L3 Maths - Intégration
Rappels de cours sur l'intégrabilité au sens de Lebesgue pour les fonctions à une variable

Notation. Lorsqu'on travaille avec la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}^n$, on note fréquemment $\mathrm{d}x$ au lieu de $\mathrm{d}m_1(x)$.

Le résultat essentiel permettant de calculer une intégrale pourla mesure de Lebesgue est le **Théorème fondamental du calcul intégral** :

> **Théorème 1.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs réelles ou complexes et soit F une primitive de f. Alors f est intégrable sur $[a, b]$ et*
>
> $$\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,.$$

Avant d'énoncer un corollaire important de ce résultat, commençons par rappeler la définition d'une fonction continue par morceaux.

Définition 1. *Soit $-\infty < a < b < +\infty$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision de $[a, b]$ en intervalles $[a_i, a_{i+1}]$, $0 \leq i \leq n-1$, avec $a = a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < a_n = b$, telle que :*

- *f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$ pour tout $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$;*
- *f admet une limite finie à gauche en tout point a_i, $1 \leq i \leq n$ et une limite finie à droite en tout point a_i, $0 \leq i \leq n-1$ (autrement dit, f admet en les a_i des discontinuités de première espèce).*

> **Corollaire 1.** *Toute fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$ et son intégrale de Lebesgue coïncide avec son intégrale au sens de Riemann, c'est-à-dire :*
>
> $$\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Preuve du Théorème 1. Tout d'abord, la continuité de f sur $[a, b]$ entraine que f est mesurable et bornée sur $[a, b]$, i.e. il existe $C > 0$ telle que, pour tout $x \in [a, b]$, on ait $|f(x)| \leq C$. Il suit que

$$\int_{[a,b]} |f(x)|\mathrm{d}x \leq C \int_{[a,b]} \mathrm{d}x = C\lambda([a, b]) = C(b-a) < +\infty\,,$$

La fonction f est donc bien intégrable sur $[a,b]$. On considère maintenant la fonction G définie sur $[a,b]$ par

$$G(x) := \int_{[a,x]} f(t)\mathrm{d}t\,.$$

Pour $x \in [a,b[$ et $l > 0$ tel que $x+l \in [a,b]$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{G(x+l)-G(x)}{l} &= \frac{1}{l}\int_{[x,x+l]} f(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{l}\int_{[x,x+l]} f(x)\mathrm{d}t + \frac{1}{l}\int_{[x,x+l]} \left(f(t)-f(x)\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{l} f(x)\lambda([x,x+l]) + \frac{1}{l}\int_{[x,x+l]} \left(f(t)-f(x)\right)\mathrm{d}t \\
&= f(x) + \frac{1}{l}\int_{[x,x+l]} \left(f(t)-f(x)\right)\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{G(x+l)-G(x)}{l} - f(x)\right| &\leq \frac{1}{l}\int_{[x,x+l]} |f(t)-f(x)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{1}{l}\left(\sup_{t\in[x,x+l]} |f(t)-f(x)|\right)\lambda([x,x+l]) \\
&= \sup_{t\in[x,x+l]} |f(t)-f(x)|\,.
\end{aligned}$$

Par continuité de f, ce dernier terme tend vers 0 lorsque $l \to 0$. On peut bien sûr effectuer le même raisonnement pour $l < 0$. On en déduit que G est dérivable sur $[a,b]$ et que $G' = f$. Il suit donc que G et F diffèrent simplement par une constante, autrement dit,

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a)\,.$$

Comme de plus

$$G(b) = \int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x$$

et

$$G(a) = \int_{\{a\}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\{a\}} f(a)\mathrm{d}x = f(a)\lambda(\{a\}) = 0\,,$$

on a bien le résultat voulu. $\square$

Etude d'intégrabilité : méthode pratique

Le Théorème 1 ainsi que le Théorème de Beppo Levi nous donnent un moyen pratique d'étudier l'intégrabilité d'une fonction continue, ou continue par morceaux, sur $\mathbb{R}$: soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction continue, ou continue par morceaux, on note pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n = f.\mathrm{Id}_{[-n,n]}$. La suite $\{|g_n|\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives tendant vers $|f|$ lorsque $n \to +\infty$. Donc

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} |g_n(x)|\mathrm{d}x\,.$$

On calcule alors l'intégrale de g_n en écrivant

$$\int_{\mathbb{R}} |g_n(x)|\mathrm{d}x = \int_{-n}^{n} |f(x)|\mathrm{d}x$$

et en utilisant les méthodes habituelles pour calculer cette dernière intégrale. On étudie enfin la limite des intégrales des fonctions $|g_n|$; la fonction f sera intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si la limite est finie.

