Intégration - L3 Maths - Semestre 1
Feuille 8 – Intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice 1. *Pour $x \geq 1$, on pose*

$$F(x) = \int_0^{\pi} \sqrt{x + \cos t}\, \mathrm{d}t.$$

1. *Vérifier que F est bien définie sur $[1, +\infty[$.*
2. *Montrer que F est continue sur $[1, +\infty[$.*

Exercice 2. *Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose*

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2} \mathrm{d}t.$$

1. *Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 3 (Calcul de l'intégrale de Gauss)**.** *Le but de l'exercice est de calculer la valeur de l'intégrale de Gauss*

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t.$$

On définit deux fonctions f, g sur $\mathbb{R}$ par les formules

$$f(x) = \int_0^{x} e^{-t^2} \mathrm{d}t \text{ et } g(x) = \int_0^{1} \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} \mathrm{d}t.$$

1. *Justifier que f et g sont bien définies.*
2. *Prouver que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) + f^2(x) = \frac{\pi}{4}$.*
3. *Montrer que $\lim_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = 0$.*
4. *En déduire la valeur de I.*

Exercice 4. *Déterminer*

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2 t^2} \mathrm{d}t\,.$$

Exercice 5. *Soit la fonction $F(t)$ définie par l'intégrale*

$$F(t) = \int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-tx}\cos x}{1+x^2} \mathrm{d}x\,.$$

1. *Montrer que F est continue sur $[0, +\infty[$.*
2. *Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$.*

Exercice 6. 1. *Montrer que les fonctions suivantes sont bien définies et dérivables sur $\mathbb{R}^{+\star}$.*

$$a) \quad F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x(1+x^2)}\, \mathrm{d}x, \qquad b)\ G(t) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{-tx}\, \mathrm{d}x,$$

2. *Montrer que la fonction suivante est bien définie et différentiable sur $\mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star}$.*

$$H(t,u) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} - e^{-ux}}{x} \mathrm{d}x.$$

Exercice 7. *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier par*

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(t) \mathrm{d}t\,.$$

1. *Montrer que $\hat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.*
2. *Considérons maintenant le cas particulier où $f(t) = e^{-t^2/2}$.*
   (a) *Montrer que $\hat{f}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*
   (b) *Montrer que $\hat{f}$ vérifie l'équation différentielle*

   $$\hat{f}'(x) = -x\hat{f}(x)\,,\ \ \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

   (c) *En utilisant la valeur de $\hat{f}(0)$ (on pourra prendre le résultat de l'exercice 3 de cette feuille ou de l'exercice 3 de la feuille 9), en déduire $\hat{f}(x)$.*