Intégration - L3 Maths - Semestre 1
Feuille 9 – Théorème de Fubini, changement de variables

Exercice 1. *Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ délimité par les lignes :*

$$x = 0\,,\ x = 1\,,\ y = x^2\,,\ y = \sqrt{x}\,.$$

Représenter D et calculer l'intégrale

$$\int_D xy\,\mathrm{d}m_2(x, y)\,.$$

Exercice 2. *Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ délimité par les lignes :*

$$y = 2 - x^2\,,\ y = 2x - 1\,.$$

Représenter D et calculer l'intégrale

$$\int_D (x - y)\mathrm{d}m_2(x, y)\,.$$

Exercice 3. *On cherche à calculer l'intégrale*

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}m_1(x)\,.$$

Considérons l'intégrale

$$J = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}m_2(x, y)\,.$$

1. *A l'aide du théorème de Fubini, exprimer J en fonction de I (on vérifiera les hypothèses du théorème).*
2. *Effectuer un changement de variables et calculer J.*
3. *En déduire la valeur de I.*

Exercice 4. *Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ délimité par les cercles $x^2+y^2 = e^2$ et $x^2+y^2 = e^4$, calculer*

$$\iint_D \frac{\ln(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Exercice 5. *Soit $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$. Calculer*

$$\int_\Omega \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}}{x^2 + y^2 + z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,.$$

Exercice 6.

1. *Calculer le volume du prisme dans* $\mathbb{R}^3$ *délimité par les plans* $x = 0$, $z = 0$, $y = 1$, *et* $x + 2y + z = 3$.

2. *Calculer l'aire de l'ellipse dans* $\mathbb{R}^2$ *:*

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 25\,.$$

Exercice 7. *On considère le domaine* D *de* $\mathbb{R}^2$ *défini par*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x^2 + y^2 \leq 4\,,\ \ y \geq 0\}\,.$$

1. *Calculer*

$$\int_D (x+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

et comparer avec l'aire de D. *Aurait-on pu prévoir ce résultat?*

2. *La fonction*

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

est-elle intégrable sur D*?*

Exercice 8. *Soit*

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

1. *Calculer la dérivée partielle par rapport à* x *de*

$$g(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}\,.$$

2. *Calculer*

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)dx\right)dy\,.$$

3. *En déduire que* $\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)dx\right)dy \neq \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)dy\right)dx$.

4. *A-t-on* $f \in \mathcal{L}^1(]-1,1[^2)$*?*

Exercice 9. *Calculer de deux manières différentes l'intégrale (après avoir justifié qu'elle a bien un sens) :*

$$\int_0^1\int_0^\infty e^{-x}\sin(2xy)\,dx\,dy\,.$$

En déduire que

$$\int_0^\infty e^{-x}\,\frac{\sin^2(x)}{x}\,dx = \frac{\ln 5}{4}\,.$$