Dans le cas où f est intégrable sur $\mathbb{R}$, on peut calculer son intégrale sur $\mathbb{R}$ à l'aide du Théorème de convergence dominée. En effet, la suite $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f sur $\mathbb{R}$, de plus, on a

$$|g_n(x)| \leq |f(x)|\ \forall x \in \mathbb{R}$$

et $|f|$ est à valeurs positives et intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc, par le Théorème de convergence dominée :

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\mathrm{d}x \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x \text{ lorsque } n \to +\infty\,.$$

D'autre part,

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\mathrm{d}x = \int_{-n}^{n} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

On calcule ces dernières intégrales par les techniques dont on a l'habitude, puis on calcule leur limite et on trouve ainsi l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$.

A noter que dans le cas où f est à valeurs positives, la première étape du raisonnement suffit à calculer l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$.

On peut de façon analogue étudier l'intégrabilité et selon le cas calculer l'intégrale, de fonction continues, ou continues par morceaux, sur

1. $[a, +\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$,
2. $]-\infty, a]$, où $a \in \mathbb{R}$,
3. $[a, b[$, où $-\infty < a < b < +\infty$,

4. ou $]a,b]$, où $-\infty < a < b < +\infty$.

On définit respectivement la suite $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans chacun des cas par :

1. $g_n(x) := f(x)\mathrm{Id}_{[a,n]}(x)$, pour n assez grand,
2. $g_n(x) := f(x)\mathrm{Id}_{[-n,a]}(x)$, pour n assez grand,
3. $g_n(x) := f(x)\mathrm{Id}_{[a,b-\frac{1}{n}]}(x)$, pour n assez grand,
4. $g_n(x) := f(x)\mathrm{Id}_{[a+\frac{1}{n},b]}(x)$, pour n assez grand,

le raisonnement est alors identique. En application de ces remarques, voici un théorème fondamental.

Théorème 2.

- $$\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})\,, \tag{1}$$
- $$\text{soit } a > 0 \text{ donné}\,,\ \text{pour } \alpha \in \mathbb{R}\,,\ \frac{1}{x^\alpha} \in \mathcal{L}^1(]a,+\infty[) \Leftrightarrow \alpha > 1\,, \tag{2}$$
- $$\text{soit } a > 0 \text{ donné}\,,\ \text{pour } \alpha \in \mathbb{R}\,,\ \frac{1}{x^\alpha} \in \mathcal{L}^1(]0,a[) \Leftrightarrow \alpha < 1\,, \tag{3}$$
- $$\text{quel que soit } \alpha \in \mathbb{R}\,,\ \frac{1}{x^\alpha} \notin \mathcal{L}^1(]0,+\infty[)\,. \tag{4}$$

Preuve. Nous appliquons la technique générale décrite ci-dessus et nous en reprenons les notations.

- Preuve de (1). La fonction f est

$$f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+\,,\ f(x) = \frac{1}{1+x^2}\,,$$

et pour $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_k est définie par

$$g_k(x) = \mathrm{Id}_{[-k,k]}(x)f(x)\,.$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, on peut donc appliquer les remarques précédentes. Elle est de plus à valeurs positives.

$$\int_{\mathbb{R}} |g_k(x)|\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g_k(x)\mathrm{d}x = \int_{-k}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\arctan x]_{-k}^{k} = 2\arctan k\,.$$

Donc

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} |g_k(x)|\mathrm{d}x = 2 \lim_{k\to+\infty} \arctan k = \pi < +\infty\,.$$

Donc la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

- Preuve de (2). On a

$$f_\alpha \;:\;]a,+\infty[\to \mathbb{R}^+\,,\;\; f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}\,,$$
$$\text{pour } k\in\mathbb{N}^* \text{ assez grand}\,,\;\; g_k(x) = \mathrm{Id}_{]a,k]}(x) f(x)\,.$$

La fonction f est continue sur $]a,+\infty[$, on peut donc appliquer les remarques précédentes. De plus, elle est à valeurs positives.

$$\int_{\mathbb{R}} |g_k(x)|\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g_k(x)\mathrm{d}x = \int_a^k \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}\,,$$

donc si $\alpha\neq 1$,

$$\int_{\mathbb{R}} |g_k(x)|\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_a^k = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right)\,.$$

Si $\alpha > 1$, alors $\alpha - 1 > 0$ et donc

$$\int_{\mathbb{R}} |g_k(x)|\mathrm{d}x \longrightarrow \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{a^{\alpha-1}} < +\infty \text{ lorsque } k\to+\infty\,,$$

alors que si $\alpha < 1$, $\alpha - 1 < 0$ et donc $1/(k^{\alpha-1}) \to +\infty$ lorsque $k\to+\infty$, d'où,

$$\int_{\mathbb{R}} |g_k(x)|\mathrm{d}x \longrightarrow +\infty \text{ lorsque } k\to+\infty\,.$$

Donc, $f_\alpha \in \mathcal{L}^1(]a,+\infty[)$ si et seulement si $\alpha > 1$. La preuve de (3) est laissée en exercice, quant à (4), c'est une conséquence immédiate de (2) et (3). Ceci conclut la preuve du théorème. $\square$