}\mathrm{d}x.$
3. $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{1+nx}{(1+x)^n}\mathrm{d}x.$

Exercice 6 *Soit* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que* $f(0) = 0$. *Montrer que*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^1 f(t^n)\mathrm{d}t = 0.$$

Exercice 7 *On se place sur l'espace* $E = [-1,1]$ *muni de sa tribu Borélienne* $\mathcal{B}$ *et de la mesure de Lebesgue* μ. *On considère pour* $n \geq 1$ *la suite de fonctions définies sur* E *par*

$$f_n(x) = n.\mathbb{I}_{]0,\frac{1}{n}]}(x) - n.\mathbb{I}_{[-\frac{1}{n},0[}(x).$$

1. *Montrer que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *converge* μ*-pp vers une fonction* f.
2. *A-t-on:*
   (a) $\displaystyle\int_E f_n \mathrm{d}\mu \longrightarrow \int_E f\mathrm{d}\mu$?
   (b) $\displaystyle\int_E |f_n|\mathrm{d}\mu \longrightarrow \int_E |f|\mathrm{d}\mu$?
   (c) $\displaystyle\int_E |f_n - f|\mathrm{d}\mu \longrightarrow 0$?
   (d) $\forall A \in \mathcal{B}, \quad \displaystyle\int_A f_n\mathrm{d}\mu \longrightarrow \int_A f\mathrm{d}\mu$?
3. *Peut-on appliquer le théorème de Lebesgue (de convergence dominée)?*

Exercice 8 *Soit* μ *une mesure finie sur* $(X, \mathcal{T})$ *et* f *une application mesurable finie* μ*-presque partout. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) f *est* μ*-intégrable.*

ii) $\displaystyle\int_{|f|>n} |f|d\mu \longrightarrow 0.$

iii) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n\mu(n < |f| \leq n+1) < +\infty.$